

Derivadas das funções elementares

• Antes de calcular as derivadas, vamos falar de:

• A derivada como uma função

• Suponha f função e $x \in \text{Dom } f$

Podemos tentar calcular $f'(x)$ para cada $x \in \text{Dom } f$.

Assim podemos definir uma nova função, que chamaremos de f' :

$$f': x \mapsto f'(x) \quad (\text{se existir})$$

Note que $x \in \text{Dom } f' \Leftrightarrow f$ é derivável em x

Def: A função $f': x \mapsto f'(x)$, onde $\text{Dom } f' = \{x \in \text{Dom } f; f \text{ é derivável em } x\}$, é chamada (função) derivada de f

• Faremos exemplos daqui a pouco, ~~isto é~~ quando formos achar as derivadas das funções que conhecemos (as principais).

Pergunta: Qual a relação entre os gráficos de f e f' ?
(Fica para vocês pensarem, discutirei em uma de nossas reuniões).

• Vamos agora calcular as "funções derivadas" que nos interessam.

• Derivadas das funções elementares:

• Vamos achar as funções derivadas das principais funções para auxiliar o cálculo das derivadas depois, quando formos fazer as aplicações.

• Lembrando:
$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(Usaremos qual achermos mais conveniente).

1) $f(x) = k$, k constante, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{k - k}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{0}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} 0 = 0$$

$\therefore f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, $(k)' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t - x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} 1 = 1$$

$\therefore (x)' = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + \dots + tx^{n-2} + x^{n-1})}{(t-x)} =$$

$$= t^{n-1} + t^{n-2}x + \dots + tx^{n-2} + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

$\therefore \boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}$

(Obs: Se quiser usar a def com $\lim_{h \rightarrow 0}$, dá para fazer, neste caso use o binômio de Newton).

4) $f(x) = x^{-n}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\frac{1}{t^n} - \frac{1}{x^n}}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \underbrace{\left(\frac{x^n - t^n}{t - x} \right)}_{-n x^{n-1}} \cdot \frac{1}{t^n x^n} = -n x^{n-1} \cdot \frac{1}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

$$\therefore \boxed{(x^{-n})' = -n x^{-n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Exemplo: $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5 x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$, $x \neq 0$.

• O próximo passo é calcular a derivada de $f(x) = \sqrt[n]{x}$, mas antes vamos fazer como exercício os casos $n=2$ e $n=3$.

Exercício: Calcule $f'(x)$ para: a) $f(x) = \sqrt{x}$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Resolução (tenha resolver sozinho antes).

(a) $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{(\sqrt{t} - \sqrt{x})(\sqrt{t} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$, se $x \neq 0$.

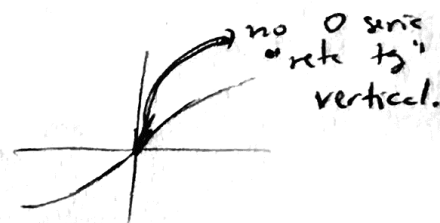
$$\therefore \boxed{(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2}} \quad \text{para } \underline{x > 0}$$

Obs: Note que se $x=0$, o limite não existe, o seja $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x=0$.

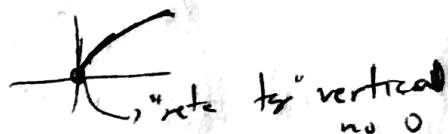
(b) $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{t}^2 + \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, se $x \neq 0$.

Novamente se $x=0$ o limite não existe.

$$\therefore \boxed{(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3}}, \quad \underline{x \neq 0}$$



$\therefore f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x=0$.



• Obs: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ não é derivável em $x=0$ porque

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, \text{ ou seja, o limite não existe}$$

(a justificativa não é olhando a expressão $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-2/3}$, obtida para $x \neq 0$).

• Para o caso geral $\sqrt[n]{x}$, podemos fazer de forma análoga ao que foi feito para $\sqrt[3]{x}$. Mas podemos também calcular o limite de outra forma.

5) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ e n par, $x \in \mathbb{R}$ e n ímpar

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x}}{t - x} = \lim_{u \rightarrow v} \frac{u - v}{u^n - v^n} \stackrel{v \neq 0}{=} \frac{1}{n v^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \text{ se } x \neq 0$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[n]{t} \\ v &= \sqrt[n]{x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t \rightarrow x &\Rightarrow u \rightarrow v \\ u = \sqrt[n]{t} &\Rightarrow t = u^n \\ v = \sqrt[n]{x} &\Rightarrow x = v^n \end{aligned}$$

Nota que se $x=0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{t} - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{t^{n-1}}} = +\infty$, ou seja, não existe.

Logo $\boxed{(x^{1/n})' = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \text{ se } x \neq 0}$

e $\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} \text{ não é derivável em } x=0.}$

Exemplos: $(x^5)' = 5x^4$

$(\frac{1}{x^4})' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

$(\sqrt[7]{x})' = (x^{1/7})' = \frac{1}{7} x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}}$

Obs: Veremos depois que vale $(x^a)' = ax^{a-1}$, para $a \in \mathbb{R}$ fixo.

Vamos agora calcular as derivadas de e^x , $\ln x$, $\sin x$ e $\cos x$.

6) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(e^x \cdot \underbrace{\left[\frac{e^h - 1}{h} \right]}_{\rightarrow 1} \right)$$

Mas:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(u+1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \ln(u+1)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln((1+u)^{1/u})} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

$$u = e^h - 1 \Rightarrow e^h = u + 1 \Rightarrow h = \ln(u+1)$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$$

Logo $\boxed{(e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}}$

(Obs) e^x é a "única" função tal que $f' = f$

Essa é outro caminho para introduzir o e , procurar f t.q. $f' = f$

7) $f(x) = \ln x$, $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u \cdot x}} =$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{h}{x} = u &\Rightarrow h = u \cdot x \\ h \rightarrow 0 &\Rightarrow u \rightarrow 0 \end{aligned} \right\}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \ln\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\underbrace{(1+u)^{1/u}}_{\rightarrow e}\right) = \frac{1}{x}$$

$\therefore \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}, x > 0$

Farei as derivadas de $\sin x$ e $\cos x$ usando limites diferentes para ilustrar.

8) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ (usa $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$)

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{2 \sin\left(\frac{t-x}{2}\right) \cos\left(\frac{t+x}{2}\right)}{t-x} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \left[\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) \right] \begin{matrix} \text{sen é contínuo} \\ \text{cos é contínuo} \end{matrix} = \cos\left(\frac{2x}{2}\right) = \cos x$$

$$\text{com } u = \frac{t-x}{2} \Rightarrow t \rightarrow x \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\frac{t-x}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\therefore \boxed{(\sin x)' = \cos x}, x \in \mathbb{R}$$

9) $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ (usa: $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{-\frac{\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\text{limite ind.}} \cdot \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \right] \begin{matrix} \text{sen é contínuo} \\ \text{sen é contínuo} \end{matrix} = -\sin\left(\frac{2x}{2}\right) = -\sin x$$

$$\therefore \boxed{(\cos x)' = -\sin x}, x \in \mathbb{R}.$$

Tendo ~~as~~ as funções derivadas, se precisarmos saber, por exemplo, $f'(0)$ para $f(x) = \sin x$, não precisamos mais usar a definição, é só substituir $x=0$ em $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.