Aula 5

Equação de autovalores para o spin

$$\begin{cases} \hat{S}_z\,\psi = m_s\,\hbar\,\psi \\ \hat{S}^2\,\psi = s\,(s+1)\,\hbar^2\,\psi \end{cases}$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$$

Operadores de spin

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Operadores de spin

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autoestados de S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}_z\,|\uparrow\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle \\ \hat{S}_z\,|\downarrow\rangle = -\dfrac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle \end{cases}$$

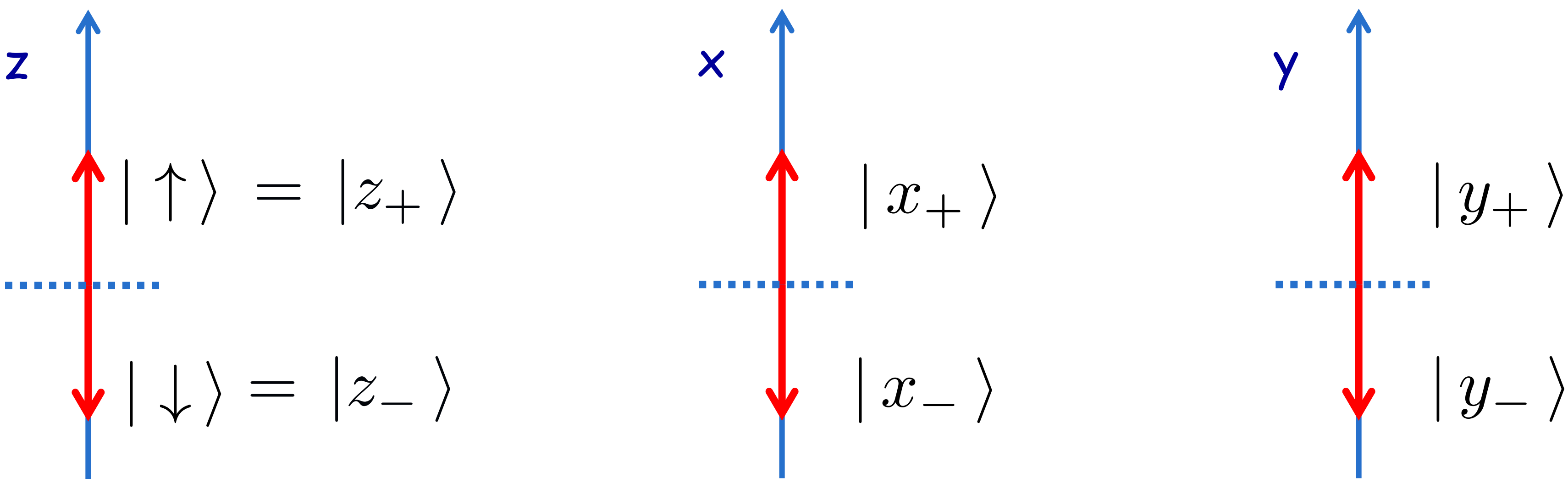
Operador no autoestado "errado" $\quad \hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = ?$

$$\hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle$$

Não é equação de autovalores !!!

Autoestados dos operadores S_x e S_y

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$



Aula 6

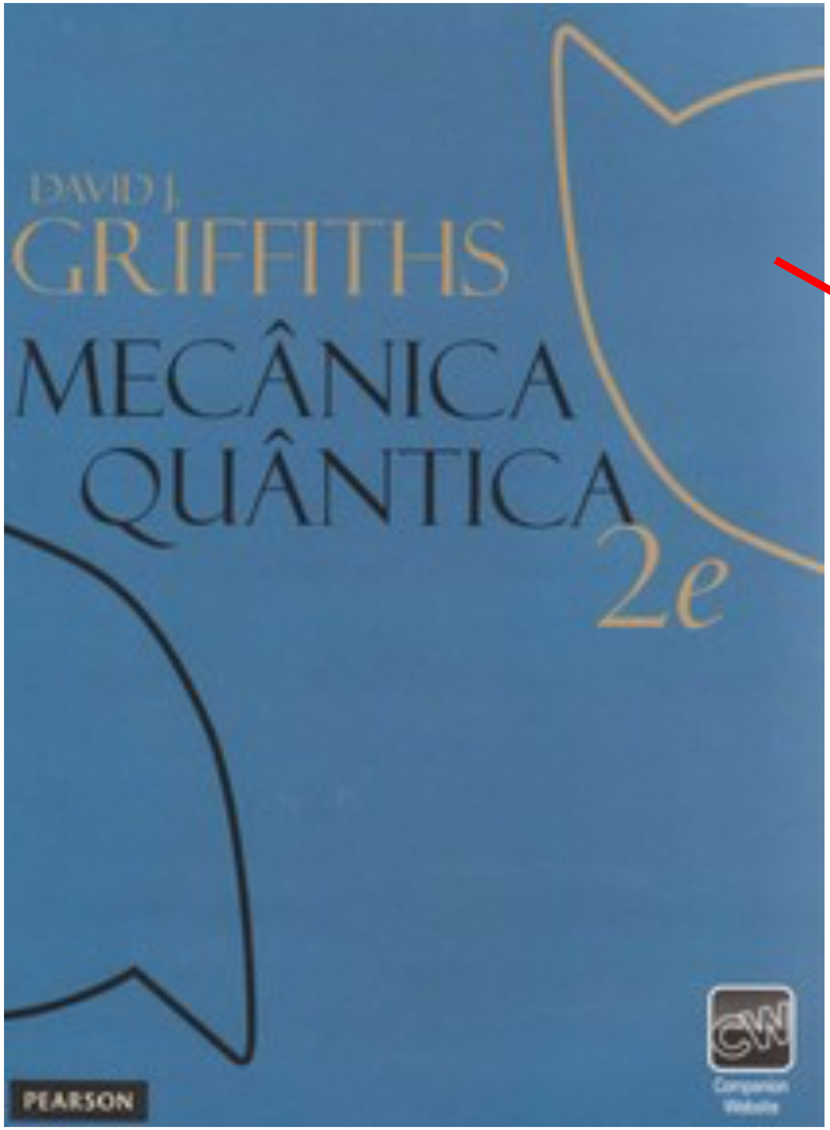
Autoestados, espaços, álgebra linear

Autovalores e autoestados de S_x

Medidas SG sequenciais

Autoestados de spin

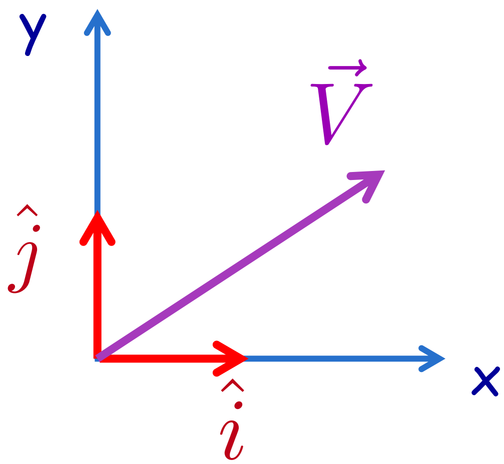
Para estudar o formalismo de spin vamos usar :



gato

Capítulo 4
pag. 128

Espaço vetorial de duas dimensões



versores $\begin{cases} \hat{i} = |\,\hat{i}\,\rangle \\ \hat{j} = |\,\hat{j}\,\rangle \end{cases}$

Normalizados : $\hat{i}\,.\,\hat{i} = \langle\,\hat{i}\,|\,\hat{i}\,\rangle = 1 \qquad \hat{j}\,.\,\hat{j} = \langle\,\hat{j}\,|\,\hat{j}\,\rangle = 1$

Ortogonais : $\hat{i}\,.\,\hat{j} = \langle\,\hat{i}\,|\,\hat{j}\,\rangle = 0 \qquad \hat{j}\,.\,\hat{i} = \langle\,\hat{j}\,|\,\hat{i}\,\rangle = 0$

Formam uma base !

Vetor genérico: $\vec{V} = V_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j} = V_x\,|\,\hat{i}\,\rangle + V_y\,|\,\hat{j}\,\rangle$

Autoestados de S^2 e S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autoestado adjunto = transposto do complexo conjugado

$$(|\uparrow\rangle^*)^T = |\uparrow\rangle^\dagger = \langle\uparrow|$$

$$\langle\uparrow| = (1 \quad 0) \qquad \langle\downarrow| = (0 \quad 1)$$

Produto escalar

$$\left.\begin{array}{l} \langle \uparrow | \downarrow \rangle = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\[2ex] \langle \downarrow | \uparrow \rangle = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} \text{ortogonais}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \langle \uparrow | \uparrow \rangle = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\[2ex] \langle \downarrow | \downarrow \rangle = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \end{array}\right\} \text{normalizados}$$

ortonormais !

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg\}$$ Formam uma base !

Vetor genérico:

$$|s\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

$$\langle s| = a^* \langle\uparrow| + b^* \langle\downarrow|$$

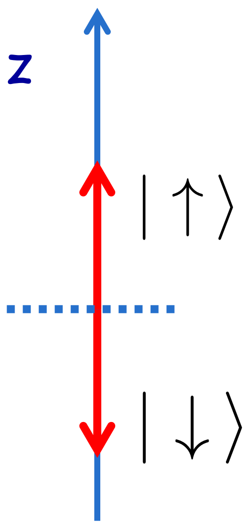
Normalizado:

$$\langle s|s\rangle = 1$$

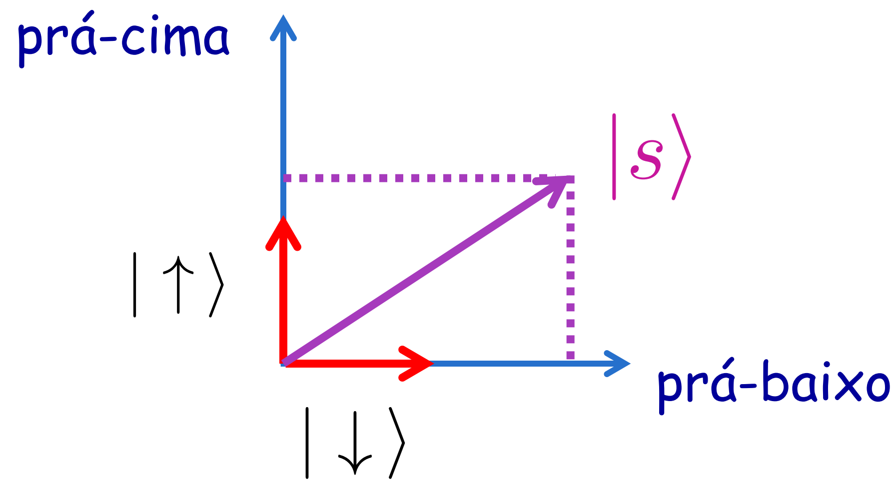
$$[a^* \langle\uparrow| + b^* \langle\downarrow|] \cdot [a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle] =$$

$$a^* a + b^* b = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

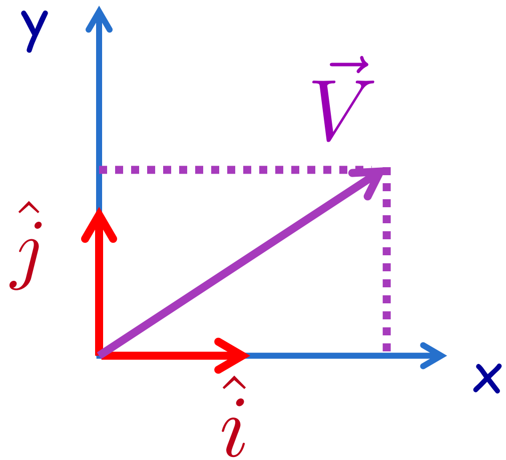
No espaço real:

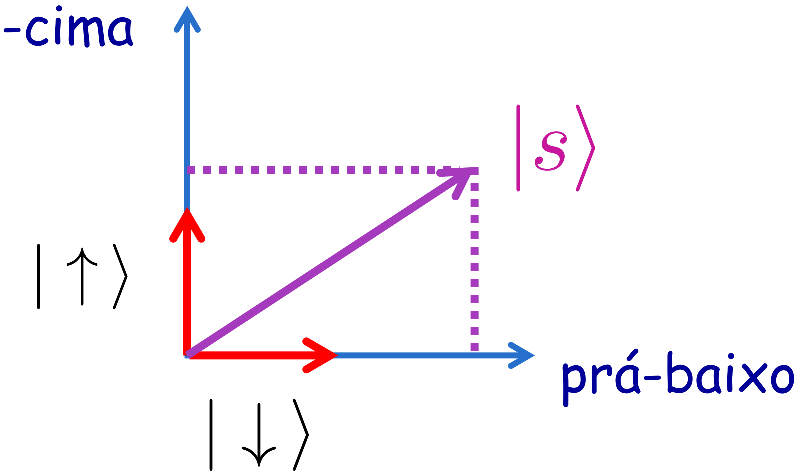


No espaço vetorial abstrato:



$$|s\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$





$$\vec{V} = V_x\,|\,\hat{i}\,\rangle + V_y\,|\,\hat{j}\,\rangle$$

$$|s\,\rangle = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$$

Interpretação geométrica

Interpretação probabilística

$$P(\,|\uparrow\rangle\,) = |a|^2$$

Probabilidade de observar
o "spin prá cima"

$$P(\,|\downarrow\rangle\,) = |b|^2$$

Probabilidade de observar
o "spin prá baixo"

Exemplos

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

a b

$|a|^2 = \frac{1}{2}$ 50 % prá cima $|b|^2 = \frac{1}{2}$ 50 % prá baixo

$$|s\rangle = i\,\frac{\sqrt{3}}{2}|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle$$

$|a|^2 = \frac{3}{4}$ 75 % prá cima $|b|^2 = \frac{1}{4}$ 25 % prá baixo

Medimos 100 sistemas idênticos, no mesmo estado |s >

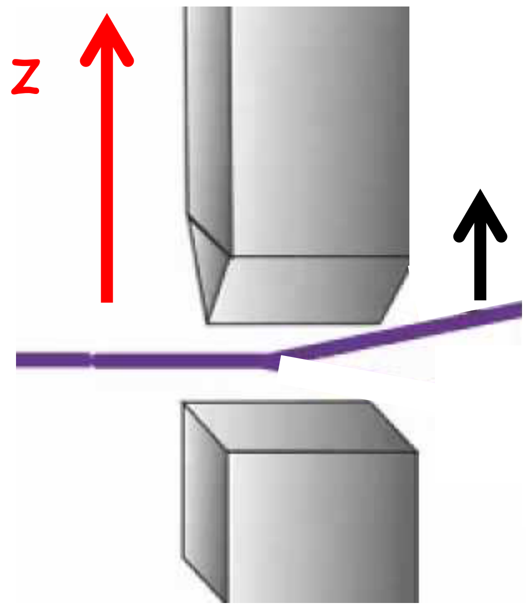
Em 75 vezes encontramos o "spin prá cima"

Observação sobre a medição

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

Antes da medida o elétron está num estado de superposição !

Medida de Stern Gerlach



A próxima medida vai dar spin prá cima !

Depois da medida o elétron está no estado de "spin prá cima"

A medida fixa o estado !

Acaba com a superposição !

Schroedinger

"Colapso" da função de onda !

Operadores de spin

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autoestados de S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}_z\,|\uparrow\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle \\ \hat{S}_z\,|\downarrow\rangle = -\dfrac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle \end{cases}$$

Operador no autoestado "errado" $\quad \hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = ?$

$$\hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle$$

Não é equação de autovalores !!!

Autoestados e autovalores de S_x

$$\hat{S}_x \,|x\rangle = a\,|x\rangle \qquad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\hbar}{2}\beta = a\,\alpha \\ \dfrac{\hbar}{2}\alpha = a\,\beta \end{cases} \longrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow \alpha = \pm\beta$$

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = \frac{\hbar}{2}}$$

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = \frac{\hbar}{2}}$$

$$\beta = -\alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = -\frac{\hbar}{2}}$$

Resumo

$$|\, x_+ \rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x \,|\, x_+ \rangle = \hat{S}_x \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$|\, x_- \rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x \,|\, x_- \rangle = \hat{S}_x \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Constante é determinada pela normalização

$$\langle\, x_+ \,|\, x_+ \,\rangle \,=\, 1 \qquad \alpha\,(\,1 \;\; 1\,)\,\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

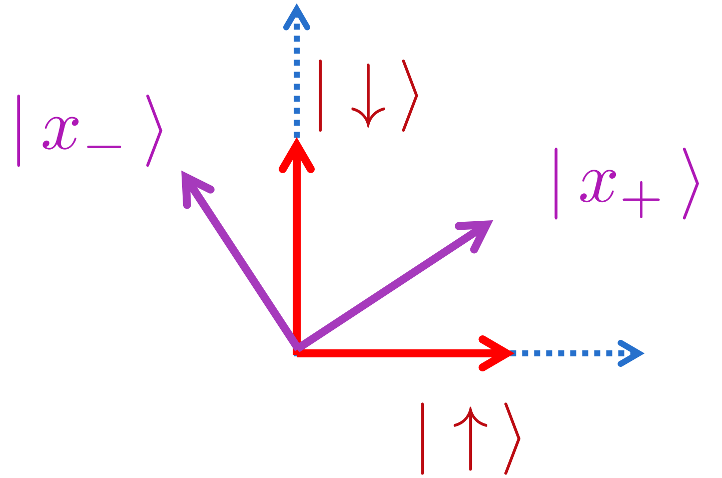
$$\langle\, x_- \,|\, x_- \,\rangle \,=\, 1 \qquad \alpha\,(\,1 \;\; -1\,)\,\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\,|\, x_+ \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\,|\, x_- \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\langle\, x_+ \,|\, x_- \,\rangle = 0} \qquad \boxed{\langle\, x_- \,|\, x_+ \,\rangle = 0}$$

Ortogonais e normalizados : formam uma base

Duas bases $\begin{cases} |\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle \\ \\ |x_+\rangle \quad |x_-\rangle \end{cases}$



$$|\uparrow\rangle = \alpha\,|x_+\rangle + \beta\,|x_-\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ \ 0)\,\alpha\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1\ \ 0)\,\beta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

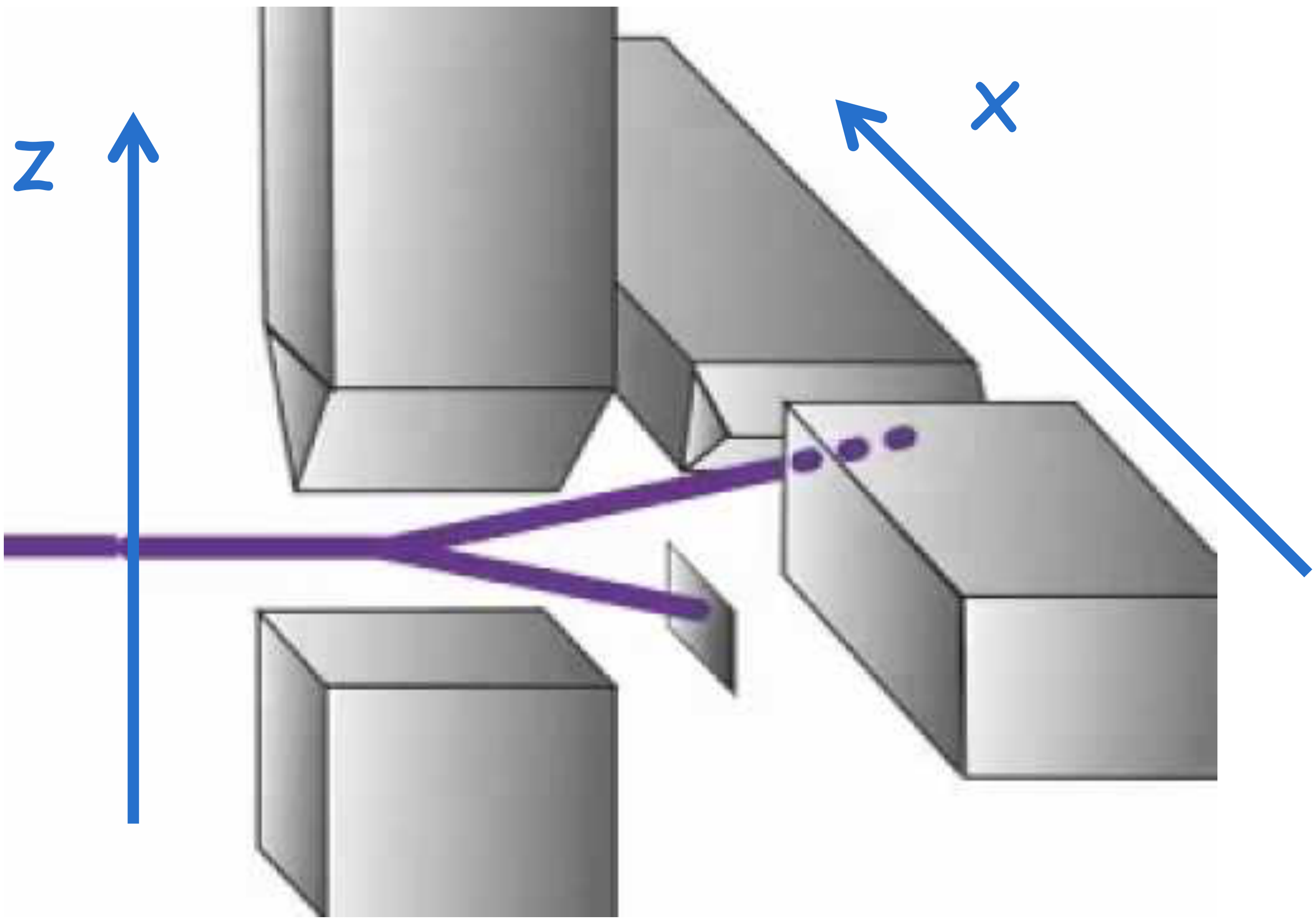
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} \\ 1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \longrightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |x_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |x_-\rangle}$$

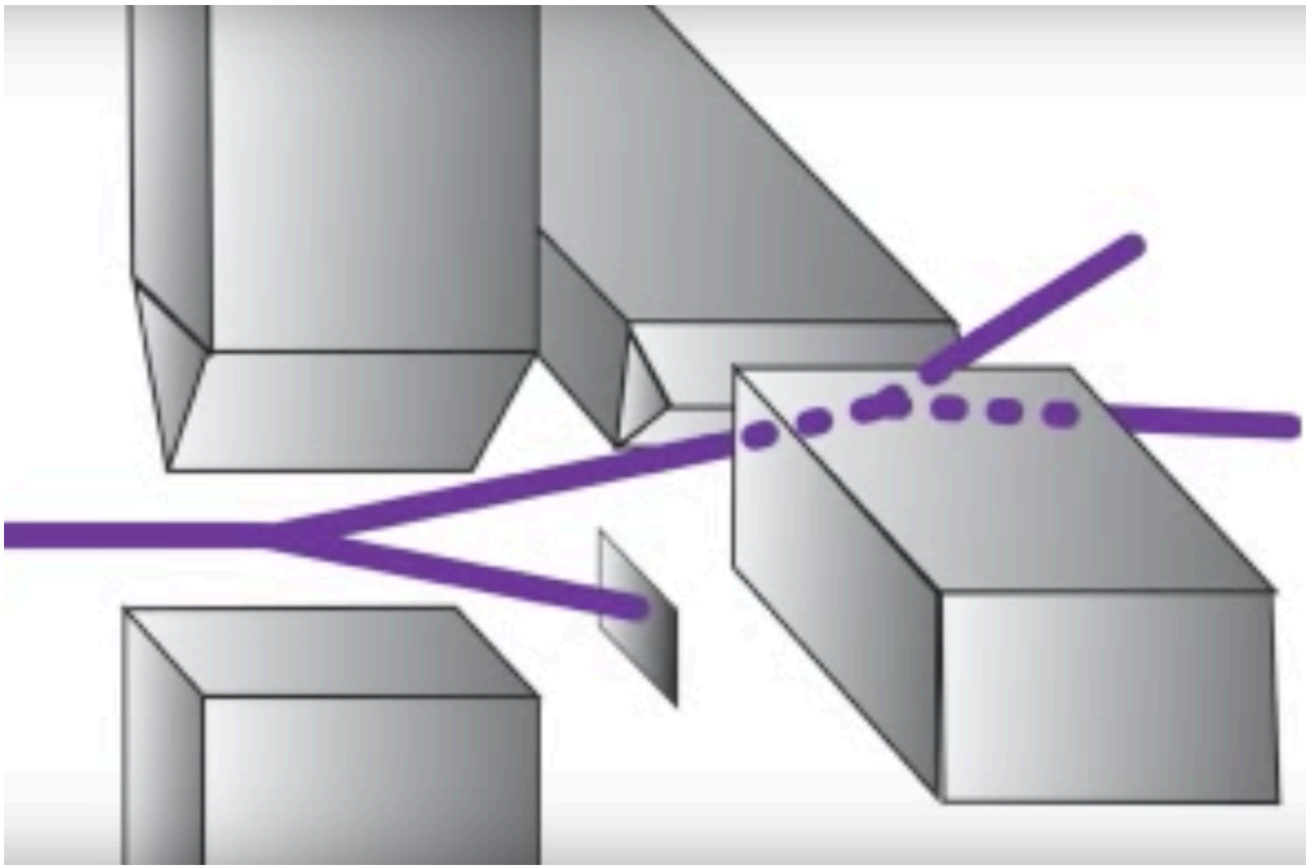
50 % - 50 %

Stern - Gerlach Sequencial

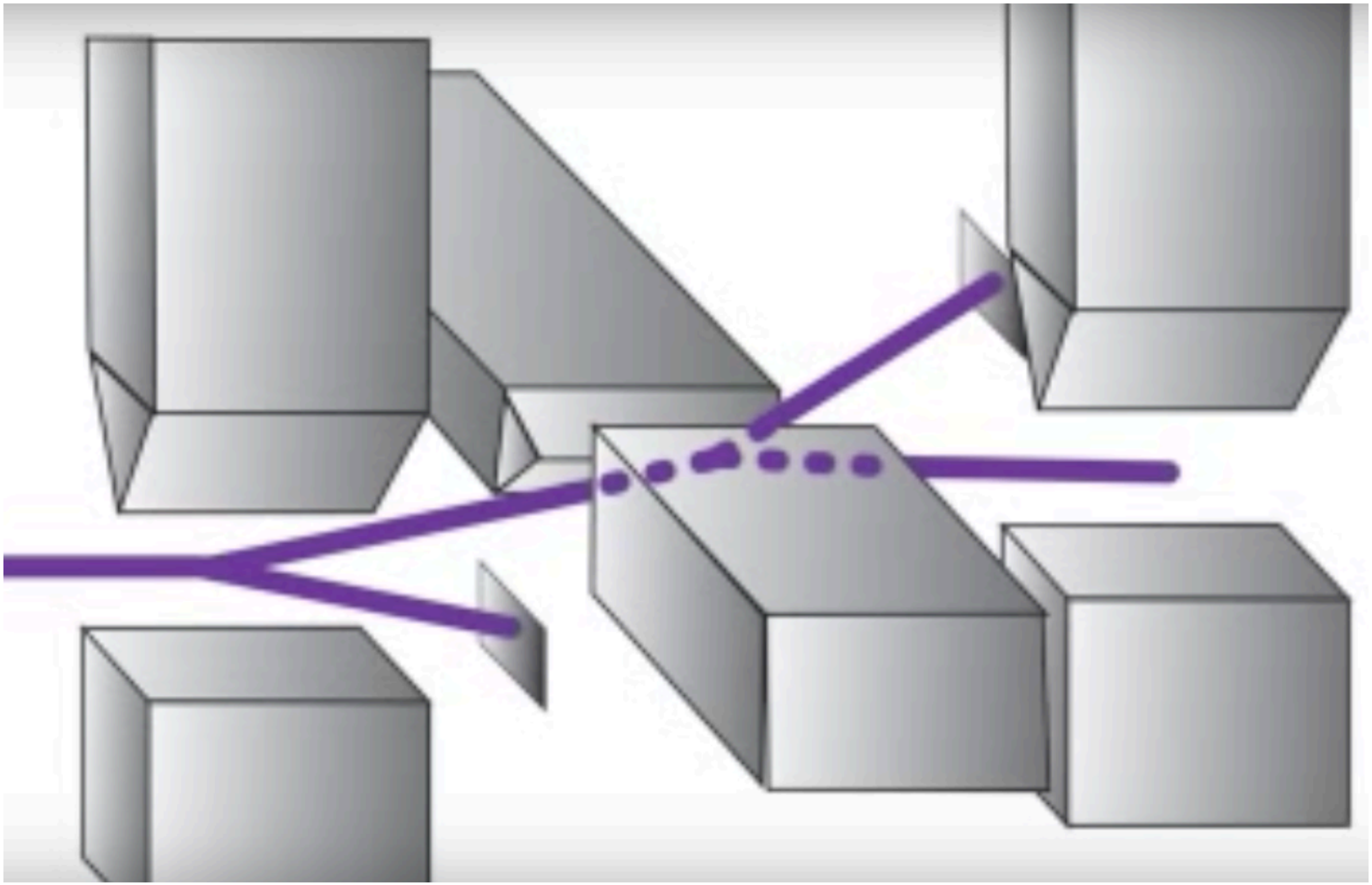
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



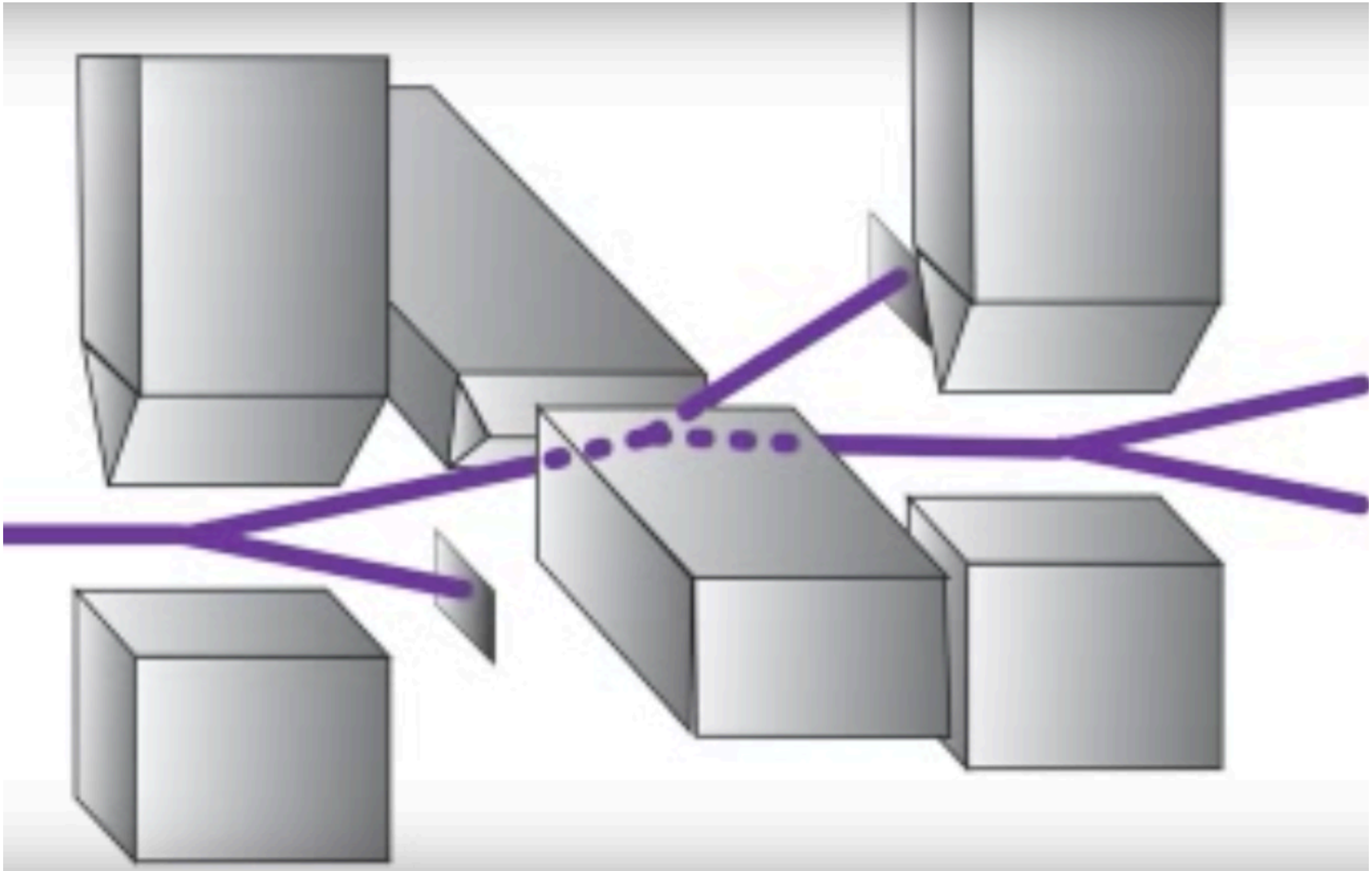
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



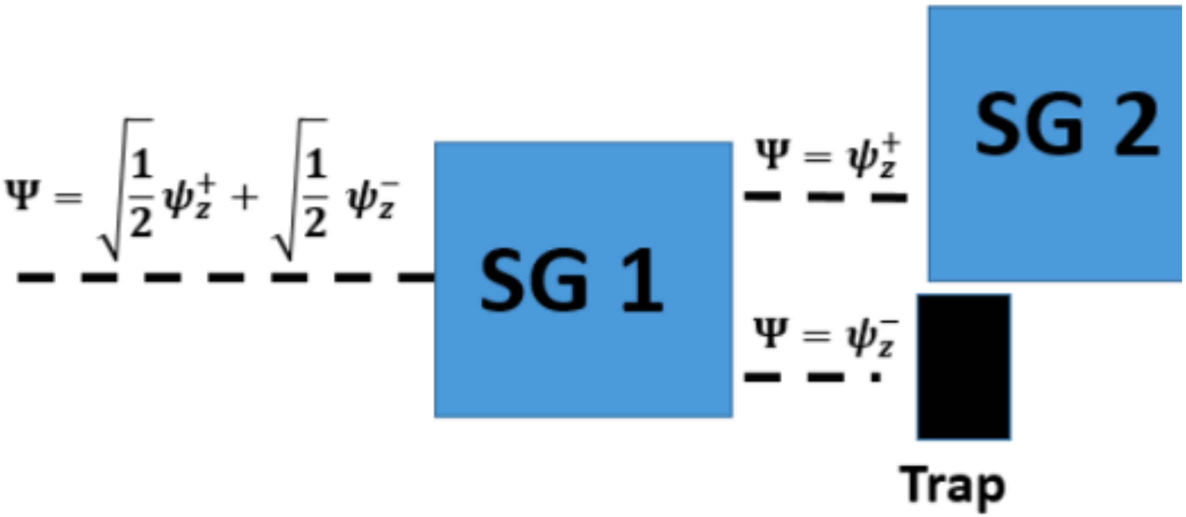
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



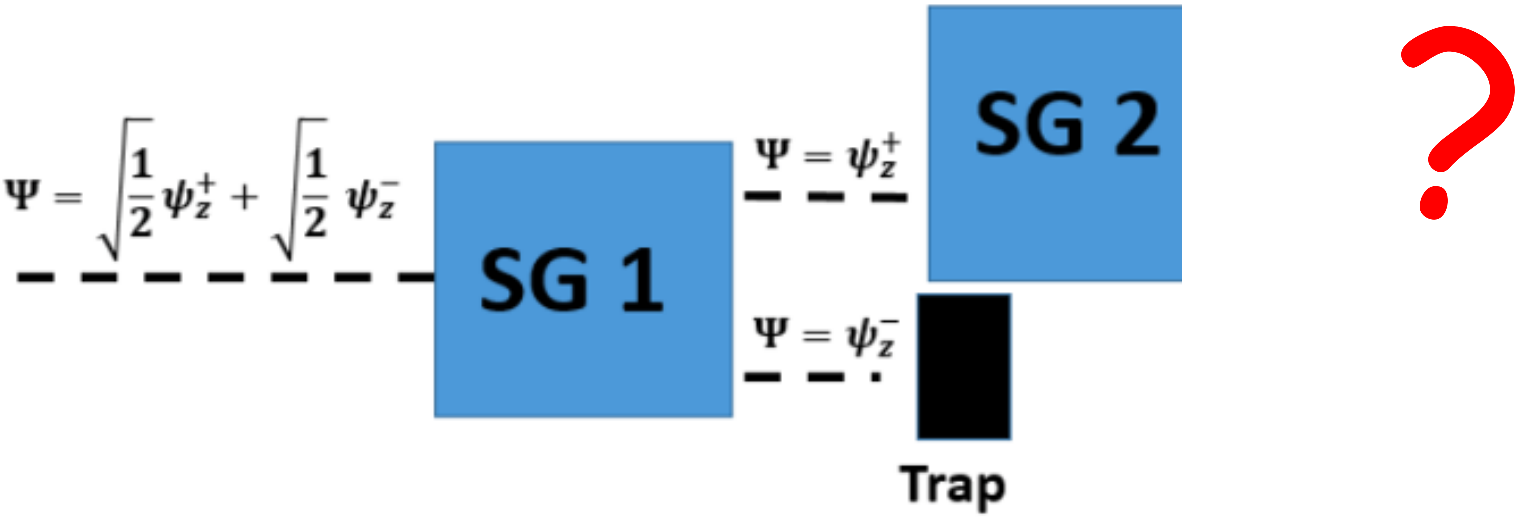
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

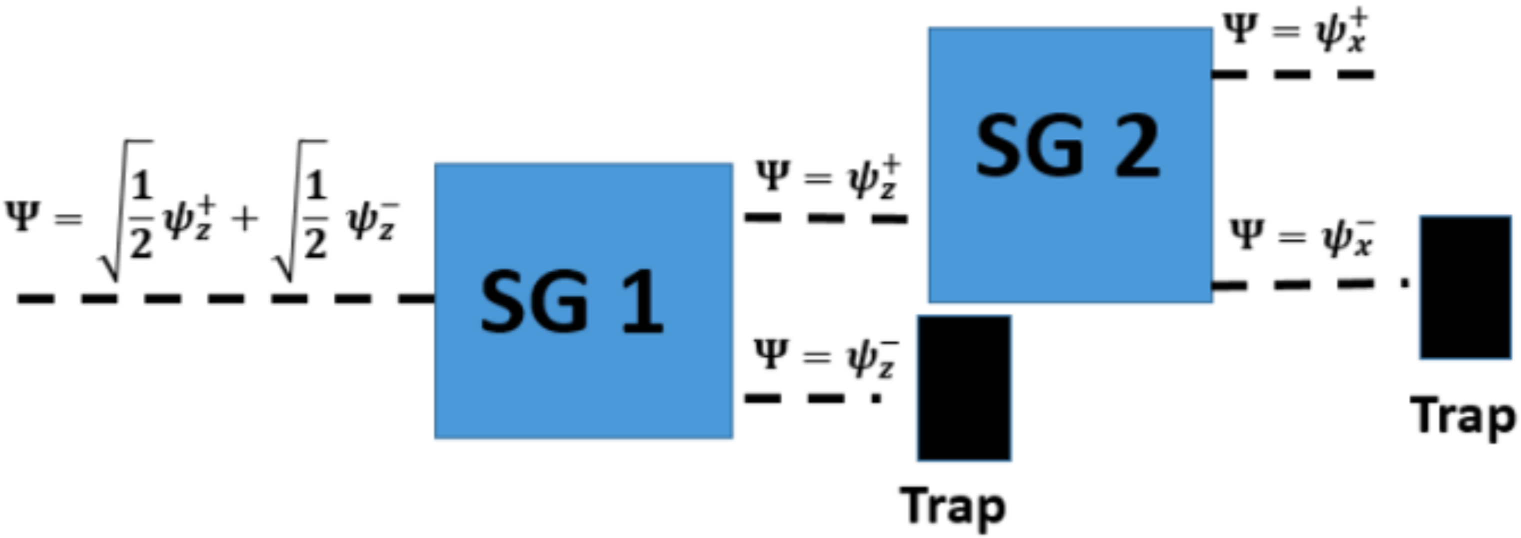


Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

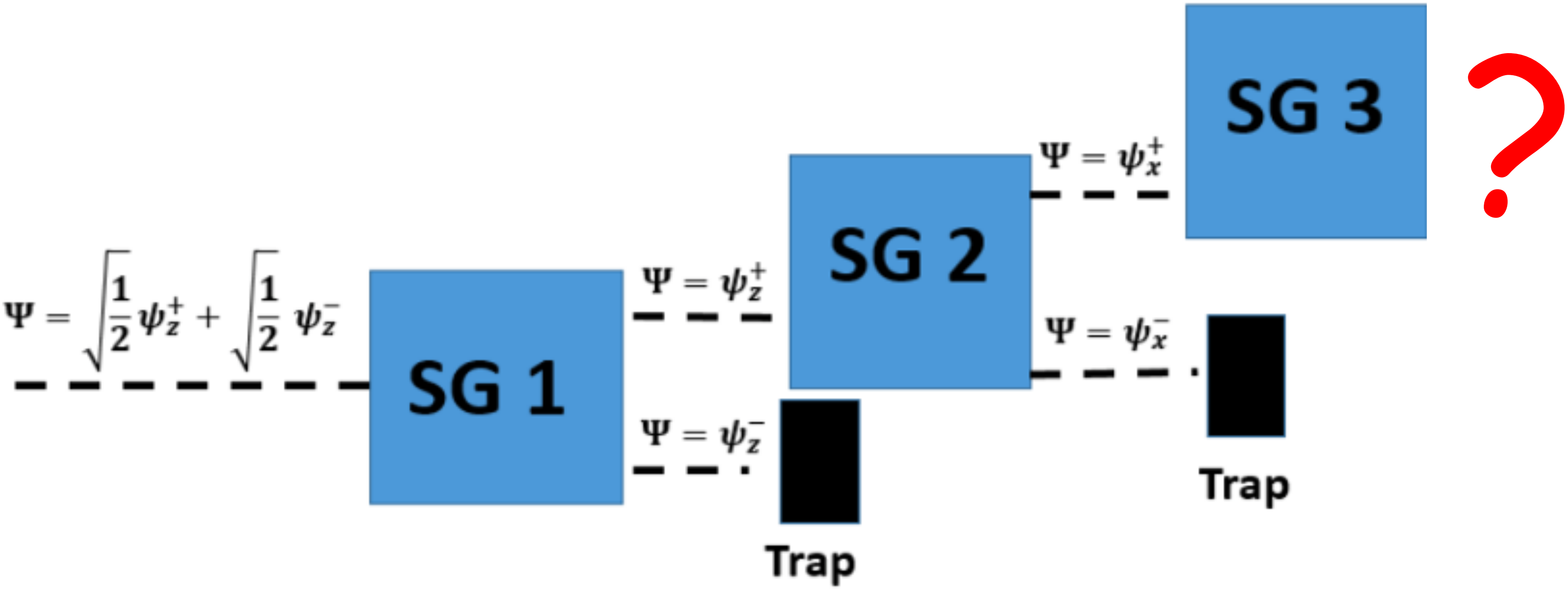


Sabendo que a partícula está no estado $|\uparrow\rangle$,
qual é o resultado da medida na componente x ?

Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

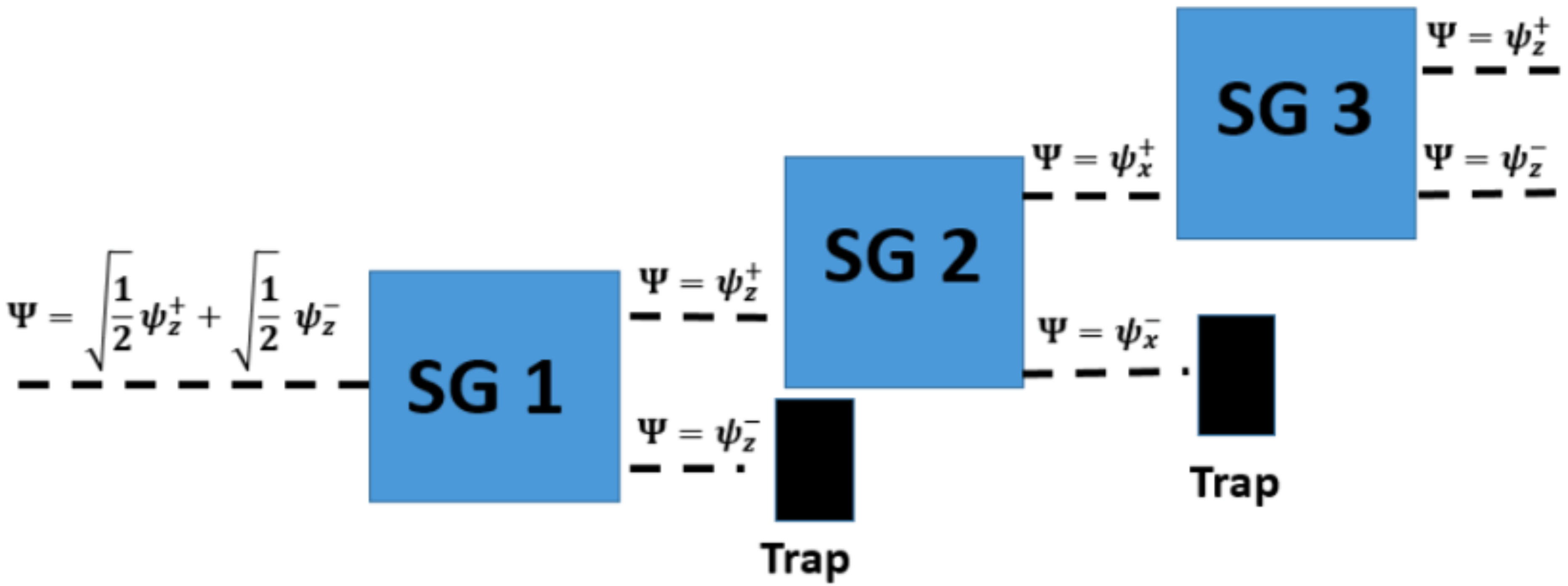


Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Sabendo que a partícula esteve no estado $|\uparrow\rangle$,
que depois esteve no estado $|x_+\rangle$
qual é o resultado de nova medida da componente z ?

Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Medidas sequenciais:
uma medida "apaga a memória" da outra !

Medidas alteram o estado

Quando um dos observáveis incompatíveis
é completamente determinado
a incerteza no outro é máxima !!!

(Princípio da incerteza)

W. Heisenberg
(1901 -1976)

?