Exercícios – Camada Limite
7.14 – 7.16 – 7.20 – 7.32 – 7.33

Exercício 7.14 - Dado o campo de velocidades:

$$u = U_o \left(1 - e^{Cy}\right); \; \upsilon = V_o < 0$$

Mostre que, se $\frac{dp}{dx} = 0$, esse campo de velocidades pode ser uma solução exata para as equações da camada limite para um certo valor da constante C em função dos demais parâmetros do escoamento. As condições de contorno são satisfeitas? O que esse escoamento representa?

Solução: Para ser uma solução exata das equações da camada limite, esse campo de velocidades deve satisfazer as equações da continuidade e de Navier-Stokes.

Continuidade: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$

Substituindo as expressões das velocidades:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[U_o\left(1 - e^{Cy}\right)\right]}_{0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(V_o)}_{0} = 0 \quad \text{pois } u = u(y) \text{ e } \upsilon \text{ é contante.}$$

Equação de Navier-Stokes com gradiente nulo de pressão:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Substituindo as velocidades:

$$0+V_o\left(-U_o\,C\,e^{Cy}\right)=-\nu\,U_o\,C^2\,e^{Cy}$$

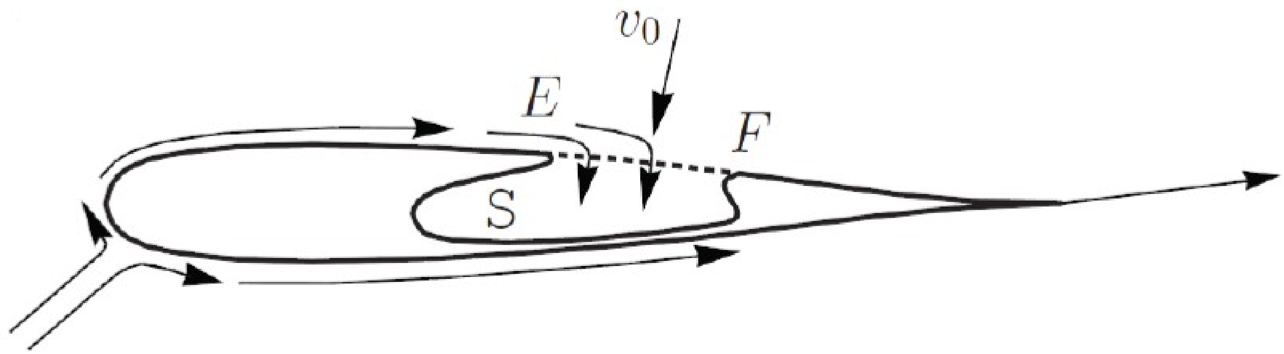
Resulta que, para esse campo de velocidades ser uma solução exata das equações da camada limite:

$$\boxed{C=\frac{V_o}{\nu}<0}$$

Não basta apenas que esse campo de velocidades satisfaça as equações da continuidade e Navier-Stokes. É preciso verificar se as condições de contorno são satisfeitas, no caso:

Se $y = 0$, $u = U_o\left(1 - e^{Cy}\right) = 0$
Se $y \to \infty$, $u = U_o\left(1 - e^{Cy}\right) \to U_o$ pois $C < 0$

Esse escoamento representa um escoamento com sucção através de pequenos orifícios na parede. Esse tipo de escoamento pode ser usado para evitar o descolamento da camada limite em aerofólios, evitando o estol.



Exemplo de controle ativo da camada limite por sucção. Extraído de “Designing of airfoil profile with a boundary layer suction device”, R. A. Valitov, 2012.

Exercício 7.16 – Uma placa plana fixa de 55 por 110 cm está imersa em um fluxo de 6 m/s de óleo SAE 10 a 20º C ($\rho = 870\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 0{,}104\,\mathrm{kg/(m.s)}$). Calcule o arrasto total de atrito viscoso sabendo que o fluxo, paralelo à placa, é alinhado na direção (a) do lado maior e (b) do lado menor.

Solução: Considerando a camada limite laminar, temos que o coeficiente de arrasto para um lado da placa é:

$$C_D = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \quad \text{(solução de Blasius)}$$

(a) Escoamento alinhado com o lado maior:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{870.6.1{,}10}{0{,}104} = 55212$$

$$C_D = \frac{1{,}328}{\sqrt{55212}} = 0{,}0057$$

A força de arrasto sobre um lado da placa será:

$$F_x = \frac{1}{2}\rho U^2 b L C_D = \frac{1}{2}.870.6^2.1{,}10.0{,}55.0{,}0057 = 53{,}5\,\mathrm{N}$$

Assim, considerando os dois lados da placa, teremos um arrasto de 107N.

(b) Escoamento alinhado com o lado menor:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{870.6.0{,}55}{0{,}104} = 27606$$

$$C_D = \frac{1{,}328}{\sqrt{55212}} = 0{,}0080$$

A força de arrasto sobre um lado da placa será:

$$F_x = \frac{1}{2}\rho U^2 b L C_D = \frac{1}{2}.870.6^2.0{,}55.1{,}10.0{,}0080 = 75{,}8\,\mathrm{N}$$

Assim, considerando os dois lados da placa, teremos um arrasto de 152N.

Exercício 7.20 – Ar a 20º C e 1atm escoa a 20 m/s sobre uma placa plana. Um tubo de Pitot, colocado a 2 mm da parede, apresenta uma leitura h = 16 mm de óleo (d = 0,827). Determine a posição x do tubo de Pitot. Considere a camada limite laminar.

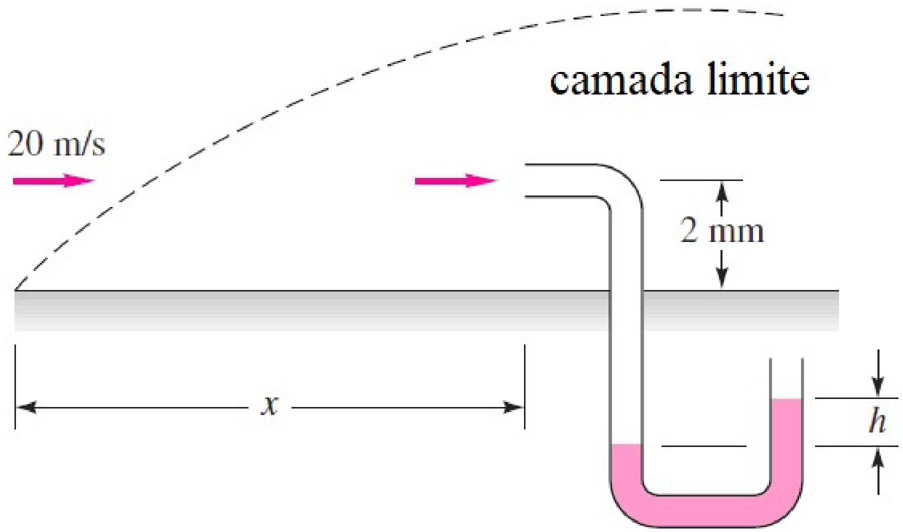


Figura extraída de White, F. M., “Fluid Mechanics”, 7th edition, 2011.

Solução: As propriedades do ar são $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 e $\mu = 1{,}8 \times 10^{-5}$ N.s/m^2. A massa específica do óleo usado como fluido manométrico é $\rho_m = 827$ kg/m^3.

Analisando o tubo de Pitot, podemos calcular a velocidade do ar dentro da camada limite a uma altura de 2 mm da parede. A pressão de estagnação na ponta do tubo de Pitot tem que ser igual à pressão causada pela coluna de fluido manométrico somada à pressão ambiente:

$$\rho \frac{u^2}{2} + p_{atm} = \rho_m g h + p_{atm}$$

De onde temos que:

$$u = \sqrt{\frac{2\rho_m g h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.827.9{,}81.0{,}016}{1{,}2}} = 14{,}7 \text{ m/s}$$

Com essa velocidade, é possível calcular a função $f' = u/U$ da solução de Blasius:

$$f' = \frac{14{,}7}{20} = 0{,}735$$

Da tabela da solução de Blasius, por interpolação, esse valor de f' equivale a um valor $\eta = 2{,}42$.

Da definição de η:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu\, x}} = y\sqrt{\frac{U\rho}{\mu\, x}} = 2{,}42$$

Substituindo os valores numéricos:

$$0{,}002\sqrt{\frac{20.1{,}2}{1{,}8\times 10^{-5}.x}} = 2{,}42$$

Obtemos $x = 0{,}911$ m .

Exercício 7.33 – Uma análise alternativa de Prandtl (1927) sugere que, para uma camada limite turbulenta sobre uma placa plana paralela à corrente, a tensão na parede é dada por:

$$\tau_o = 0{,}0225\,\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Usando o perfil de velocidades $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$, determine expressões para δ, C_f e C_D.

Solução: A equação integral de Von Kármán para a camada limite é:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}(2+H)$$

Como a placa plana é paralela à corrente, $\frac{dU}{dx} = 0$. Assim:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}$$

A espessura de quantidade de movimento é dada por:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Fazendo $\frac{y}{\delta} = \beta$, $dy = \delta\, d\beta$ e aplicando o perfil de velocidades:

$$\theta = \int_0^1 \beta^{\frac{1}{7}}\left(1 - \beta^{\frac{1}{7}}\right) \delta\, d\beta = \frac{7}{72}\delta$$

Já o coeficiente de atrito é dado por:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_o}{\rho U^2} = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Substituindo os dois últimos resultados na equação integral da camada limite:

$$0{,}0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx}$$

Reorganizando a equação:

$$\delta^{\frac{1}{4}}\, d\delta = \frac{72.0{,}0225}{7}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} dx$$

Integrando:

$$\frac{4}{5}\delta^{\frac{5}{4}} = 0{,}231\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} x + C$$

Desprezando a parcela de camada limite laminar no início da placa e fazendo $\delta = 0$ em $x = 0$, temos $C = 0$. Assim:

$$\delta^{\frac{5}{4}} = 0{,}289\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} x$$

Dividindo os dois lados da equação por $x^{\frac{5}{4}}$:

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^{\frac{5}{4}} = 0{,}289\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Elevando os dois lados da equação a 4/5:

$$\boxed{\frac{\delta}{x}=\frac{0,37}{\left(\frac{U\,x}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}}=\frac{0,37}{\mathrm{Re}_x{}^{0,2}}}$$

Lembrando que o coeficiente de atrito é dado por:

$$\frac{C_f}{2}=0,0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

E substituindo o resultado da camada limite, após alguma álgebra se verifica que:

$$\boxed{C_f = \frac{0{,}0577}{\mathrm{Re}_x^{\;0{,}2}}}$$

O coeficiente de arrasto sobre um lado da placa será:

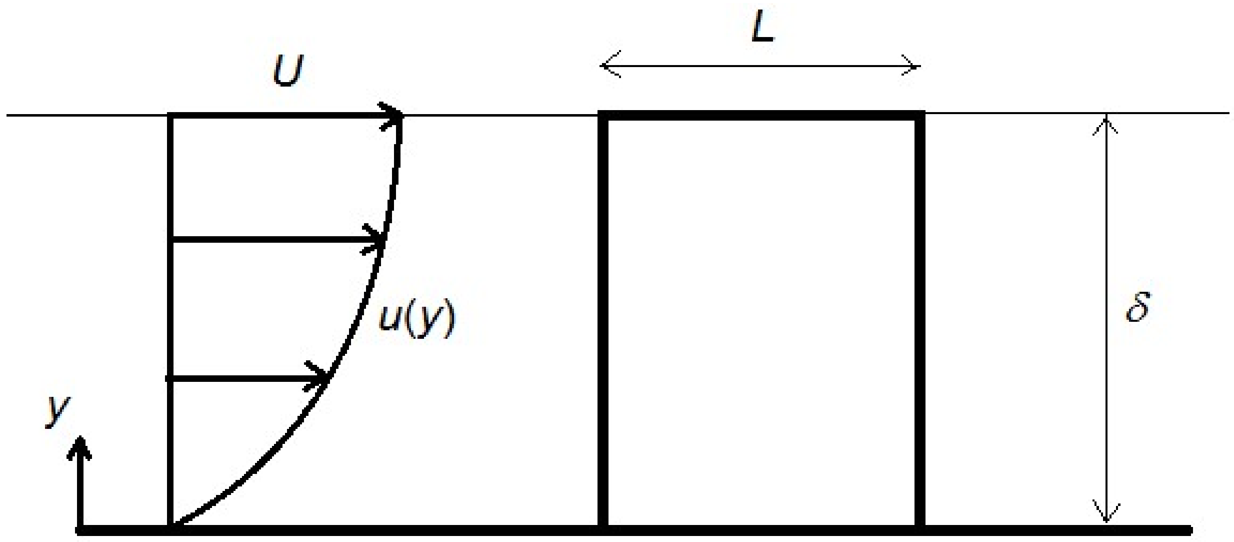
$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L C_f \, dx$$

Substituindo o resultado do coeficiente de atrito e integrando:

$$\boxed{C_D = \frac{0{,}072}{\left(\frac{U\,L}{\nu}\right)^{0{,}2}} = \frac{0{,}072}{\mathrm{Re}_L^{\;0{,}2}}}$$

Exercício 7.32 - Uma placa plana de comprimento L e altura δ é soldada numa parede paralelamente a uma camada limite que se aproxima, com um fluido de propriedades ρ e ν. Admita que o escoamento sobre a placa é totalmente turbulento e que o escoamento de aproximação segue a lei de potência $u(\mathrm{y})/U=(y/\delta)^{1/7}$. Deduza uma fórmula para o força de arrasto dessa placa como função de U, L, δ, ρ e ν. Lembre-se que a placa tem os dois lados sujeitos ao arrasto.

Dados: coeficiente de arrasto da camada limite turbulenta para um lado de uma placa plana paralela à corrente: $C_D = \dfrac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}}$.

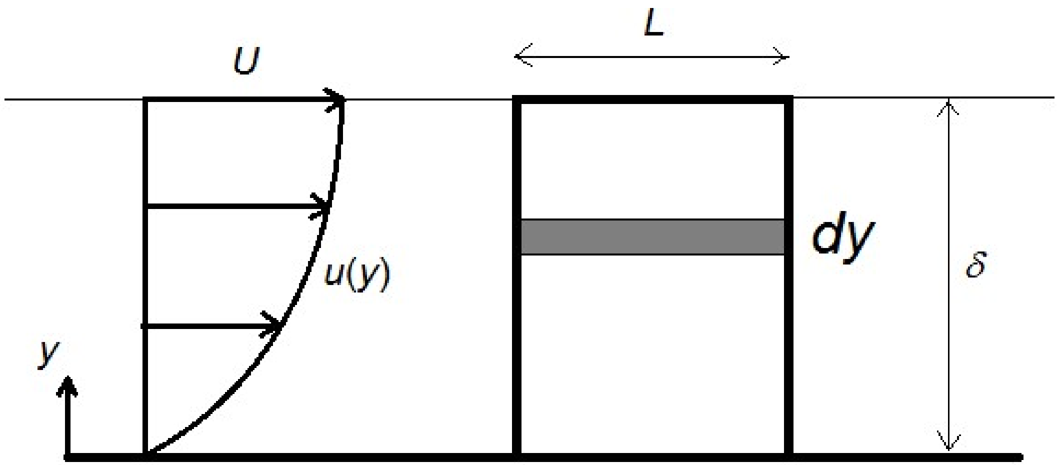


(Extraído de Frank M. White, "Mecânica dos Fluidos", 7ª edição)

Solução:

Uma fatia *dy* sobre a placa vai sofrer um arrasto dado por:

$$dF = \frac{0{,}031}{\left(\frac{u\,L}{\nu}\right)^{1/7}}\rho u^2 L\,dy = 0{,}31\,\rho \nu^{1/7} u^{13/7} L^{6/7}\,dy$$



Substituindo o perfil de velocidades:

$$dF = 0{,}031\ \rho \nu^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}}\ dy$$

Integrando:

$$F = \int_0^{\delta} 0{,}031\ \rho \nu^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}}\ dy$$

Que resulta:

$$F = \frac{49}{62} \times 0{,}031\ \rho \nu^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \delta = 0{,}0245\, \rho \nu^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \delta$$

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 7º edição, Ed. McGraw Hill, 2011.