

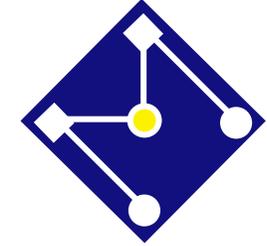


# PMR5026

## Método dos Elementos Finitos Lienar

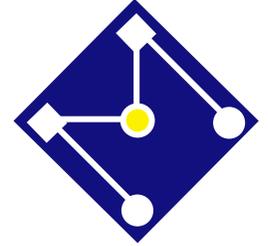
**ELEMENTOS FINITOS  
ISOPARAMÉTRICOS**

Larissa Driemeier



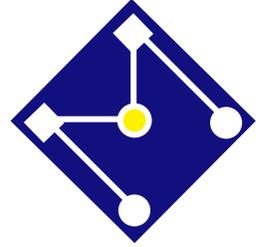
# CRONOGRAMA TEORIA

AULA	CONTEÚDO	DATA [2º]	PROFESSOR
1	Modelagem em engenharia e Mecânica dos Sólidos Introdução ao Método dos Elementos Finitos	17/2	Rafael
2	Elementos finitos 1D – estático Ensaio experimental e modelos de material	02/3	Rafael
3	Elementos finitos 1D - dinâmico	09/3	Marcilio
4	Elementos Finitos de viga - estático	16/3	Marcilio
5	Elementos Finitos de viga - dinâmico	23/3	Marcilio
6	Elementos Finitos de viga - análise modal	30/3	Marcilio
7	Ensaio experimental: vibrações em viga	13/4	Rafael
8	Elementos finitos isoparamétricos – estático	27/4	Larissa
9	Elementos finitos isoparamétricos – Integração numérica	04/05	Larissa
10	Elementos finitos isoparamétricos – dinâmico	11/05	Larissa
11	Ensaio experimental: vibrações em placa	18/05	Rafael



# MATRIZ DE RIGIDEZ

- As deformações do elemento são obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas locais.
- Para obter a matriz de rigidez de um elemento, precisamos da matriz  $B$  de transformação  $u - \varepsilon$ .
- Uma vez que os deslocamentos do elemento são definidos nas coordenadas *naturais*, precisamos do Jacobiano  $J$  para relacionar as derivadas de  $x, y, z$  com as derivadas de  $r, s, t$ .

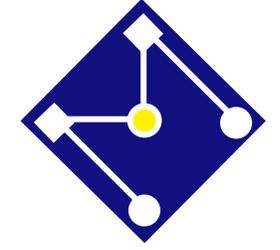


PARA QUALQUER DIMENSÃO, MATRIZ  $K$ ...

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr ds dt$$

O cálculo da matriz de rigidez e dos vetores de carga requer a avaliação de uma ou mais integrais, dependendo da dimensão da análise solicitada.

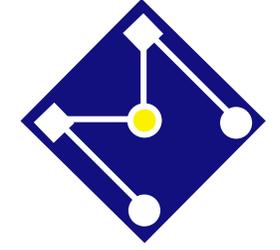


# REGRA DA CADEIA...

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}}_J \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

Operador Jacobiano



# JÁ DEFINIMOS NA ÚLTIMA AULA

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{\varepsilon_x} \\ \phantom{\varepsilon_y} \\ \phantom{\gamma_{xy}} \end{bmatrix}$$

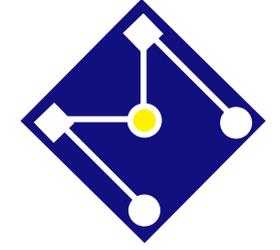
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\phantom{v})}{\partial y} \\ \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial y} & \frac{\partial(\phantom{v})}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Onde:

$$\frac{\partial(\phantom{u})}{\partial x} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial s} \\ \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial r} \frac{\partial(\phantom{v})}{\partial s} - \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial s} \frac{\partial(\phantom{v})}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\phantom{u})}{\partial y} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial r} \\ \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial r} \frac{\partial(\phantom{v})}{\partial r} - \frac{\partial(\phantom{u})}{\partial s} \frac{\partial(\phantom{v})}{\partial s} \end{bmatrix}$$

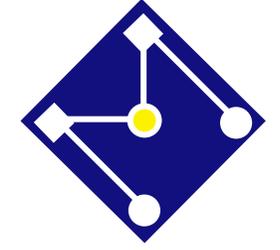


$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\ )}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial y} \\ \frac{\partial(\ )}{\partial y} & \frac{\partial(\ )}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} = \frac{1}{\det(J)} \left[ \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\ )}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\ )}{\partial s} \right]$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial y} = \frac{1}{\det(J)} \left[ \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\ )}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\ )}{\partial r} \right]$$

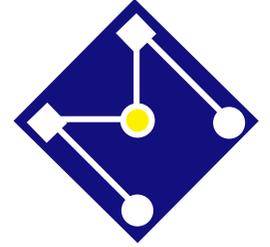
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\ )}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\ )}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\ )}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\ )}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\ )}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\ )}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\ )}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\ )}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$



$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \mathbf{d}$

$$\boldsymbol{\partial} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} \end{bmatrix}$$

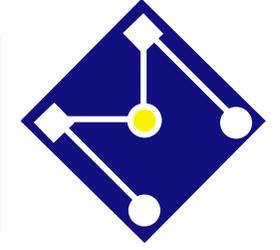
$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N}$   
 $(3 \times 8) \quad (3 \times 2) \quad (2 \times 8)$



# MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

$$\mathbf{k} = \int_A \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \, dx \, dy$$

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \, \det(\mathbf{J}) \, dr \, ds$$



$$x = \frac{1}{4} [(1 - r)(1 - s)x_1 + (1 + s)(1 - s)x_2 + (1 + r)(1 + s)x_3 + (1 - r)(1 + s)x_4]$$



$$\frac{\partial x}{\partial r} = c = \frac{1}{4} (-(1 - s)x_1 + (1 - s)x_2 + (1 + s)x_3 - (1 + s)x_4)$$

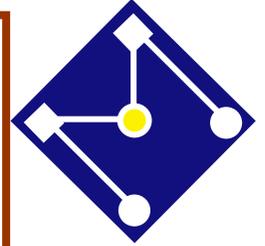
$$\frac{\partial x}{\partial s} = d = \frac{1}{4} (-(1 - r)x_1 - (1 + r)x_2 + (1 + r)x_3 + (1 - r)x_4)$$

$$y = \frac{1}{4} [(1 - r)(1 - s)y_1 + (1 + r)(1 - s)y_2 + (1 + r)(1 + s)y_3 + (1 - r)(1 + s)y_4]$$



$$\frac{\partial y}{\partial r} = b = \frac{1}{4} [-(1 - s)y_1 + (1 - s)y_2 + (1 + s)y_3 - (1 + s)y_4]$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = a = \frac{1}{4} [-(1 - r)y_1 - (1 + r)y_2 + (1 + r)y_3 + (1 - r)y_4]$$



$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(1-r)(1-s)}{4} \\
 N_2 &= \frac{(1+r)(1-s)}{4} \\
 N_3 &= \frac{(1+r)(1+s)}{4} \\
 N_4 &= \frac{(1-r)(1+s)}{4}
 \end{aligned}$$

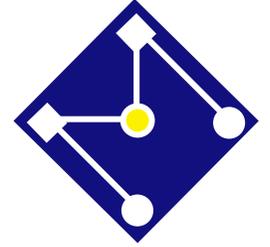
$$\begin{aligned}
 N_{1,r} &= \frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{-1(1-s)}{4} = \frac{(s-1)}{4} & N_{1,s} &= \frac{\partial N_1}{\partial s} = \frac{(1-r)(-1)}{4} = \frac{(r-1)}{4} \\
 N_{2,r} &= \frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{(1)(1-s)}{4} = \frac{(1-s)}{4} & N_{2,s} &= \frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{(1+r)(-1)}{4} = \frac{-(r+1)}{4} \\
 N_{3,r} &= \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{(1)(1+s)}{4} = \frac{(1+s)}{4} & N_{3,s} &= \frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{(1+r)(1)}{4} = \frac{(r+1)}{4} \\
 N_{4,r} &= \frac{\partial N_4}{\partial r} = \frac{(-1)(1+s)}{4} = \frac{-(1+s)}{4} & N_{4,s} &= \frac{\partial N_4}{\partial s} = \frac{(1-r)(1)}{4} = \frac{(1-r)}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial} \mathbf{N} \\
 (3 \times 8) & \quad (3 \times 2) \quad (2 \times 8)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} & & & 0 \\ & 0 & \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} & \\ \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\quad)}{\partial s} & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$





# POR QUE NÃO RESOLVER ANALÍTICAMENTE A INTEGRAL?

Solução analítica nem sempre viável;

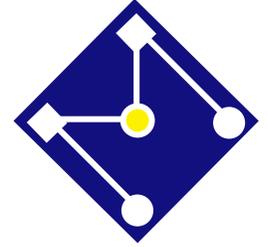
A solução analítica é onerosa computacionalmente;

Nenhuma garantia de que os problemas numéricos sejam removidos;

Por exemplo, divisão por zero, erros de precisão...

Pós-processamento requer avaliação numérica de quantidades.

**A solução numérica de uma integral é chamada de quadratura.**



# SOLUÇÃO APROXIMADA

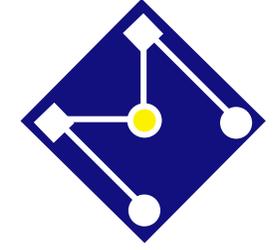
$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \sum_{i=1}^p w_i f(r_i)$$

Peso

Valor da função no  
ponto  $i$  de  
integração

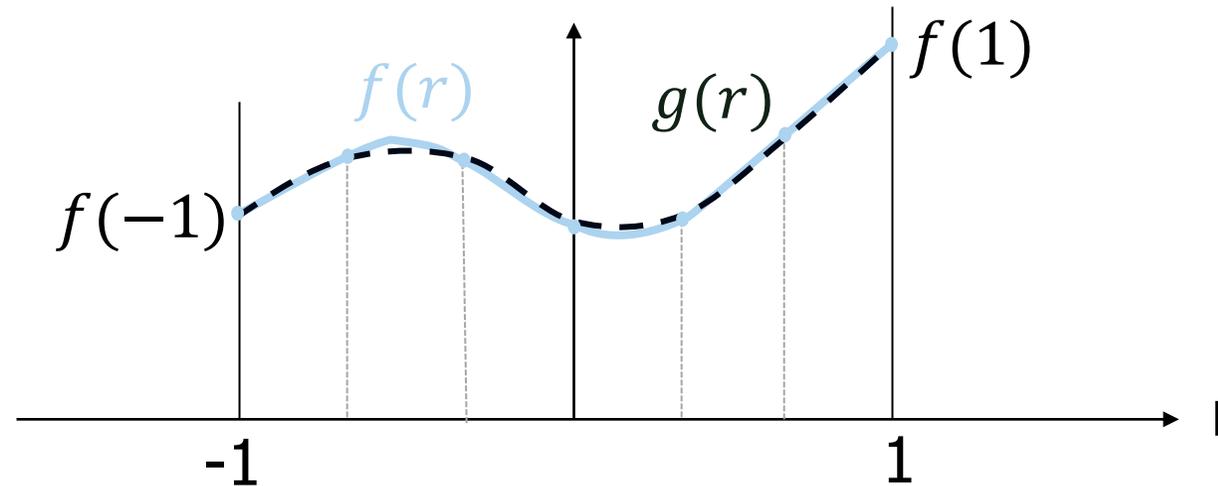
Os métodos se resumem em encontrar os valores dos pesos  $w_i$  e das coordenadas dos chamados pontos de integração  $r_i$

- Há dois métodos bastante empregados para calcular a quadratura de uma função que são chamadas regras de Newton-Cotes:
  - Regra trapezoidal
  - Regra de Simpson
- Método de Gauss é o mais usado em Elementos Finitos

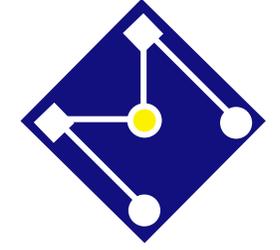


# NEWTON-COTES

- De maneira geral...
  - Divide o intervalo  $(-1,1)$  em  $P$  pontos de integração ( $P - 1$  intervalos igualmente espaçados);
  - Passe um polinômio de grau  $P - 1$  através dos  $P$  pontos (nesses pontos  $g(r_i) = f(r_i)$ );
  - Os pesos são otimizados.



Sempre válido que com ' $P$ ' pontos pode-se integrar um polinômio de grau ' $P - 1$ ' de forma exata!



# FUNÇÕES DE FORMA DEPENDEM DE $r$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n f(r_i) l_i(r) dr$$

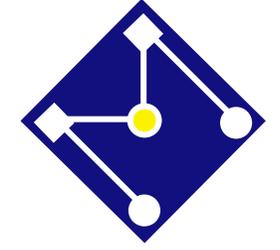
Onde  $l_i$  dado pela formula de Lagrange ( $m = P - 1$ )

$$l_i^{(m)}(r) = \frac{(r - r_0)(r - r_1) \dots (r - r_{i-1})(r - r_{i+1}) \dots (r - r_m)}{(r_i - r_0)(r_i - r_1) \dots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \dots (r_i - r_m)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \frac{(r - r_j)}{(r_i - r_j)}$$

$$\int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n f(r_i) l_i(r) dr = \sum_{i=1}^n f(r_i) \int_{-1}^1 l_i(r) dr$$

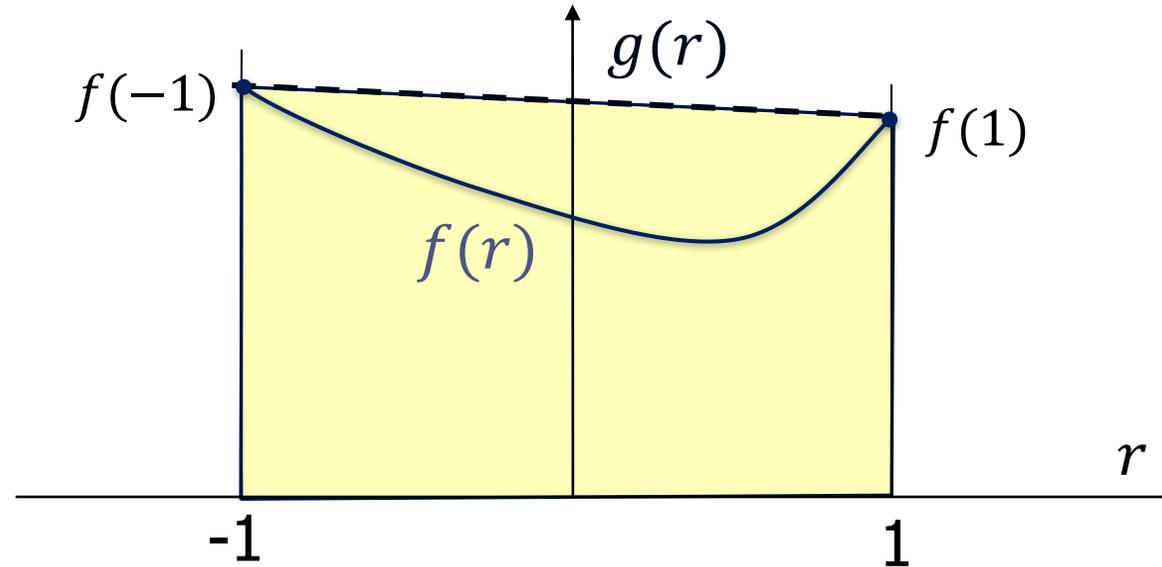
$w_i$

Note que os pesos não dependem da função  $f$ !



# REGRA TRAPEZOIDAL

Aproximamos a função  $f(r)$  por uma linha  $g(r)$  que passa nos pontos extremos  $- f(-1)$  e  $f(1)$  – e integramos a linha

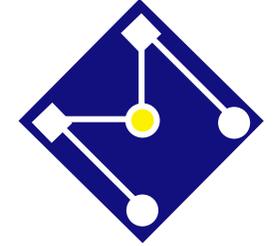


$$g(r) = \frac{1-r}{2} f(-1) + \frac{1+r}{2} f(1)$$

Repare que  $w_i$  coincidem com as funções de forma...

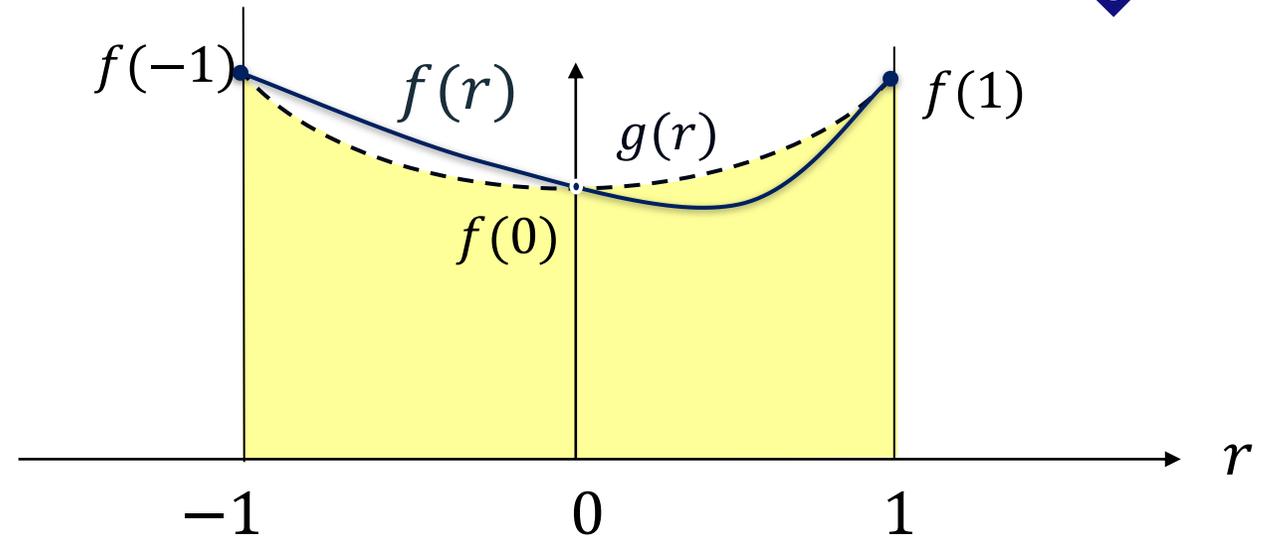
$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = f(1) + f(-1)$$

Funções constantes e lineares são integradas com exatidão



# REGRA 1/3 DE SIMPSON

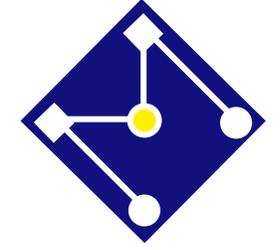
Aproximamos a função  $f(r)$  por uma parábola  $g(r)$  que passa pelos pontos extremos  $f(-1)$  e  $f(1)$  e pelo ponto médio  $f(0)$  e integramos a parábola



$$g(r) = \frac{r(r-1)}{2} f(-1) + (1-r^2) f(0) + \frac{r(1+r)}{2} f(1)$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = \frac{1}{3} f(1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(-1)$$

Funções constantes, lineares e parabólicas são integradas com exatidão



# EXEMPLO

**Regra Trapezoidal:  
P=2**

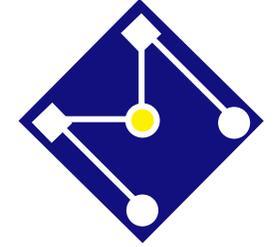
$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = f(1) + f(-1)$$

$w_1 = 1$      $r_1 = -1$     Correto para polinômios até grau 1 (= P - 1)  
 $w_2 = 1$      $r_2 = 1$

**Regra 1/3 de Simpson:  
P=3**

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \int_{-1}^1 g(r) dr = \frac{1}{3}f(1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(-1)$$

$w_1 = 1/3$      $r_1 = -1$     Correto para polinômios até grau 2 (= P - 1)  
 $w_2 = 4/3$      $r_2 = 0$   
 $w_3 = 1/3$      $r_3 = 1$



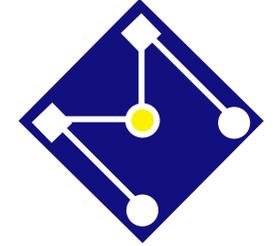
# GAUSS

Com ‘ $P$ ’ pontos de integração, podemos integrar um polinômio de grau  $2P - 1$  de forma exata **usando a integração por Gauss!!!**

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \sum_{i=1}^p w_i f(r_i)$$

peso                      Ponto de integração





# INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR GAUSS

- Na prática, as  $\int_{-1}^1 f(r)dr$   $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s)dr ds$   $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s,t)dr ds dt$

são resolvidas numericamente usando:

$$\int_{-1}^1 f(r)dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) + R_1$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s)dr ds = \sum_{i,j=1}^p w_{ij} f(r_i, s_j) + R_2$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s,t)dr ds dt = \sum_{i,j,k=1}^p w_{ijk} f(r_i, s_j, t_k) + R_3$$

$p$  é o número de termos do meu somatório... Ou seja,  $p$  é o número de pontos de integração ou número de pontos de Gauss!

onde  $w_i$ ,  $w_{ij}$  e  $w_{ijk}$  são funções peso e  $r_i$ ,  $s_j$ ,  $t_k$  são pontos específicos das coordenadas  $i$ ,  $j$ ,  $k$ .  $f(r_i)$ ,  $f(r_i, s_j)$  e  $f(r_i, s_j, t_k)$  são os valores da função  $f$  avaliadas em pontos específicos.



# QUADRATURA DE GAUSS (GAUSS LEGENDRE)

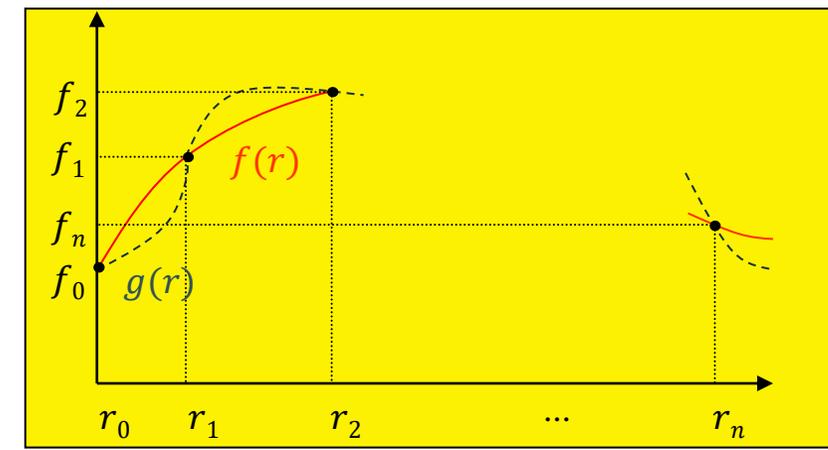
$r_i$ : pontos de amostragem  
 $w_i$ : pesos

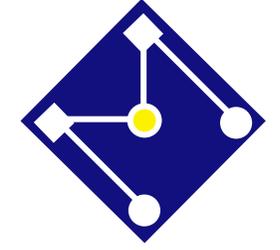
Essas são as variáveis do problema – determinar os valores para que a somatória forneça a integral exata do polinômio

Caso unidimensional

$$f(r) \cong g(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_n r^n$$

$n$  é o grau do meu polinômio





$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx \sum_{i=1}^p w_i f(r_i)$$

↗ peso                      ↖ Ponto de integração

Como podemos escolher os pontos de integração e pesos de modo que possamos integrar exatamente um polinômio de ordem  $2P - 1$ ?

Lembre-se: a priori não sabemos a posição dos pontos...

$$f(r) \cong g(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(r) dr &= \int_{-1}^1 a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n dr \\ &= 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}] \end{aligned}$$



$$\int f(r)dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_p f(r_p)$$

$$f(r) \cong g(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n$$

$$\therefore f(r_1) \approx a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \dots + a_n r_1^n$$

$$\int_{-1}^1 f(r)dr = \int_{-1}^1 a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n dr$$

$$= 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

Portanto:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_p = 2$$

$$w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_p r_p = 0$$

$$\vdots$$

$$w_1 r_1^n + w_2 r_2^n + \dots + w_p r_p^n = \frac{1}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

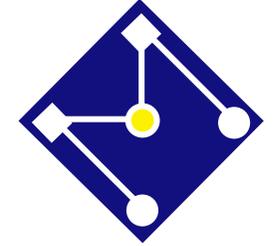
Grau do polinômio

O sistema possui  $(n+1)$  equações e  $2(p)$  incógnitas.

Termos do somatório

Portanto, para haver solução:

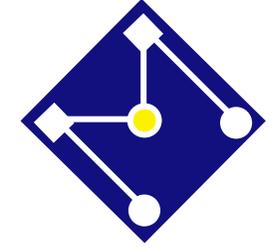
$$n = 2p - 1$$



Número de termos do somatório=Pontos de Gauss ( $p$ )	Máximo grau do polinômio integrado exatamente ( $n$ )
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

$$n = 2p - 1$$

São necessários pelo menos  $(n + 1)/2$  termos no somatório para que ele represente a integral exata de um polinômio de grau  $n$ .



# EXEMPLO

Encontrar os pontos de amostragem e pesos para QG de 1 e 2 pontos.

## P=1 (1 Ponto de Gauss):

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1)$$

$$f(r) = a_0 + a_1 r$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 = w_1(a_0 + a_1 r_1)$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 = a_0 w_1 + a_1 w_1 r_1$$

$$\therefore 2a_0 = a_0 w_1 + a_1 w_1 r_1$$

$$\begin{aligned} w_1 &= 2 \\ w_1 r_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$w_1 = 2; r_1 = 0$$

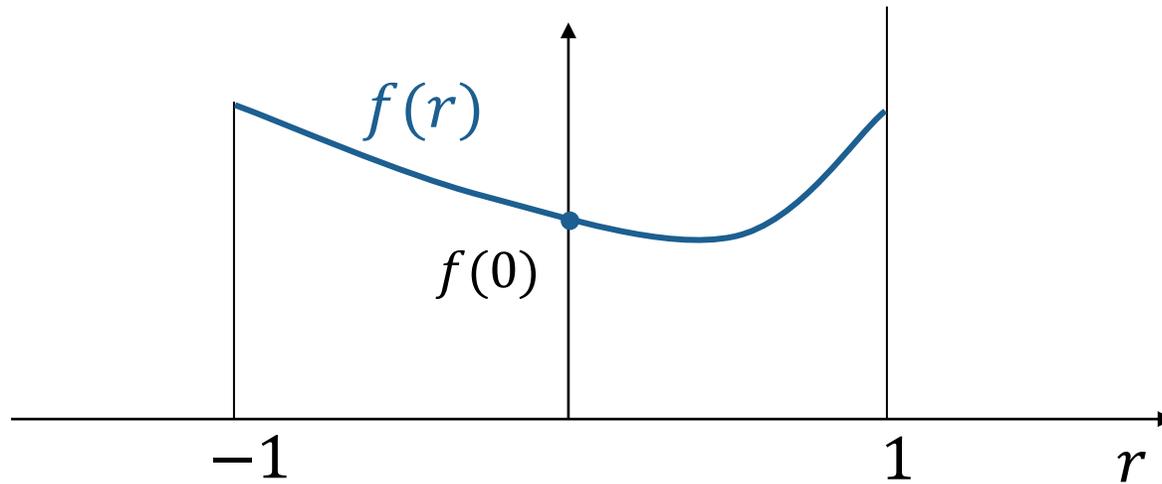
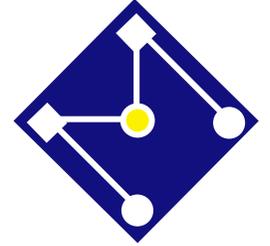
## Resumo

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_p f(r_p)$$

$$f(r_i) \approx g(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n$$

$$n = 2p - 1$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

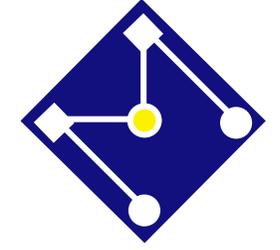


1 Ponto de Gauss = Regra do ponto médio:

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx 2f(0)$$

Apenas um valor de  $f(r)$  é necessário.  
Eficaz para constantes e polinômios lineares.

Compare com regra Trapezoidal...



**P=2 (2 Pontos de Gauss):**

**Resumo**

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2)$$

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^p w_i f(r_i) = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_p f(r_p)$$

$$f(r_i) \approx g(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \dots + a_n r_i^n$$

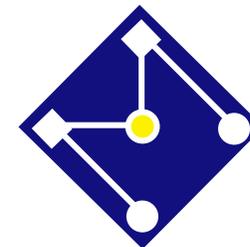
$n = 2p - 1$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 = w_1(a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + a_3 r_1^3) + w_2(a_0 + a_1 r_2 + a_2 r_2^2 + a_3 r_2^3)$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2 \\ w_1 r_1 + w_2 r_2 &= 0 \\ w_1 r_1^2 + w_2 r_2^2 &= \frac{2}{3} \\ w_1 r_1^3 + w_2 r_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2 = 1 \\ \therefore r_2 &= -r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



# TEORIA MATEMÁTICA

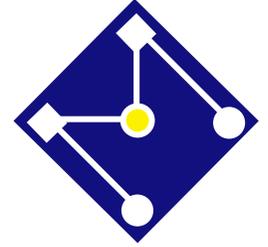
Pode-se provar usando a teoria dos polinômios ortogonais que, no intervalo de integração  $[-1, 1]$ , para atingir o grau máximo de exatidão  $2n - 1$  com  $n$  pontos, devemos escolher  $r_1, r_2, \dots, r_n$  como as raízes (zeros) do polinômio de Legendre grau  $P_n(r)$ .

$$P_{k+1}(r) = \frac{2k + 1}{k + 1} r P_k(r) - \frac{k}{k + 1} P_{k-1}(r), \quad P_0(r) = 1, \quad P_1(r) = r,$$

Os pesos são calculados da mesma maneira que com Newton-Cotes:

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(r) dr \quad i = 1, 2, \dots, p$$

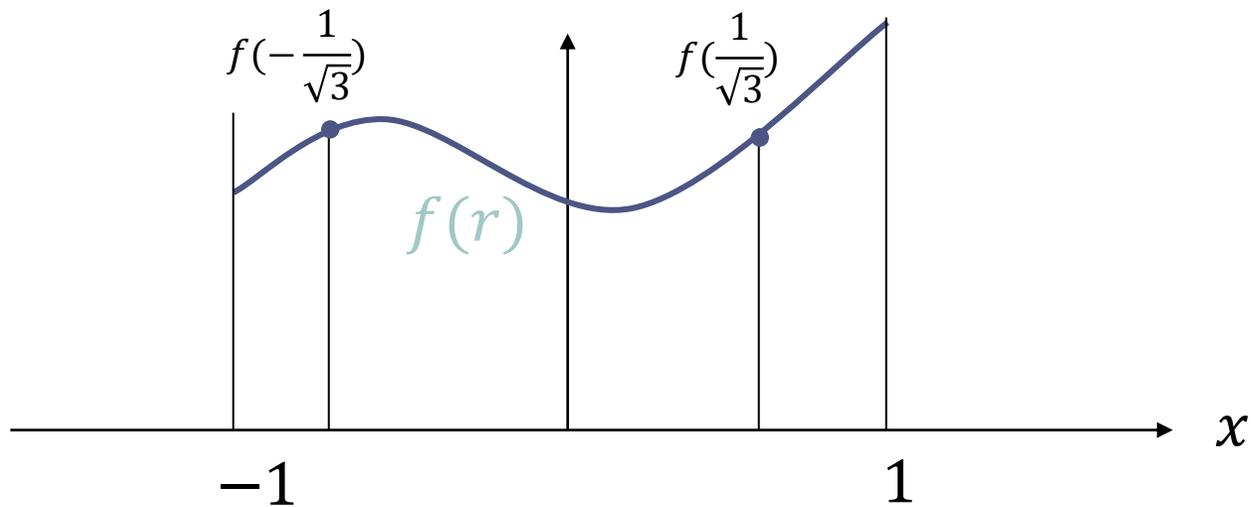
$$l_i^{(p)}(r) = \frac{(r - r_0)(r - r_1) \dots (r - r_{i-1})(r - r_{i+1}) \dots (r - r_p)}{(r_i - r_0)(r_i - r_1) \dots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \dots (r_i - r_p)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^p \frac{(r - r_j)}{(r_i - r_j)}$$



# METODOLOGIA

- Encontre o polinômio de Legendre grau  $P_n(r)$
- Encontre as raízes do polinômio de Legendre grau  $P_n(r)$  em  $(-1; 1)$ , esses serão nossos pontos  $r_1, r_2, \dots, r_n$ 
  - Por exemplo,  $P_2(r) = \frac{3}{2}\left(r^2 - \frac{1}{3}\right)$ ,  $P_3(r) = \frac{5}{2}\left(r^3 - \frac{3}{5}r\right)$ ,  $P_4(r) = \frac{1}{8}(35r^4 - 30r^2 + 3)$
- Encontre o polinômio de Lagrange que interpola o integrando  $f(r)$  em  $r_1, r_2, \dots, r_n$
- Integre o polinômio para determinar os pesos  $w_1, w_2, \dots, w_n$

**Encontre as posições  $r_i$  e pesos  $w_i$  para 2 PG ( $i = 1, 2$ )**

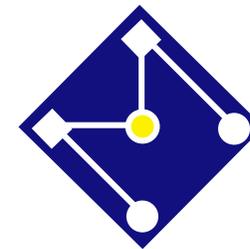


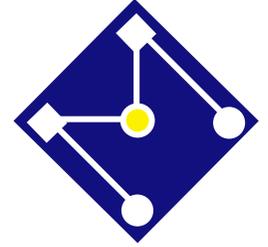
2 Pontos de Gauss :

$$\int_{-1}^1 f(r) dr \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Dois valores de  $f(r)$  são necessários.  
Eficaz para polinômios até ordem 3.

Compare com regra de Simpson...



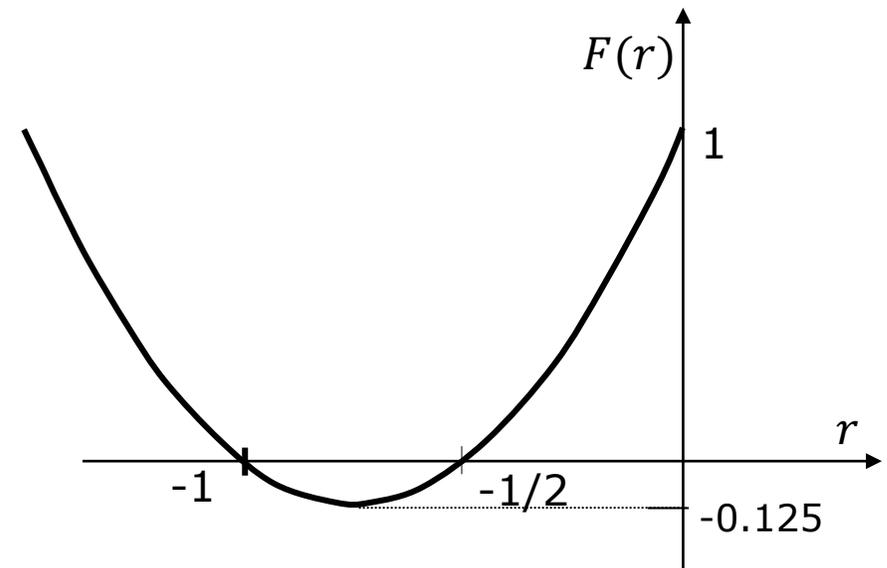


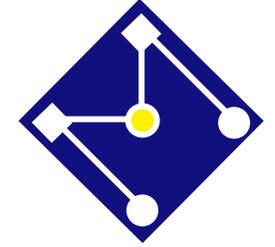
# EXEMPLO:

Calcular numericamente a integral da parábola:

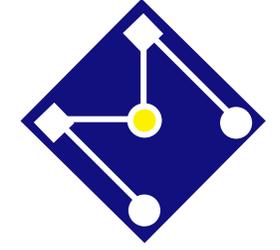
$$\int_{-1}^1 2x^2 + 3x + 1 \, dx = \frac{10}{3} = 3,3333$$

a) Usando 1 ponto de Gauss:



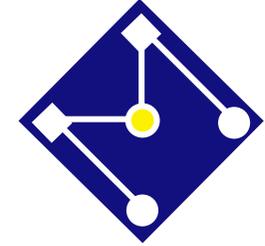


b) Usando 2 pontos de Gauss:

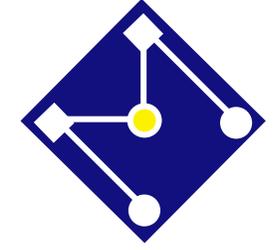


# PONTOS DE GAUSS

$p$	$r_i$	$w_i$
1	0,00000 00000 00000	2,0000000000000000
2	$\pm 0,57735 02691 89626$	1,0000000000000000
3	$\pm 0,77459 66692 41483$	0,5555555555555556
4	0,00000 00000 00000	0,88888 88888 88889
5	$\pm 0,86113 63115 94053$	0,34785 48451 37454
6	$\pm 0,33998 10435 84856$	0,65214 51548 62546
7	$\pm 0,90617 98459 38664$	0,23692 68850 56189
8	$\pm 0,53846 93101 95683$	0,47862 86704 99366
9	0,00000 00000 00000	0,56888 88888 88889
10	$\pm 0,93246 95142 03152$	0,17132 44923 79170
11	$\pm 0,66120 93864 66265$	0,36076 15730 48139
12	$\pm 0,23861 91860 83197$	0,46791 39345 72691



$p$	$\pm r_i$	$\pm s_i$
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	0.86113 63115 94053 0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	0.90617 98459 38664 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
6	0.93246 95142 03152 0.66120 93864 66265 0.23861 91860 83197	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691
7	0.94910 79123 42759 0.74153 11855 99394 0.40584 51513 77397 0.00000 00000 00000	0.12948 49661 68870 0.27970 53914 89277 0.38183 00505 05119 0.41795 91836 73469
8	0.96028 98564 97536 0.79666 64774 13627 0.52553 24099 16329 0.18343 46424 95650	0.10122 85362 90376 0.22238 10344 53374 0.31370 66458 77887 0.36268 37833 78362
9	0.96816 02395 07626 0.83603 11073 26636 0.61337 14327 00590 0.32425 34234 03809 0.00000 00000 00000	0.08127 43883 61574 0.18064 81606 94857 0.26061 06964 02935 0.31234 70770 40003 0.33023 93550 01260
10	0.97390 65285 17172 0.86506 33666 88985 0.67940 95682 99024 0.43339 53941 29247 0.14887 43389 81631	0.06667 13443 08688 0.14945 13491 50581 0.21908 63625 15982 0.26926 67193 09996 0.29552 42247 14753



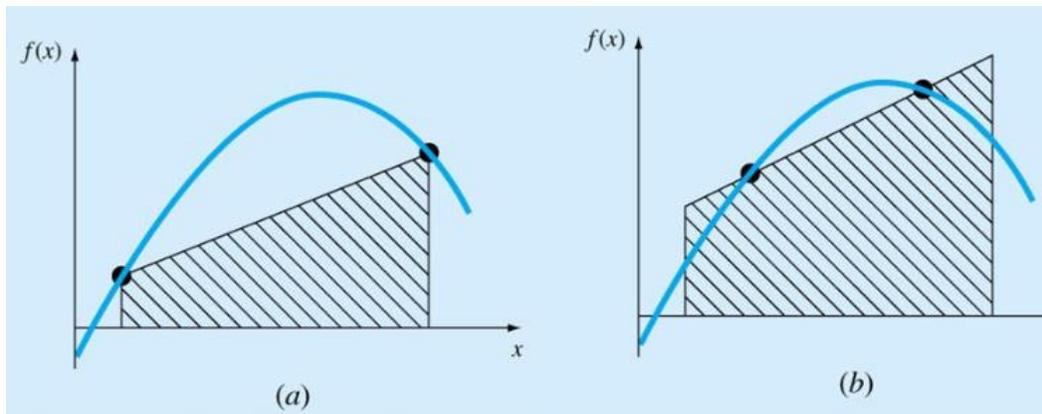
# NEWTON COTES VS GAUSS

## Newton-Cotes

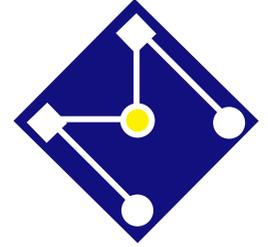
1. 'p' pontos de integração são necessários para integrar de forma exata um polinômio de grau 'p - 1'
2. Maior custo computacional

## Quadratura de Gauss

1. 'p' pontos de integração são necessários para integrar de forma exata um polinômio de grau '2p - 1'
2. Menor custo computacional
3. Convergência exponencial, erro proporcional a



$$\left(\frac{1}{2p}\right)^{2p}$$



# TAREFA...

$$I = \int_{-1}^1 f(r) \, dr \quad \text{onde } f(r) = r^3 + r^2$$

## Integração exata

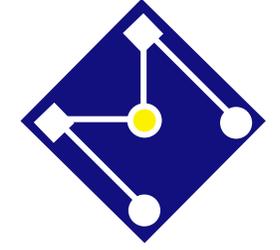
$$I = \frac{2}{3} \quad \text{Integre e confira...}$$

## Newton-Cotes

Para integrar exatamente eu preciso de 4 pontos. Porque?

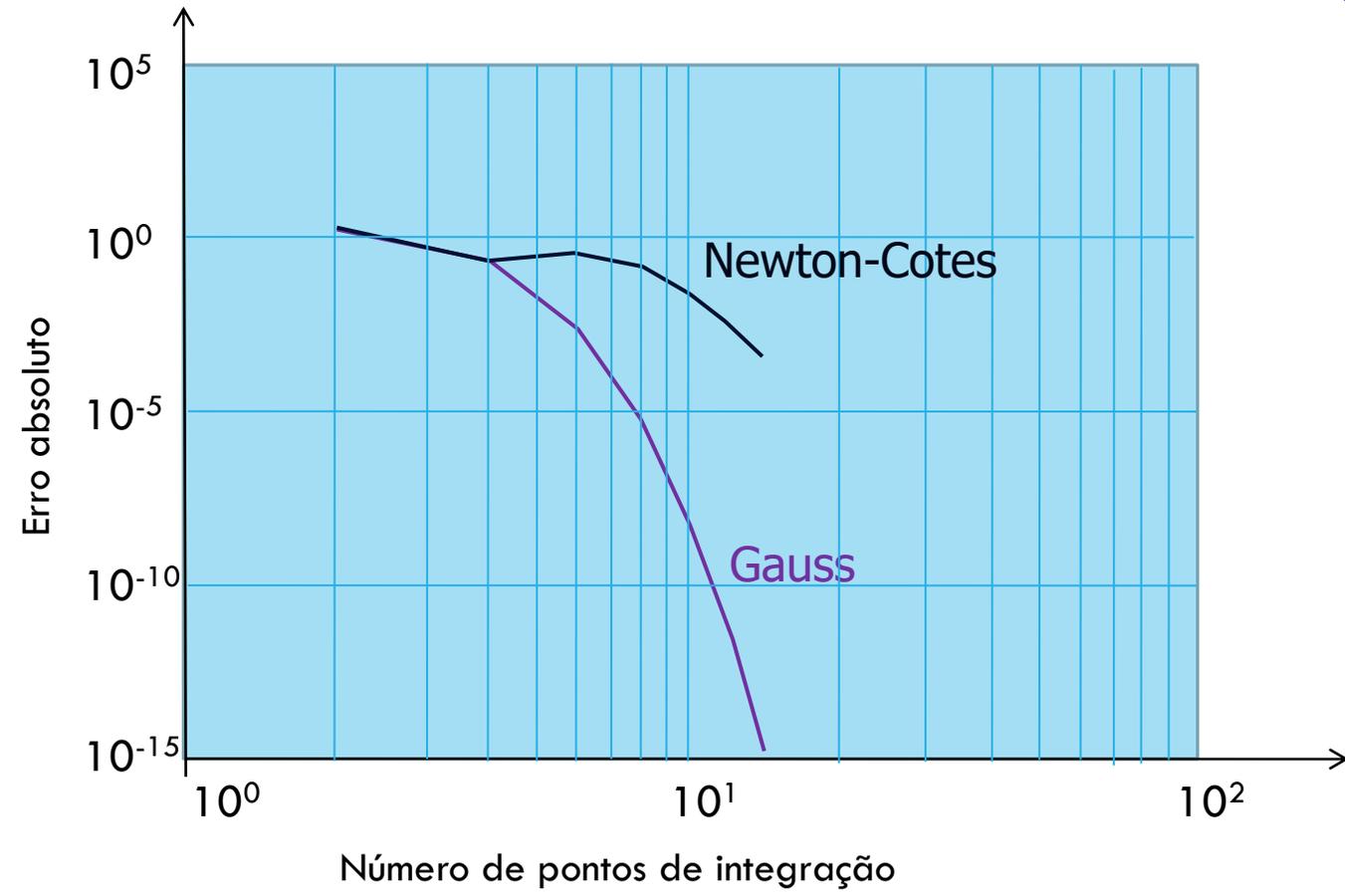
## Gauss

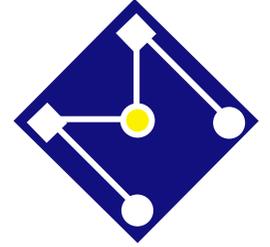
Para integrar exatamente eu preciso de 2 pontos de Gauss. Porque?



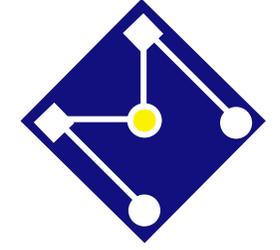
# ERRO

$$\int_{-1}^1 \cos(2\pi x) dx$$





# Em **MEF SEMPRE** usamos **Quadratura de Gauss**



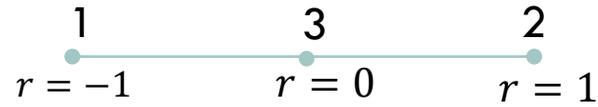
# ELEMENTO QUADRÁTICO

Funções de forma

$$N_1(r) = -\frac{r(1-r)}{2}$$

$$N_2(r) = \frac{r(1+r)}{2}$$

$$N_3(r) = 1 - r^2$$



**Matriz de rigidez**

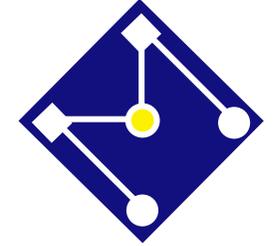
$$\mathbf{k} = \int_{x_1}^{x_2} E \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \int_{-1}^1 E \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{B} J dr$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{J} \left[ \frac{1}{2}(2r-1) \quad \frac{1}{2}(2r+1) \quad -2r \right]$$

**Vetor de carregamentos nodais**

$$\mathbf{f}_b = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b J dr$$

Como programar estas integrais????



Supondo  $L = 2$  (nó no centro da barra)...

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 EAB^T \mathbf{B} dr = \frac{AE}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (2r - 1)^2 & (4r^2 - 1) & -4r(2r - 1) \\ (2r + 1)^2 & -4r(2r + 1) \\ 16r^2 \end{bmatrix} dr$$

Precisamos de **2 pontos de Gauss** para integração exata:

$$\int_{-1}^1 (2r - 1)^2 dr = [(-2/\sqrt{3} - 1)^2 + (2/\sqrt{3} - 1)^2] = 14/3$$

$$\int_{-1}^1 (2r + 1)^2 dr = [(-2/\sqrt{3} + 1)^2 + (2/\sqrt{3} + 1)^2] = 14/3$$

$$\int_{-1}^1 (-8r^2 + 4r) dr = \left\{ [-8(-1/\sqrt{3})^2 + 4(-1/\sqrt{3})] + [-8(1/\sqrt{3})^2 + 4(1/\sqrt{3})] \right\} = -16/3$$

$$\int_{-1}^1 (-8r^2 - 4r) dr = \left\{ [-8(-1/\sqrt{3})^2 - 4(-1/\sqrt{3})] + [-8(1/\sqrt{3})^2 - 4(1/\sqrt{3})] \right\} = -16/3$$

$$\int_{-1}^1 (4r^2 - 1) dr = \left\{ [4(-1/\sqrt{3})^2 - 1] + [4(1/\sqrt{3})^2 - 1] \right\} = 2/3$$

$$\int_{-1}^1 16r^2 dr = 16(-1/\sqrt{3})^2 + 16(1/\sqrt{3})^2 = 32/3$$

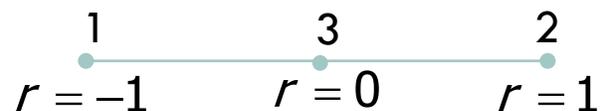
$$\mathbf{k} = \frac{AE}{3L^2} \begin{bmatrix} 14 & 2 & -16 \\ 14 & -16 \\ 32 \end{bmatrix}$$



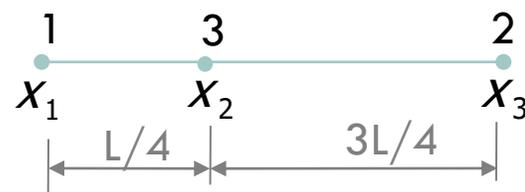
# EXERCÍCIO: CALCULAR A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA 1 PG

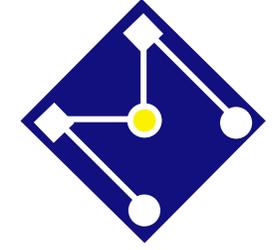
BATHE, PG. 370

## Espaço natural

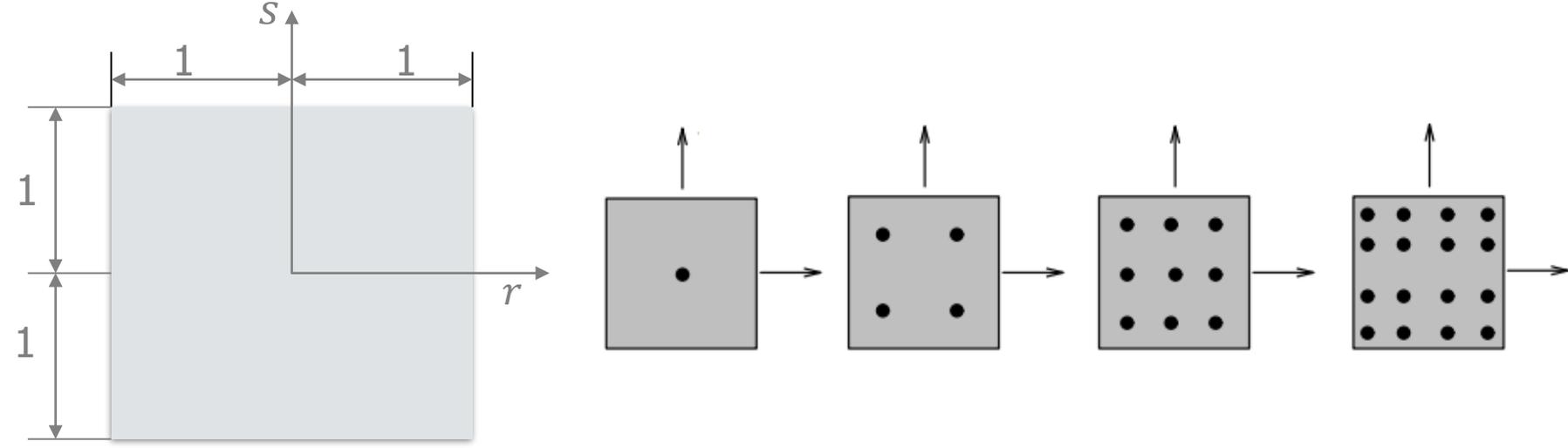


## Espaço físico





# PROBLEMA BIDIMENSIONAL



$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds$$

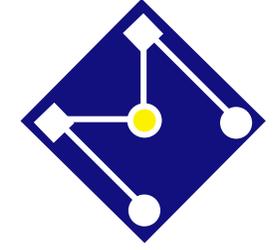
$P_2$  Pontos de Gauss 1D para integrar ao longo de  $s$

$$\approx \int_{-1}^1 \sum_{j=2}^{P_2} w_j f(r, s_j) dr$$

$P_1$  Pontos de Gauss 1D para integrar ao longo de  $r$

$$= \sum_{i=1}^{P_1} \sum_{j=2}^{P_2} w_i w_j f(r_i, s_j) = \sum_{i=1}^{P_1} \sum_{j=2}^{P_2} w_{ij} f(r_i, s_j) \text{ , onde } w_{ij} = w_i w_j$$

**Recomenda-se**  
 $P_1 = P_2 = P$

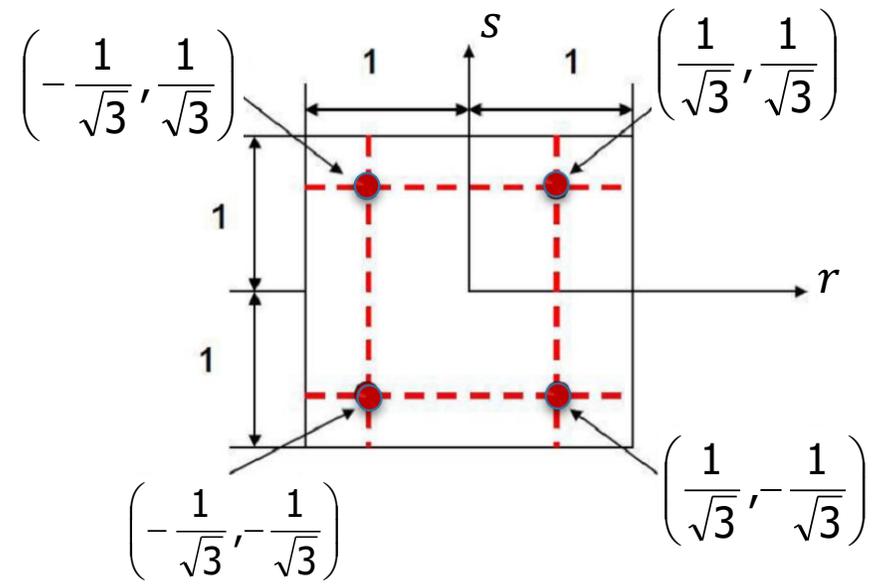


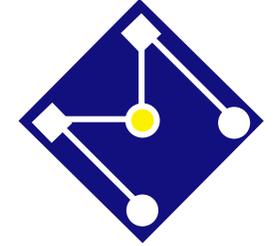
2x2 Pontos de Gauss:  $P_1 = P_2 = 2$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(rs) dr ds \approx$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij} f(r_i, s_j) \quad w_{ij} = w_i w_j = 1, \quad \forall i, j$$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



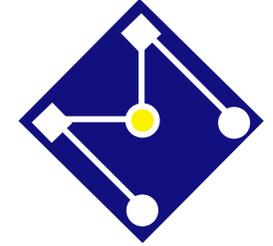


# QUANTOS PONTOS DE GAUSS USAR?

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds \approx \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P w_{ij} f(r_i, s_j)$$

- Use  $P^2$  pontos de integração em um grid ( $P \times P$ ) dentro do elemento e a solução será **EXATA** para um polinômio de grau  $(2P - 1)$ .
- Para isso, iguala-se  $(2P - 1)$  ao grau  $m$  mais elevado presente na função.

**$P^2$  pontos de Gauss dá solução exata para um polinômio completo de grau mais elevado  $(2P - 1)$**



# EXEMPLOS

Se  $f(r, s) = 1$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) \, dr \, ds = 4$$

**1-ponto** é suficiente

$$2P - 1 = 0$$

$$P = 1/2$$

Se  $f(r, s) = r$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) \, dr \, ds = 0$$

**1-ponto** é suficiente

$$2P - 1 = 1$$

$$P = 1$$

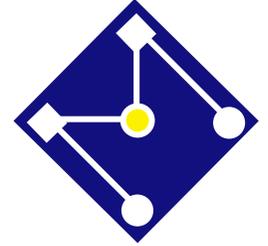
Se  $f(r, s) = r^2 s^2$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) \, dr \, ds = \frac{4}{9}$$

**2x2-pontos** são suficientes

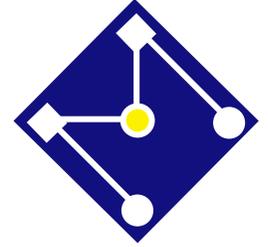
$$2P - 1 = 2$$

$$P = 3/2$$



# INTEGRAÇÃO “REDUZIDA” X “COMPLETA”

- **Integração completa:** Esquema de quadratura de Gauss é suficiente para resultar na integral exata de todos os termos da matriz de rigidez se o elemento não é geometricamente distorcido.
- **Integração reduzida:** Esquema de quadratura de Gauss é de ordem inferior àquela requerida para “integração completa”.

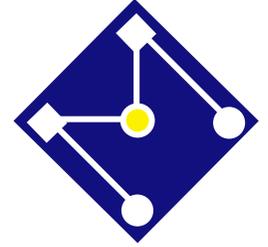


# NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO

- Integração numérica é mais simples que a analítica, porém não é exata. A matriz de rigidez  $K$  é integrada de modo aproximado, independente do número de pontos de integração.
  - Devemos usar menos pontos de integração para uma análise mais rápida...
  - Ou mais pontos de integração para resultados mais precisos...

Hmm....



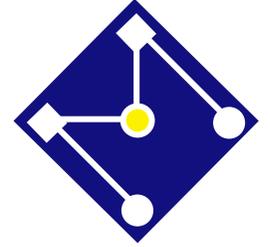


# CONSIDERAÇÕES...

- **Choosing the number of integration points:** There are two considerations. If too many integration points are used, time is wasted without gaining any accuracy. If too few integration points are used, the stiffness matrix may be singular, or else the rate of convergence to the exact solution with mesh refinement will be reduced.

Applied Mechanics of Solids, Allan F. Bower, Chapter 8: Theory and Implementation of the Finite Element Method

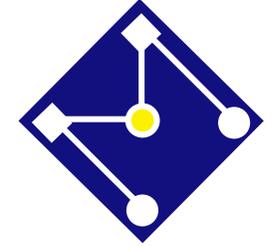
[http://solidmechanics.org/text/Chapter8\\_1/Chapter8\\_1.htm](http://solidmechanics.org/text/Chapter8_1/Chapter8_1.htm)



# QUE ORDEM DE QG USAR PARA INTEGRAÇÃO COMPLETA????

Para computar a matriz de rigidez precisamos resolver a seguinte integral,

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) \, t \, dr \, ds$$



# CONVERGÊNCIA E VELOCIDADE DE CONVERGÊNCIA

Mínima ordem de quadratura necessária para permitir convergência do modelo:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varepsilon^T D \varepsilon \det(J) \, t \, dr \, ds = cte \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(J) \, t \, dr \, ds$$

Para elemento bi-linear,  $\det(\mathbf{J})$  é linear – 1PG  
 Para elemento quadrático,  $\det(\mathbf{J})$  tem potências cúbicas – 2x2PG

A ordem de quadratura necessária para manter a velocidade de convergência que seria obtida por integração completa (avaliando o erro na energia):

$$\frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon$$

Isto é, avaliar como integrar exatamente o polinômio contido em  $B^T D B \dots$

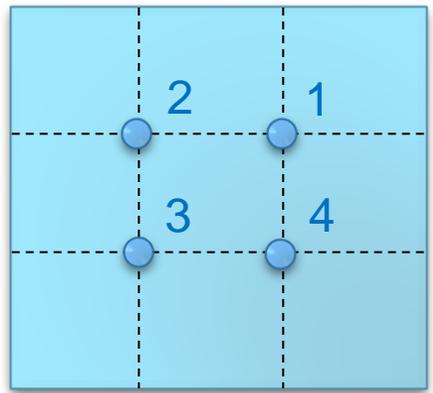


# ELEMENTO QUADRANGULAR DE 4 NÓS

$$N_i \sim \begin{matrix} 1 \\ r & s \\ rs \end{matrix} \quad \mathbf{B} \sim \begin{matrix} 1 \\ r & s \end{matrix} \quad \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \sim \begin{matrix} 1 & & \\ r & s & \\ r^2 & rs & s^2 \end{matrix}$$

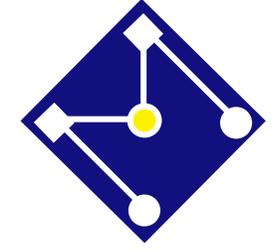
Portanto,  $2P - 1 = 2$   
 $P = 3/2$

Precisamos, pelo menos de um esquema **2x2**

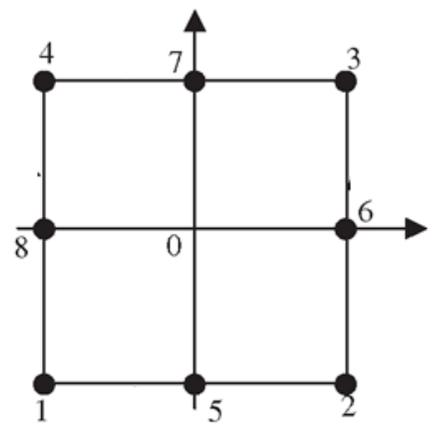


PG	r	s	w
1	1/√3	1/√3	1
2	-1/√3	1/√3	1
3	-1/√3	-1/√3	1
4	1/√3	-1/√3	1

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{ij} f(r_i, s_j) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



# ELEMENTO SERENDIPITY DE 8 NÓS



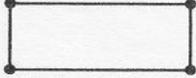
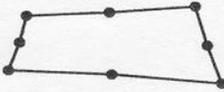
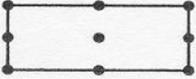
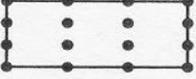
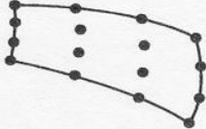
$$\begin{array}{c}
 N_i \quad 1 \\
 \quad s \quad t \\
 \quad s^2 \quad st \quad t^2 \\
 \quad s^2t \quad st^2
 \end{array}
 \quad | \quad
 \begin{array}{c}
 \mathbf{B} \quad 1 \\
 \quad s \quad t \\
 \quad s^2 \quad st \quad t^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad 1 \\
 \quad s \quad t \\
 \quad s^2 \quad st \quad t^2 \\
 \quad s^3 \quad s^2t \quad st^2 \quad t^3 \\
 \quad s^4 \quad s^3t \quad s^2t^2 \quad st^3 \quad t^4
 \end{array}$$

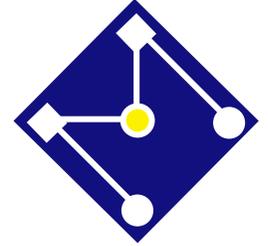
$2P-1=4$   
 $P=5/2$

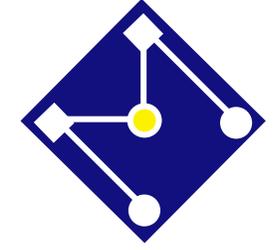
Precisamos, pelo menos de um esquema 3x3

**TABLE 5.9** Recommended full Gauss numerical integration orders for the evaluation of isoparametric displacement-based element matrices (use of Table 5.7)

	Two-dimensional elements (plane stress, plane strain and axisymmetric conditions)	Integration order
4-node		$2 \times 2$
4-node distorted		$2 \times 2$
8-node		$3 \times 3$
8-node distorted		$3 \times 3$
9-node		$3 \times 3$
9-node distorted		$3 \times 3$
16-node		$4 \times 4$
16-node distorted		$4 \times 4$

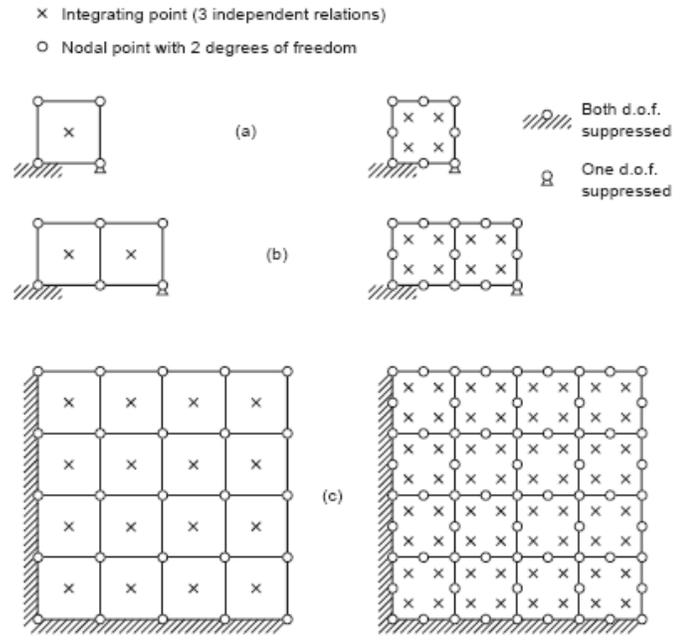
# ORDEM DE INTEGRAÇÃO RECOMENDADA (BATHE)





# INTEGRAÇÃO REDUZIDA PODE LEVAR À SINGULARIDADE DA MATRIZ

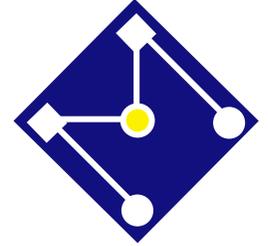
• Com a integração numérica, substitui-se a integral por uma soma ponderada de relações lineares independentes dos parâmetros nodais  $\mathbf{u}$ . Essas relações lineares fornecem as informações a partir das quais a matriz de rigidez é construída. Se o número de variáveis desconhecidas supera o número de relações independentes fornecidas por todos os pontos de integração, então a matriz  $\mathbf{K}$  será singular.



	Linear		Quadratic	
	Degree of freedom	Independent relation	Degree of freedom	Independent relation
(a)	$4 \times 2 - 3 = 5$	$1 \times 3 = 3$ singular	$2 \times 8 - 3 = 13$	$4 \times 3 = 12$ singular
(b)	$8 \times 2 - 3 = 9$	$2 \times 3 = 6$ singular	$13 \times 2 - 3 = 23$	$8 \times 3 = 24$
(c)	$25 \times 2 - 18 = 32$	$16 \times 3 = 48$	$48 \times 2 = 96$	$64 \times 3 = 192$

Fig. 9.14 Check on matrix singularity in two-dimensional elasticity problems (a), (b), and (c).

*The Finite Element Method.*  
**Volume 1 – The Basis**  
 5th Edition – B.H. Ed.  
 O.C. Zienkiewicz; R.L. Taylor



# INTEGRAÇÃO REDUZIDA

- Um modelo FE é geralmente impreciso e, normalmente, seu erro consiste em produzir resultados muito rígidos. Essa rigidez demasiada geralmente é agravada pelo uso de mais pontos de Gauss para integrar matrizes de rigidez do elemento, pois os pontos adicionais captam mais termos de ordem superior em  $K$ .
- Estes termos resistem a alguns modos de deformação que termos de ordem inferior não e, portanto, agem de forma a enrijecer um elemento.
- Por outro lado, o uso de pontos muito poucos pontos de Gauss produz uma situação ainda pior, conhecida como: instabilidade, modos espúrios, modos de energia nula, ou modo de ampulheta (hourglass).
- A instabilidade existe se um ou mais modos de deformação ocorrem com deformação nula em todos os pontos de Gauss. Se os pontos de Gauss não *sentem* a deformação, a  $K$  resultante não terá nenhuma resistência a esse modo de deformação.



# INTEGRAÇÃO REDUZIDA PODE LEVAR A MODOS ESPÚRIOS DE ENERGIA NULA.

A energia de deformação de um elemento

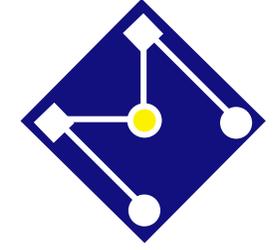
$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

correspondente a um movimento de corpo rígido:

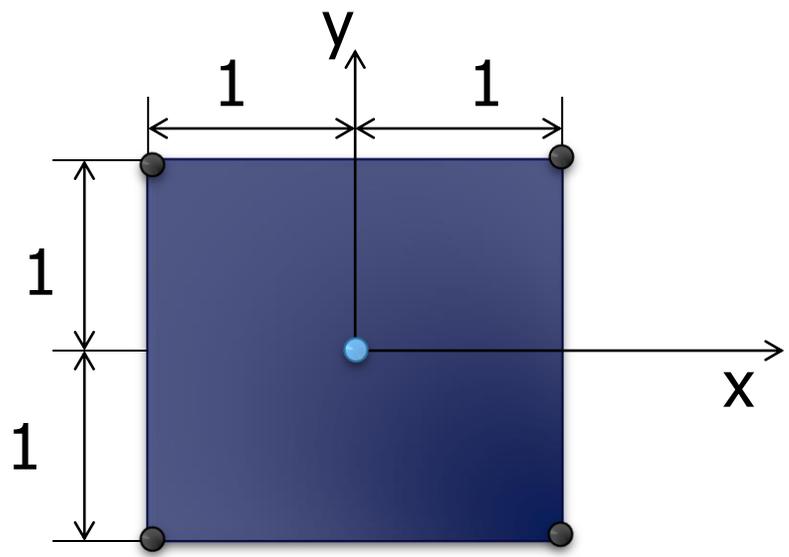
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \rightarrow U = 0$$

Se  $U = 0$  para um modo  $\mathbf{d}$  que é diferente de modo de corpo rígido, então  $\mathbf{d}$  é conhecido como **modo espúrio de energia nula** ou **hourglass**.

Este modo é **indesejável**.



# EXEMPLO: ELEMENTO DE 4 NÓS



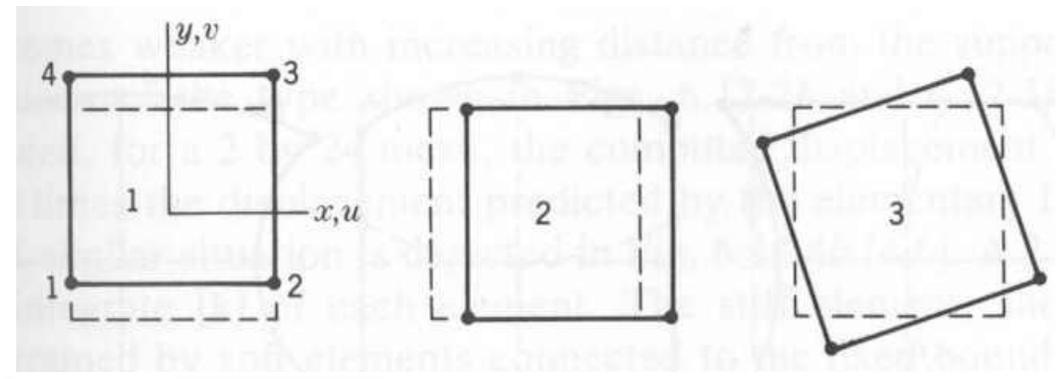
$$U = \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \approx \sum_{i=1}^{NGAUSS} w_i (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})_i$$

**Integração completa:** NGAUSS=4  
 Elemento tem 3 modos de energia nula  
 ou de corpo rígido

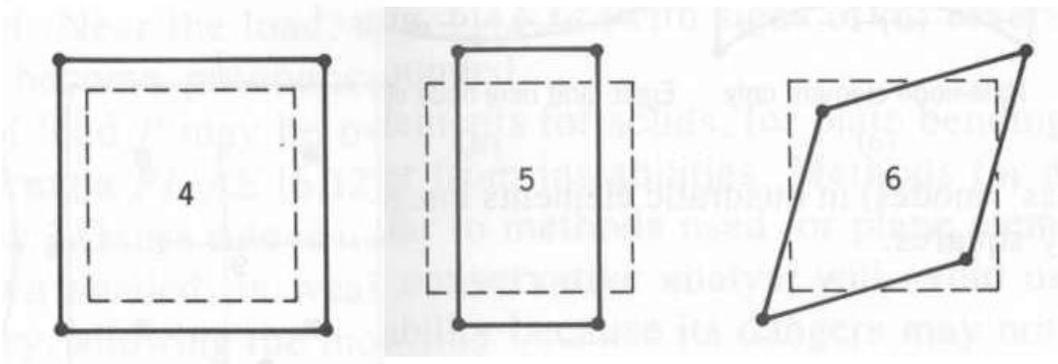
**Integração reduzida:** p.ex.,  
 NGAUSS=1

$$U \approx 4 (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon})_{x=0, y=0}$$

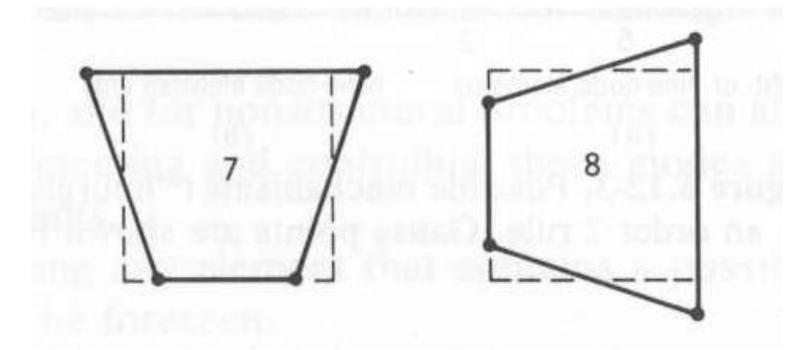
# Modos possíveis de deformação para elemento quadrático bilinear:



Movimentos de corpo rígido:  
Podem ser eliminados com condições de contorno apropriadas.



Modos de deformação constante:  
Sempre produzem energia de deformação não nula.



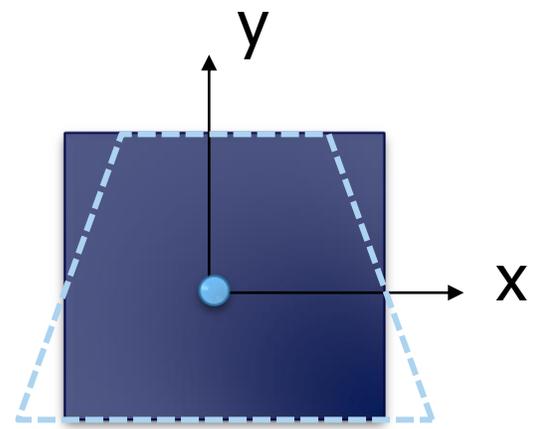
*Modos de flexão:  
Produzem deformação nula na origem.*



# CONSIDERE 2 CAMPOS DE DESLOCAMENTO

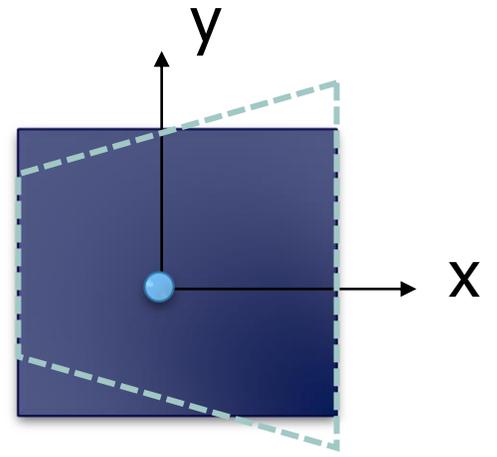
$$u = C xy$$

$$v = 0$$



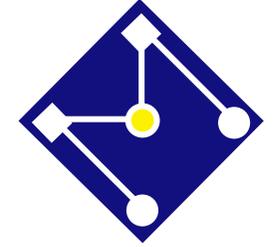
$$u = 0$$

$$v = C xy$$

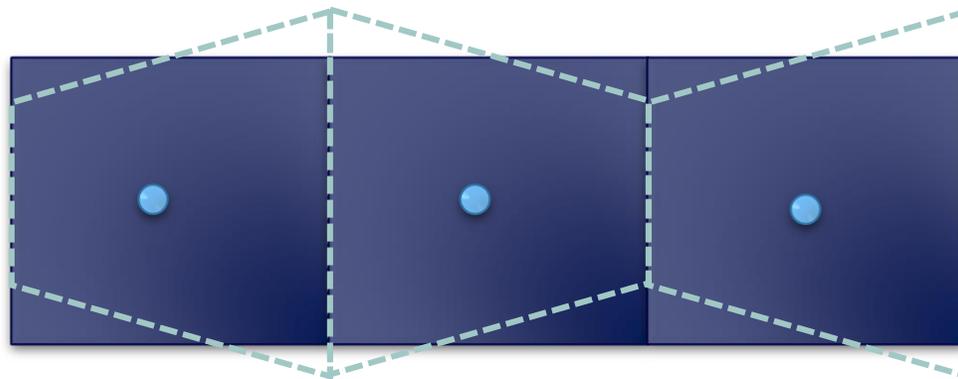
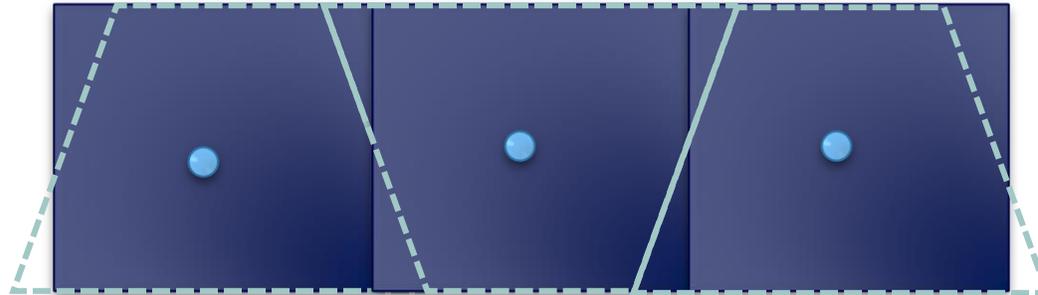


Em  $x = y = 0$      $\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$   
 $\Rightarrow U = 0$

Portanto, temos dois modos de hourglass.

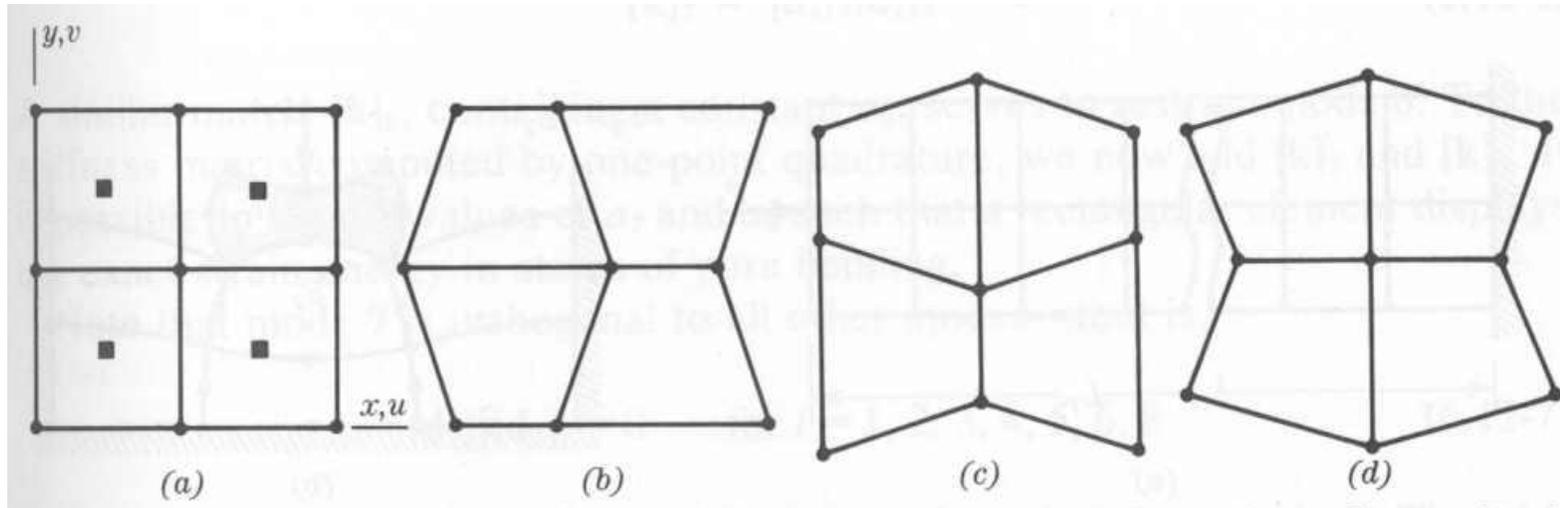


# PROPAGAÇÃO DE MODOS DE HOURGLASS ATRAVÉS DE UMA MALHA





# HOURGLASS



**Fig. 4.6-1.** (a) Undeformed plane 2 by 2 four-node square elements. Gauss points are shown by solid squares. (b,c,d) "Instability" displacement modes. (Reprinted from [2.2] by permission of John Wiley & Sons, Inc.)

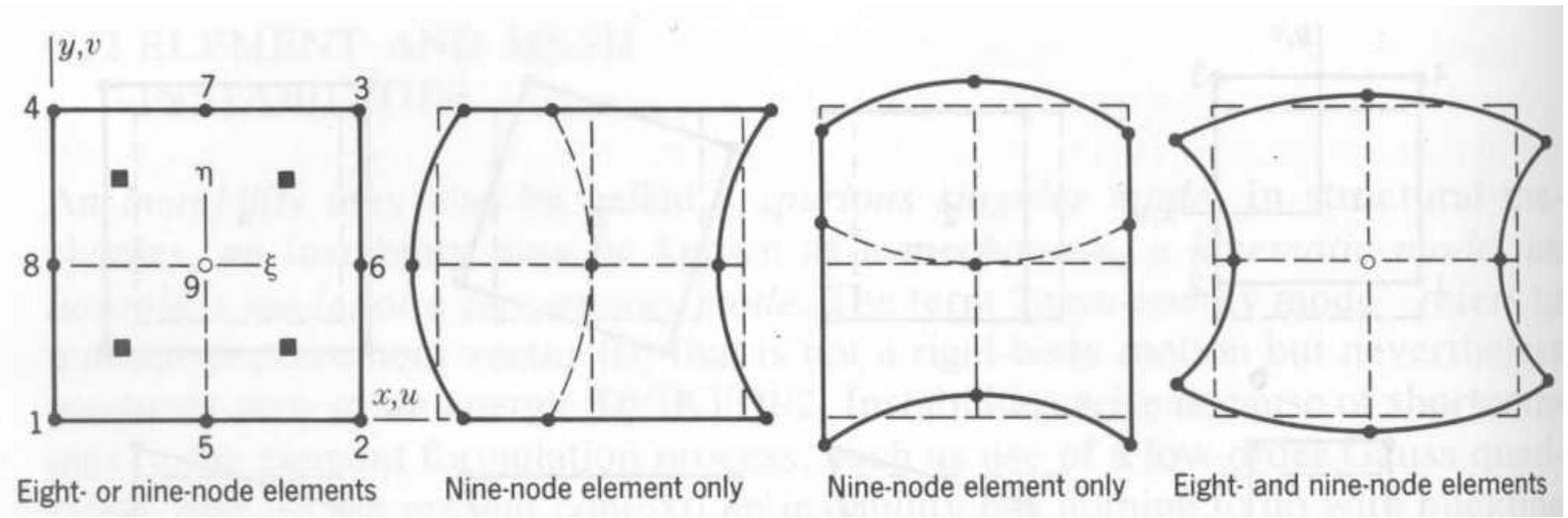
three instabilities shown have the respective forms (b)  $u = cxy, v = 0$ ; (c)  $u = 0, v = -cxy$ ; and (d)  $u = cy(1 - x), v = cx(y - 1)$ . We easily check that each of these displacement fields produces strains  $\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$  at the Gauss point,  $x = y = 0$ . *Nonrectangular ele-*

Frequentemente ocorre hourglass devido à integração reduzida em elementos de primeira ordem (quadrilátero de 4 nós e sólido de 8 nós). O elemento se torna inutilizável, a não ser que técnicas de controle sejam utilizadas.



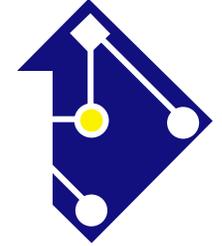
# ELEMENTOS QUADRÁTICOS

Elementos quadriláteros quadráticos usando quadratura de Gauss 2x2 Gauss também apresentam instabilidade (hourglass).

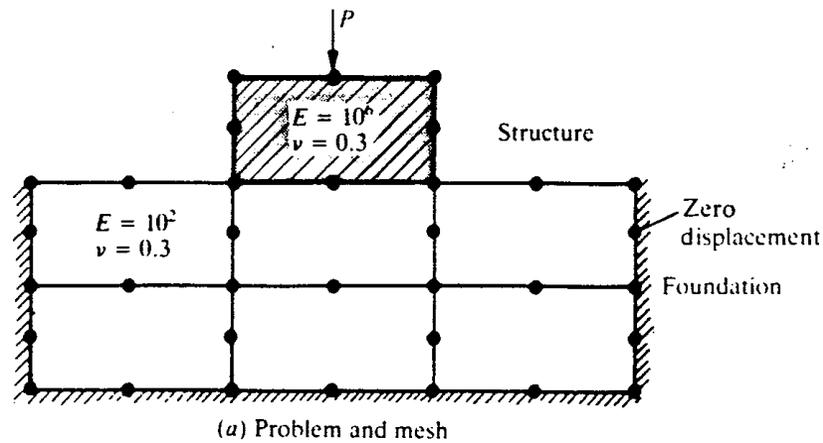


Elementos tridimensionais de segunda ordem com integração reduzida tem modos que se propagam em uma única linha de elementos.

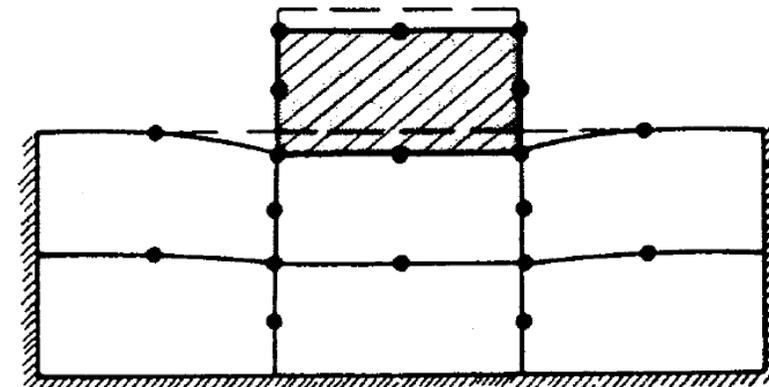
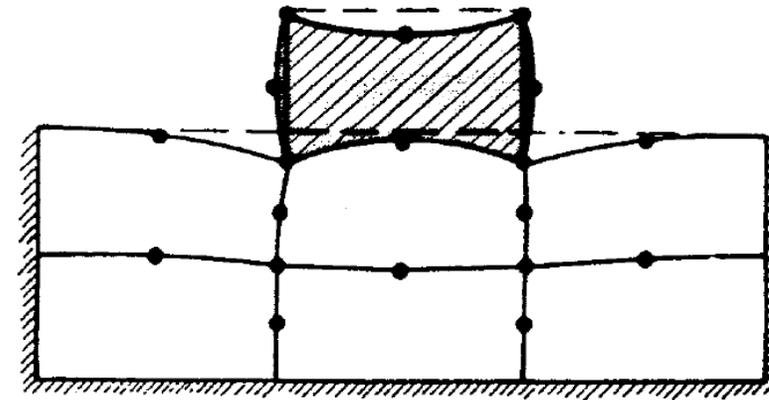
A instabilidade em elementos de segunda ordem raramente causam problemas e, portanto, softwares comerciais como o Abaqus, não utilizam nenhuma técnica especial de controle.

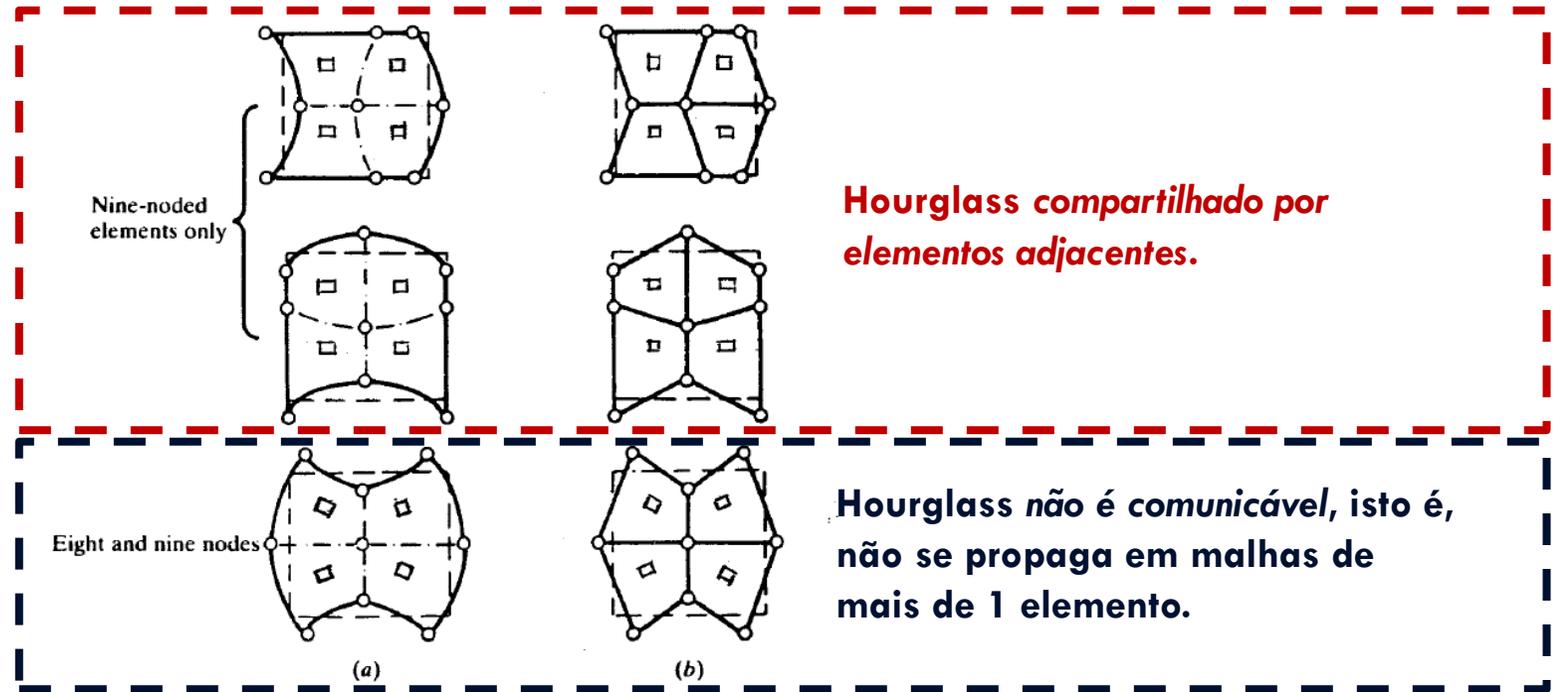
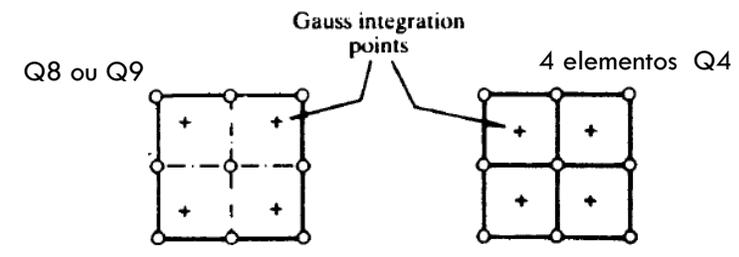
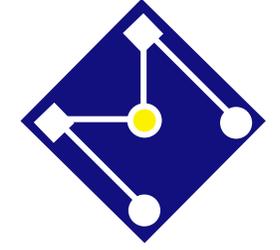


# EXEMPLO



A *estrutura* é modelada por um único elemento quadrático de 8 nós, bem mais rígido que a *fundação* sobre a qual a estrutura está centrada.

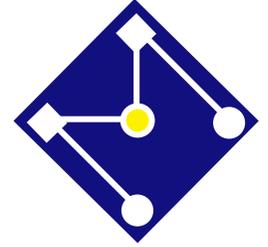




**Hourglass compartilhado por elementos adjacentes.**

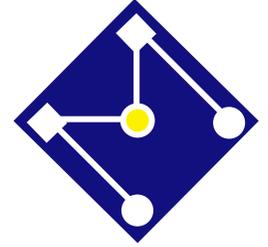
**Hourglass não é comunicável, isto é, não se propaga em malhas de mais de 1 elemento.**

(a) Zero energy (singular) modes for eight- and nine-noded quadratic elements and (b) for a patch of bilinear elements with single integration points



# COMO PREVENIR HOURGLASS?

- Use quadratura de Gauss de ordem superior na formulação.
- Pode-se artificialmente "enrijecer" os modos espúrios através de funções de penalidade. O método da rigidez artificial sugerido por Flanagan and Belytschko (1981) funciona em casos lineares e problemas com não linearidade branda.
- Evite elementos com instabilidades conhecidas!
- O controle do hourglass depende também do carregamento aplicado na estrutura: por exemplo, carregamento pontual irá iniciar hourglass mais facilmente que carregamento distribuído.
- Hourglass é importante de ser evitado em problemas de autovalores e autovetores: a baixa rigidez dos modos espúrios pode criar modos irreais com baixas frequências.



# CONSIDERAÇÕES

It has long been known that a finite element model gives a stiffness which is too high. Using reduced integration so as to underestimate the element stiffness has been accepted as one way to improve the results. Reduced integration has been especially useful in problems with constraints, such as material incompressibility. There are situations where it is preferable to use fewer integration points and purposely make the stiffness singular.

Finite Element Analysis with Error Estimators

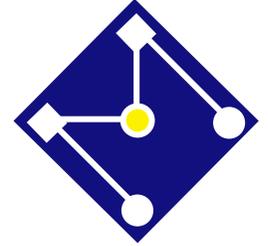
An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students

**J. E. Akin**

<http://www.mems.rice.edu/~akin/Elsevier/>

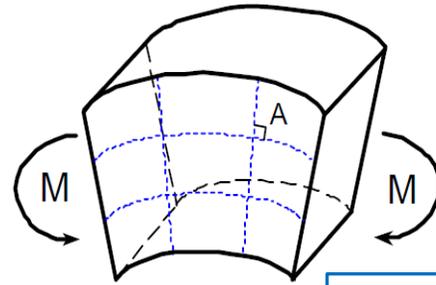
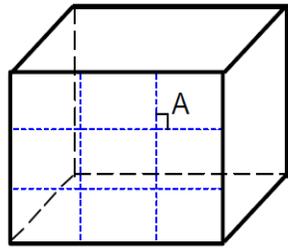
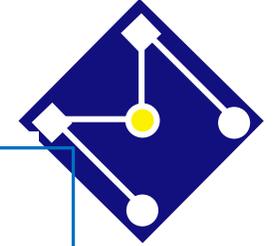
Reduced integration should not be used if cost reduction is the only motivation.

Hughes, T. J. R., 1987, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc.

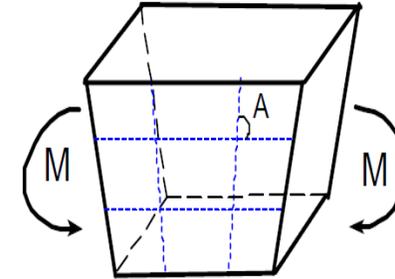
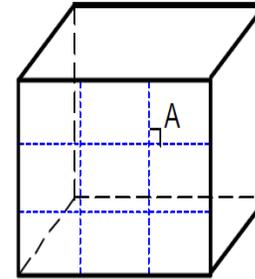


# VANTAGENS DA INTEGRAÇÃO REDUZIDA

- Usualmente, essa parece ser uma aproximação muito pobre, mas provou oferecer vantagens significativas, em alguns casos:
  - Para elementos de segunda ordem, pontos de integração reduzida têm a propriedade de ponto Barlow (Barlow, 1976): as tensões são calculadas a partir das funções de interpolação com maior precisão nestes pontos do que em qualquer outra parte no elemento.
  - Para os elementos de primeira ordem, o método de deformação uniforme gera uma deformação média exata sobre o volume do elemento. Importante quando o modelo constitutivo não é linear, uma vez que as deformações que passam para as rotinas da lei constitutiva são uma melhor representação dos valores reais.
  - Em certos cenários, elementos da malha se tornam muito rígidos, devido a suposições inconsistentes. Este fenômeno, denominado locking, pode ser causado por geometrias destorcidas de elementos (geralmente quando uma de suas dimensões é muito maior que as demais) ou, em certos casos, pela aproximação feita pela Quadratura Gaussiana. Neste último caso, a escolha de mais pontos de Gauss leva a capturar os termos de mais alto grau da matriz de rigidez. Esses termos levam a uma maior resistência do elemento, criando um elemento super-rígido.

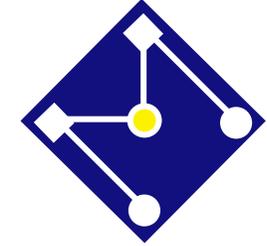


Situação ideal, a estrutura sujeita a flexão pura se deforma de forma curva...



... o que não é possível para elementos de primeira ordem com integração completa. Devido à mudança do ângulo  $A$ , uma tensão cisalhante artificial é introduzida. Isso significa que a energia de deformação do elemento está produzindo deformação cisalhante ao invés de deformação de flexão.

Shear locking pode ser resolvido utilizando malhas mais refinadas; elementos de mais alta ordem, que tenham compatibilidade com a deformação por flexão; e, incrivelmente, reduzindo a ordem de integração do elemento.



# TENSÕES E PONTOS DE GAUSS

In more mundane situations, and with various element types, it is not hard to realize that strains are likely to vary over an element and are therefore likely to be more accurate at some locations than others. It happens that the locations of greatest accuracy are apt to be the same Gauss points that were used for integration of the stiffness matrix [3.2, 4.4]. Consider Fig. 4.7-2, for example, which shows a portion of a beam in which shear strain is  $\gamma_{xy}$  constant along the  $x$  axis. The shear strain calculated by FE displays a quadratic variation that is most accurate at  $x$  coordinates of the Gauss points.

In summary, it is common practice to use an order 2 Gauss rule (four points) to integrate  $k$  of four- and eight-node plane elements, and common practice to compute strains and stresses at these same points. Similarly, three-dimensional elements often use eight Gauss points for stiffness integration and stress calculation. Stresses at nodes or at other element locations are obtained by extrapolation or interpolation from Gauss point values.

Finite element modeling for stress analysis,  
**Robert D. Cook,**  
 University of Wisconsin – Madison,  
 Ed. John Wiley & Sons, Inc.

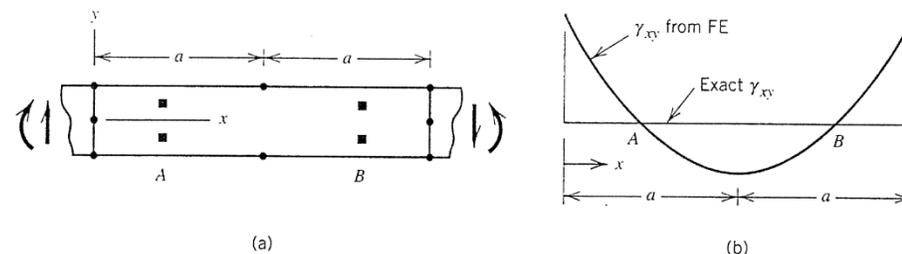
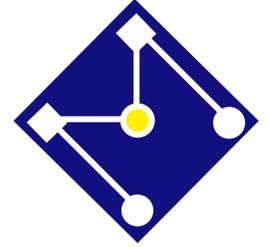


Fig. 4.7-2. (a) Portion of a beam modeled by a single layer of eight-node elements. (b) Shear strain along the  $x$  axis.



# IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Definir os elementos, funções de forma, pontos de integração

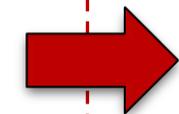
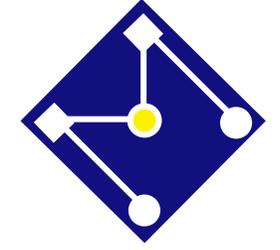
Montar matriz de rigidez do elemento, matriz de rigidez global

Montar o vetor de forças

$$d = K^{-1}F \rightarrow \varepsilon = Bd \rightarrow \sigma = De$$

Calcular reações de apoio

Testar equilíbrio



Definir os elementos, funções de forma, pontos de integração

Subdividir a estrutura em elementos com geometria simples

Aproximar os deslocamentos em cada elemento

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

Montar matriz de rigidez do elemento, matriz de rigidez global, vetor de forças  
Calcular deslocamentos

Definir a equação de equilíbrio do elemento

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \quad \mathbf{F}^e = \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, dA + \sum_i F_i$$

Reunir a contribuição de cada elemento para formar e resolver a equação de equilíbrio da estrutura, impondo as condições de contorno

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

Calcular deformações, tensões e forças internas

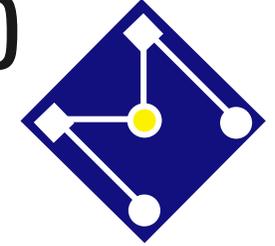
Recuperar os deslocamentos nodais de cada elemento e usá-los para determinar as deformações e os esforços da estrutura,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

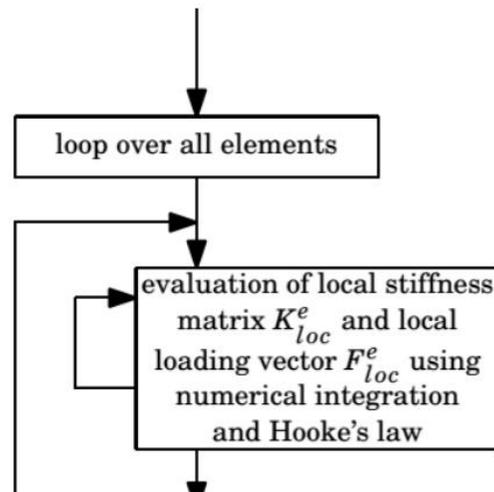
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d}$$

Testar equilíbrio

Analisar o erro da solução e identificar zonas da estrutura a refinar a malha ou aumentar o grau de aproximação dos elementos.



# IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ



## Processing

Loop each element  $e$  in all elements

recall numerical integration points  $\xi_{ij} = r_i, s_j$  and their weights  $w_{ij}$   
 recall element specific properties  
 evaluate numerical integration of local stiffness matrix and load vector: Loop each numerical integration point  $i, j$  in all integration points

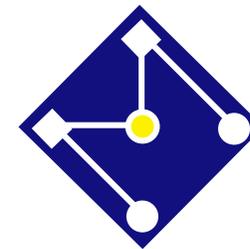
recall evaluated shape functions  $N_{ij}^e$  and derivatives  $B_{ij}^e$

evaluate Jacobian  $J$  and its determinant  $|J|$

evaluate local stiffness matrix  $K_{loc}^e += B^T DB |J| \Big|_{\xi_{ij}} * w_{ij}$

evaluate local loading vector  $F_{loc}^e += N^T f \Big|_{\xi_{ij}} * w_{ij}$

end



# MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

$$\mathbf{k} = \int_A \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \, dx \, dy$$

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \, \det(\mathbf{J}) \, dr \, ds$$



$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{r}}$$

$(3 \times 8) \quad (3 \times 2) \quad (2 \times 8)$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} & & & & & & & & 0 \\ & 0 & & & \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} & & & & \\ \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} & & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} & & & & & & \\ \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} & & \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} & & & & & & \end{bmatrix}$$

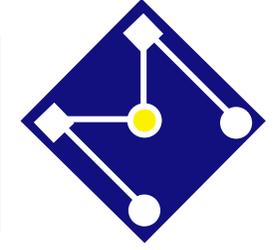
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{1}{8} \mathbf{X}^T \begin{bmatrix} 0 & 1-s & s-r & r-1 \\ s-1 & 0 & r+1 & -r-s \\ r-s & -r-1 & 0 & s+1 \\ 1-r & r+s & -s-1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(r, s) = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} a(N_{i,r}) - b(N_{i,s}) & & & 0 \\ & 0 & & c(N_{i,s}) - d(N_{i,r}) \\ c(N_{i,s}) - d(N_{i,r}) & & a(N_{i,r}) - b(N_{i,s}) & \end{bmatrix}$$



$$x = \frac{1}{4} [(1 - r)(1 - s)x_1 + (1 + s)(1 - s)x_2 + (1 + r)(1 + s)x_3 + (1 - r)(1 + s)x_4]$$



$$\frac{\partial x}{\partial r} = c = \frac{1}{4} (-(1 - s)x_1 + (1 - s)x_2 + (1 + s)x_3 - (1 + s)x_4)$$

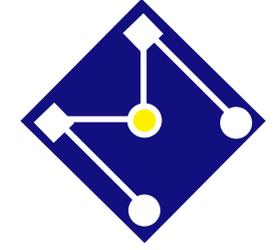
$$\frac{\partial x}{\partial s} = d = \frac{1}{4} (-(1 - r)x_1 - (1 + r)x_2 + (1 + r)x_3 + (1 - r)x_4)$$

$$y = \frac{1}{4} [(1 - r)(1 - s)y_1 + (1 + r)(1 - s)y_2 + (1 + r)(1 + s)y_3 + (1 - r)(1 + s)y_4]$$



$$\frac{\partial y}{\partial r} = b = \frac{1}{4} [-(1 - s)y_1 + (1 - s)y_2 + (1 + s)y_3 - (1 + s)y_4]$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = a = \frac{1}{4} [-(1 - r)y_1 - (1 + r)y_2 + (1 + r)y_3 + (1 - r)y_4]$$



$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

$$N_{1,r} = \frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{-1(1-s)}{4} = \frac{(s-1)}{4}$$

$$N_{2,r} = \frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{(1)(1-s)}{4} = \frac{(1-s)}{4}$$

$$N_{3,r} = \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{(1)(1+s)}{4} = \frac{(1+s)}{4}$$

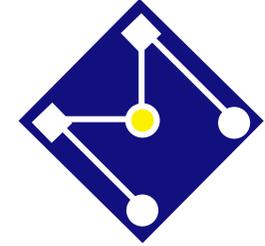
$$N_{4,r} = \frac{\partial N_4}{\partial r} = \frac{(-1)(1+s)}{4} = \frac{-(1+s)}{4}$$

$$N_{1,s} = \frac{\partial N_1}{\partial s} = \frac{(1-r)(-1)}{4} = \frac{(r-1)}{4}$$

$$N_{2,s} = \frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{(1+r)(-1)}{4} = \frac{-(r+1)}{4}$$

$$N_{3,s} = \frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{(1+r)(1)}{4} = \frac{(r+1)}{4}$$

$$N_{4,s} = \frac{\partial N_4}{\partial s} = \frac{(1-r)(1)}{4} = \frac{(1-r)}{4}$$



```

for i=1:4
    if i==1 r=-0.577350269;s= r;
        elseif i==2 r=-0.577350269;s=-r;
            elseif i==3 r= 0.577350269;s= r;
                elseif i==4 r= 0.577350269;s=-r;
                    end
                    N1r=-(1-s)/4; N2r=(1-s)/4;
                    N3r=(1+s)/4; N4r=-(1+s)/4;
                    N1s=-(1-r)/4; N2s=-(1+r)/4;
                    N3s=(1+r)/4; N4s=(1-r)/4;
                    J(1,1)=N1r*x1+N2r*x2+N3r*x3+N4r*x4;
                    J(1,2)=N1r*y1+N2r*y2+N3r*y3+N4r*y4;
                    J(2,1)=N1s*x1+N2s*x2+N3s*x3+N4s*x4;
                    J(2,2)=N1s*y1+N2s*y2+N3s*y3+N4s*y4;
                    Jinv=inv(J);
                    N1x=Jinv(1,1)*N1r+Jinv(1,2)*N1s;
                    N2x=Jinv(1,1)*N2r+Jinv(1,2)*N2s;
                    N3x=Jinv(1,1)*N3r+Jinv(1,2)*N3s;
                    N4x=Jinv(1,1)*N4r+Jinv(1,2)*N4s;
                    N1y=Jinv(2,1)*N1r+Jinv(2,2)*N1s;
                    N2y=Jinv(2,1)*N2r+Jinv(2,2)*N2s;
                    N3y=Jinv(2,1)*N3r+Jinv(2,2)*N3s;
                    N4y=Jinv(2,1)*N4r+Jinv(2,2)*N4s;
                    B=[N1x 0 N2x 0 N3x 0 N4x 0 ;
                        0 N1y 0 N2y 0 N3y 0 N4y ;
                        N1y N1x N2y N2x N3y N3x N4y N4x];
                    B_e=B+B_e;
                    k_e=B'*C*B*i*det(J)+k_e;
                end
            end
        end
    end
end

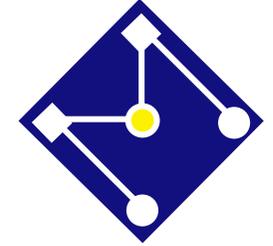
```

% cm : conective matrix  
 %row n stores nodes of element n

```

g(1)=ngle*cm(el_i,1)-(ngle-1);
g(2)=g(1)+1;
g(3)=ngle*cm(el_i,2)-(ngle-1);
g(4)=g(3)+1;
g(5)=ngle*cm(el_i,3)-(ngle-1);
g(6)=g(5)+1;
g(7)=ngle*cm(el_i,4)-(ngle-1);
g(8)=g(7)+1;
k_aux=zeros(dofg,dofg);
for i=1:8
    for j=1:8
        k_aux(g(i),g(j))=k_e(i,j);
    end
end
k_g=k_g+k_aux;

```

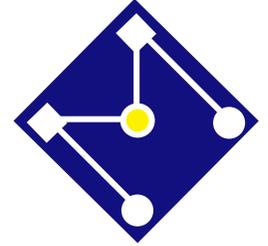


# SUA TAREFA

- **Estático**

Programa deve ser geral e permitir a montagem de qualquer arranjo de elementos finitos planos de quatro nós, do tipo isoparamétrico. O usuário pode optar entre estado plano de tensão ou estado plano de deformação e carregamento nodal ou distribuído em na superfície lateral do elemento. A integração pode ser reduzida ou completa, com comentários comparativos de desempenho. Em um exemplo em particular, deve-se ilustrar os problemas obtidos com integração reduzida e a melhora da resposta quando integração completa é utilizada.

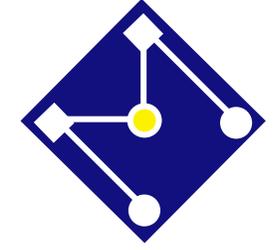
Os resultados deste programa devem ser comparados com os teóricos, que podem ser obtidos em textos clássicos de Elasticidade ou de Mecânica dos Sólidos Avançada.



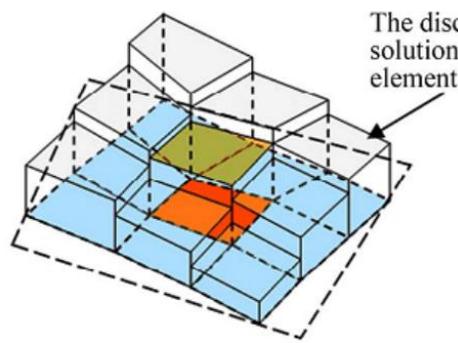
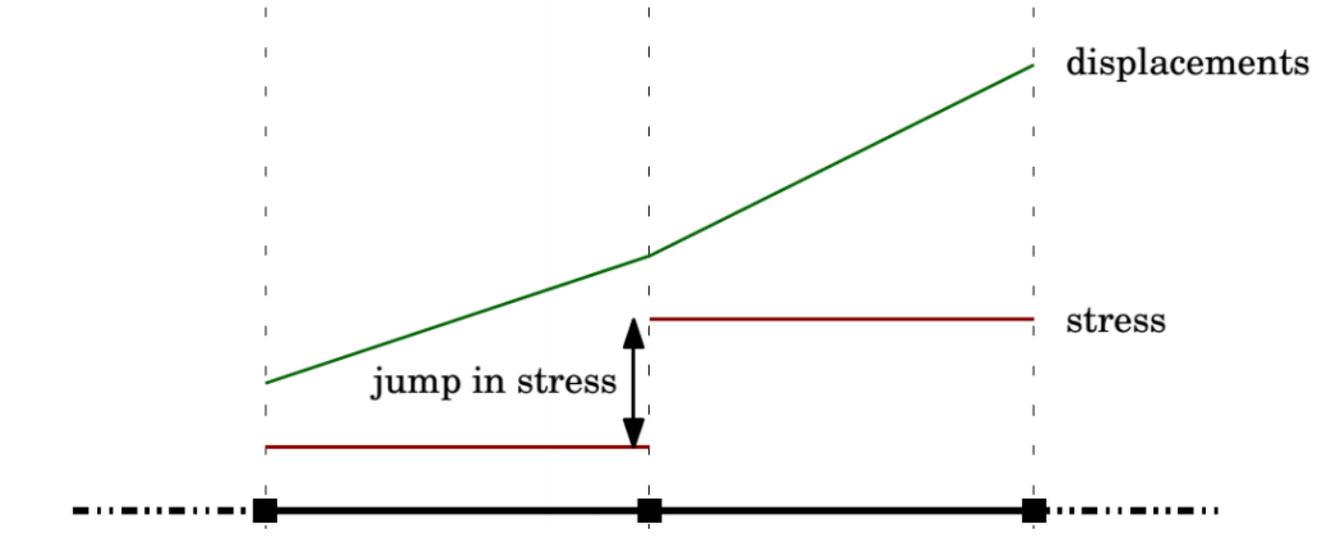
# ENTREGA

- Os programas devem ser feitos em, no máximo, duas pessoas. Todos os programas devem ser bem documentados. A documentação pode ser dividida em duas grandes partes.
  - **A primeira parte diz respeito à programação.** Importante que o programa contenha frases explicativas inseridas que orientam o processo de programação. A qualidade deste tipo de documentação pode demonstrar quão bem o programador entende o processo de construção e funcionamento de um programa de elementos finitos. Esta documentação deve apresentar um fluxograma do programa, que quanto mais detalhado, mais valorizado.
  - **A segunda parte da documentação se refere ao problema que está sendo resolvido.** O problema precisa estar bem definido, inclusive com figuras, indicação de carregamento, geometria, constantes do material. Naturalmente aqui se apresentam os resultados, que devem ser comparados com resultados de programas profissionais e/ou com experimentais e/ou com teóricos.

Não há necessidade de um pré-processamento elaborado, isto é, seu programa pode ser capaz de ler arquivo de entrada de programas comerciais. Da mesma maneira, para a apresentação de resultados, seu programa pode gerar arquivos para serem lidos em outros programas, ou, simplesmente, você pode ressaltar resultados obtidos no programa e comparar diretamente com valores de referência em tabela.

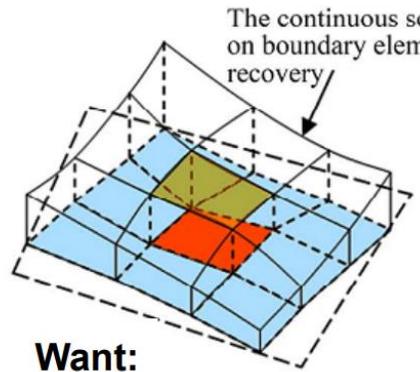


# CÁLCULO DE TENSÕES



**Have:**

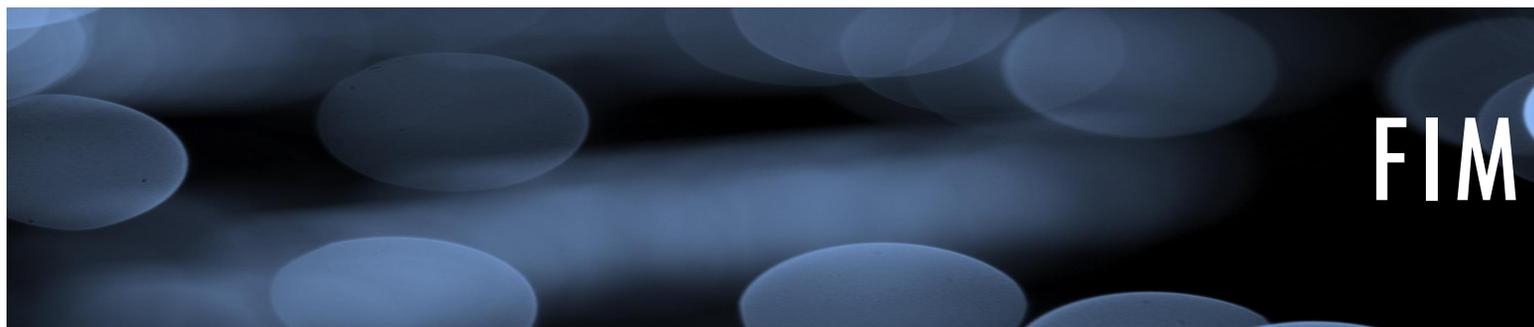
The discontinuous FEM solution gradient of boundary element



**Want:**

The continuous solution gradient on boundary element after recovery

**How does one remove these unwanted jumps?**



Próxima aula: Dinâmica