# Gabarito da Segunda Série

## Exercício 1

### Solução

- Se $\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta$ então $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla\alpha \times \nabla\beta) = \nabla\beta \cdot (\nabla \times \nabla\alpha) - \nabla\alpha \cdot (\nabla \times \nabla\beta) \equiv 0$.
  Aqui usou–se que $[\nabla \times \nabla\phi]^i = \epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k\phi = \partial_j\partial_k\phi - \partial_j\partial_k\phi \equiv 0 \quad (\partial_l = \frac{\partial}{\partial l})$

- Temos $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\alpha \times \nabla\beta = \nabla \times (\alpha\nabla\beta) - \alpha\nabla \times \nabla\beta = \nabla \times (\alpha\nabla\beta)$ e daí $\mathbf{A} = (\alpha\nabla\beta)$.
  Observando que $\mathbf{B} = -\nabla\beta \times \nabla\alpha$ conclui–se que $\mathbf{A} = -(\beta\nabla\alpha)$.

- É claro que $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Também tem–se

$$\nabla \times [\alpha\nabla(\beta + f_2(\alpha))] = \nabla \times (\alpha\nabla\beta) + \nabla \times [\alpha\nabla f_2(\alpha)] = \nabla \times (\alpha\nabla\beta) + \nabla\alpha \times \nabla f_2(\alpha) + \alpha\nabla \times \nabla f_2(\alpha)$$
$$= \nabla \times (\alpha\nabla\beta) + \nabla\alpha \times \nabla f_2(\alpha) = \nabla \times (\alpha\nabla\beta) + \nabla\alpha \times \left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}\alpha}\right)\nabla\alpha = \nabla \times (\alpha\nabla\beta).$$

  Analogamente ocorre na representaçã o $\mathbf{A} = -(\beta\nabla\alpha)$ se $\alpha \to \alpha + f_1(\beta)$.

- Ao longo da linha de campo tem–se $\frac{d\alpha(\mathbf{r})}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} \cdot \nabla\alpha = \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla\alpha = \frac{\nabla\alpha \times \nabla\beta \cdot \nabla\alpha}{|\nabla\alpha \times \nabla\beta|} = 0$. Analogamente, $\frac{d\beta(\mathbf{r})}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} \cdot \nabla\beta = \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla\beta = \frac{\nabla\alpha \times \nabla\beta \cdot \nabla\beta}{|\nabla\alpha \times \nabla\beta|} = 0$

---

## Exercício 2

Como explicado no enunciado do problema (veja também em Zangwill, Exemplo 10.7), no caso dos campos constantes em cada tubo de fluxo toroidal

$$H = \int_{C_1} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{C_2} \vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Aqui é importante esclarecer sobre uma concepção errada que muitos alunos têm com relação à definição de helicidade. Na expressão acima, $\vec{A}_1$ não é apenas o potencial vetor associado ao campo $\vec{B}_1$, mas o potencial vetor que está no volume $V_1$ associado a todos os campos, $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$. Da mesma forma, , $\vec{A}_2$ não é apenas o potencial vetor associado ao campo $\vec{B}_2$, mas o potencial vetor que está no volume $V_2$ associado a todos os campos, $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$. Os campos estão confinados nos tubos de fluxo, mas os potenciais vetores estão em todo o espaço.

$$H = \phi_1 \int_{C_1} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \phi_2 \int_{C_2} \vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_2$$

Mas

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi_m$$

onde $\phi_m$ é o fluxo magnético que atravessa a área interna ao circuito onde a integral de linha do potencial vetor é feita. Portanto, na configuração da figura mostrada no problema, a integral em $C_1$dá o fluxo do vetor $\vec{B}_2$, que atravessa sua área interna, e a integral em $C_2$dá o fluxo do vetor $\vec{B}_1$. Portanto

$$H = 2\phi_1\phi_2$$

Transformação de Calibre para a Helicidade

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \ \rightarrow H' = \int \vec{A}' \cdot \vec{B}' dV = H + \int \nabla\lambda \cdot \vec{B} dV$$

onde empregamos a propriedade de invariância do campo magnético em uma transformação de calibre. Então,

$$H' = H + \int \nabla \cdot (\lambda\vec{B}) dV + \int \lambda\nabla \cdot \vec{B} dV = H + \int \lambda\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Portanto

$$H' = H \ \Longrightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ou seja, o volume tem que ser limitado por uma superfície de fluxo, formado pelas linhas de força do campo magnético.

Exercício 3

**a)** Mostre que, utilizando a lei de Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, a equação $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ é satisfeita especificando o campo magnético através da relação $\mathbf{B} = \mathbf{F} \times \mathbf{E}$ onde $\mathbf{F}$ é qualquer vetor constante.

**Sol** Para $\mathbf{F}$ constante tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{F} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = (\mathbf{F} \times \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

**b)** Substitua esta expressão na lei de Ampère e obtenha a seguinte equação para o campo elétrico

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}(c^2\mathbf{F} - \mathbf{v}); \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$$

**Sol** $\mu_0\rho\mathbf{v} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{F} = -(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{E}$.
Agora usamos $\frac{1}{\mu_0\epsilon_0} = c^2$ e $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ para chegarmos no resultado desejado.

**c)** Mostre que essa equação é satisfeita escolhendo $\mathbf{F} = \mathbf{v}/c^2$ e que a derivada temporal convectiva do campo elétrico seja nula,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{E} = 0.$$

Explique o que significa fisicamente esta equação. Com esses resultados, temos, portanto, que

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}; \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

**Sol** É suficente observar que como $\mathbf{F} = \mathbf{v}/c^2$ não depende de $\mathbf{r}$ então cumpre-se $(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ por tanto $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2(\frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}(c^2\frac{\mathbf{v}}{c^2} - \mathbf{v}) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{E}$

**d)** Na equação de onda para o potencial vetor

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\rho\mathbf{v}$$

substitua $\rho$ utilizando a equação de onda para o potencial escalar $\phi$ e obtenha o resultado

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla^2\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi\right)$$

de forma que

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi$$

**Sol** $\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\rho\mathbf{v} = \mu_0\varepsilon_0\left(\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\mathbf{v} = \nabla^2\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi\right)$

**e)** Mostre que esse resultado satisfaz a relação $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$

**Sol** $\nabla\times\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi\right) = \phi\nabla\times\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\right) + \nabla\phi\times\frac{\mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E} = \mathbf{B}$

**f)** Na expressão do campo elétrico em função dos potenciais, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$, utilize a condição de que a derivada temporal convectiva do potencial vetor também tem que ser nula (como do campo elétrico), e obtenha a seguinte expressão

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\nabla\phi); \quad \vec{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$$

Esse resultado mostra que, uma vez determinado o potencial escalar $\phi$, todos os campos ficam determinados.

**Sol** $\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} = -\nabla\phi + (\mathbf{v}\cdot\nabla)(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi) = -\nabla\phi + \frac{\mathbf{v}}{c}(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\nabla\phi)$

**g)** Para obter a equação para $\phi$, parta da lei de Coulomb, $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ , e mostre que a equação diferencial para o potencial é

$$-\nabla^2\phi + \vec{\beta}\cdot\nabla(\vec{\beta}\cdot\nabla\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

**Sol** $\nabla\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot\nabla\phi + \nabla\cdot[\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\nabla\phi)] = -\nabla^2\phi + \vec{\beta}\cdot\nabla(\vec{\beta}\cdot\nabla\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

**h)** Resolva esta equação considerando a carga movendo–se na direção $z$, $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_z$ e mostre que ela se reduz a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + (1-\beta^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Essa seria a equação de Poisson, não fora o fator $(1-\beta^2)$. Faça então a transformação de variáveis $x \rightarrow x; y \rightarrow y; z \rightarrow \zeta = z/\sqrt{1-\beta^2}$ e obtenha a equação

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial \zeta^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x, y, \sqrt{1-\beta^2}\zeta)$$

que corresponde à equação de Poisson nas coordenadas $(x, y, \zeta)$. Obtenha a expressão para o potencial em termos da integral de volume nessas coordenadas e faça a transformação inversa de variáveis, levando resultado

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + \frac{1}{1-\beta^2}(z-z')^2\right]^{1/2}}$$

**Sol**

$$\mathbf{v}=v\hat{\mathbf{e}}_z\rightarrow\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial z}\phi\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\beta^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+(1-\beta^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$z=\sqrt{1-\beta^2}\zeta\rightarrow\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\quad\rho(x,y,z)=\rho(x,y,\sqrt{1-\beta^2}\zeta)\text{ and }\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+(1-\beta^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2}$$

$$\text{se }\nabla\doteq\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\quad\nabla^2\phi=-\frac{\rho(x,y,\sqrt{1-\beta^2}\zeta)}{\varepsilon_0}\rightarrow\phi(x,y,\sqrt{1-\beta^2}\zeta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(x',y',\sqrt{1-\beta^2}\zeta')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}\zeta'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(\zeta-\zeta')^2]^{1/2}}$$

$$\zeta=\frac{z}{\sqrt{1-\beta^2}}\rightarrow\mathrm{d}\zeta=\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\beta^2}}\rightarrow\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\int\frac{\rho(x',y',z')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+\frac{1}{1-\beta^2}(z-z')^2\right]^{1/2}}$$

i) Considere a densidade de carga como uma carga pontual na origem, $\rho(\mathbf{r})=q\delta(\mathbf{r})$ e obtenha o resultado

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)r^2+\beta^2z^2}}$$

**Sol** $\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\int\frac{q\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+\frac{1}{1-\beta^2}(z-z')^2\right]^{1/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{\left[x^2+y^2+\frac{1}{1-\beta^2}z^2\right]^{1/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[(1-\beta^2)(x^2+y^2)+z^2]^{1/2}}$

$$r^2=x^2+y^2+z^2\rightarrow\phi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[(1-\beta^2)(x^2+y^2)+(1-\beta^2)z^2+\beta^2z^2]^{1/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)r^2+\beta^2z^2}}$$

j) Como $\beta z=\vec{\beta}\cdot\mathbf{r}$, mostre que este resultado pode ser escrito numa forma independente o sistema de coordenadas

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{q/4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{r^2-(\mathbf{r}\times\vec{\beta})^2}}$$

**Sol**

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)r^2+\beta^2z^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2-[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta})-(\mathbf{r}\cdot\vec{\beta})^2]}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2-(\mathbf{r}\times\vec{\beta})^2}}$$

k) Finalmente, utilizando a expressão para o campo elétrico obtida no item f), mostre que a expressão final para o campo elétrico é dada por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\mathbf{r}+(\vec{\beta}\cdot\mathbf{r})\vec{\beta}}{\left[r^2-(\mathbf{r}\times\vec{\beta})^2\right]^{3/2}}$$

Essa expressão está em concordância com o resultado relativisítico.

**Sol** $\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\phi(\mathbf{r})=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)r^2+\beta^2z^2}}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-\beta^2)(x\hat{\mathbf{e}}_x+y\hat{\mathbf{e}}_y+z\hat{\mathbf{e}}_z)+\beta^2z\hat{\mathbf{e}}_z}{[(1-\beta^2)r^2+\beta^2z^2]^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\mathbf{r}+(\vec{\beta}\cdot\mathbf{r})\vec{\beta}}{[(1-\beta^2)r^2+\beta^2z^2]^{3/2}}$

## Exercício 4

Seja $B_z(r,z;t)$ a componente axial de um campo magnético com simetria axial, $(\partial/\partial\theta)=0$ em coordenadas cilíndricas $(r,\theta,z)$. Considere uma partícula descrevendo órbitas circulares de raio $R$ neste campo. Mostre que o raio da órbita permanece constante se a condição

$$2\pi R^2\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{\partial\phi_m}{\partial t}$$

for satisfeita, onde $\phi_m=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}$ é o fluxo magnético através da superfície de raio $R$. Esta condição é denominada *Condição Betraton*.

Em um campo magnético, um elétron executa órbita circular de raio $r$ e velocidade $v$, de forma que a força centrípeta é dada pela força de Lorentz

$$evB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow erB = mv$$

A força tangencial atuando sobre o elétron é dada por

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(erB)$$

Para manter o raio constante, temos que

$$F = er\frac{dB}{dt}$$

Mas esta força é a feita pelo campo elétrico induzido ao longo da órbita, ou seja,

$$F_e = eE = \frac{e}{2\pi r}\frac{d\phi_m}{dt}$$

Igualando essas duas expressões, temos $2\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \frac{d\phi_m}{dt}$

<u>Exercício 5</u>

O potencial vetor em certa região do espaço é dada por

$$\vec{A}(r,\theta,z) = a\theta\hat{e}_r + (b+cr)\hat{e}_z$$

em coordenadas cilíndricas. Encontre a expressão para a densidade de corrente $\vec{J}$ correspondente.

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \rightarrow \mu_0\vec{J} = \nabla\times\nabla\times\vec{A} - \nabla(\nabla\cdot\vec{A});\ \ \vec{A} = a\varphi\hat{e}_r + (b+cr^2)\hat{e}_z$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{a\varphi}{r};\ \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{a\varphi}{r^2}\hat{e}_r + \frac{a}{r^2}\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla\times\vec{A} = -2cr\hat{e}_\varphi - \frac{a}{r}\hat{e}_z;\ \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \frac{a}{r^2}\hat{e}_\varphi - 4c\hat{e}_z$$

$$\therefore\ \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{a\varphi}{r^2}\hat{e}_r - 4c\hat{e}_z\right]$$

<u>Exercício 6</u>

Considere um meio com uma densidade de carga $\rho$ e uma densidade de corrente $\vec{J}$. Mostre que a densidade de força (força por unidade de volume) no meio é dada por

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}$$

onde $\overleftrightarrow{T}$ é o tensor tensão de Maxwell e $\vec{S}$ o vetor de Poynting

**Solução**

Usando a lei de Faraday e também que não existem monopolos magnéticos a densidade de força pode ser simetrizada, a saber:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} = \epsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{\nabla\times\mathbf{B}}{\mu_0} - \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B} = \epsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + \epsilon_0\mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \left(\frac{\nabla\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right)\times\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial(\mathbf{E}\times\mathbf{B})}{\partial t}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} - \epsilon_0\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) - \epsilon_0\frac{\partial(\mathbf{E}\times\mathbf{B})}{\partial t} \text{ com } \mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{S}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0\left[(\nabla\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\nabla)\,\mathbf{E} - \nabla\left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}}{2}\right)\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \nabla\left(\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}{2}\right)\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0\nabla\cdot\left[\mathbf{E}\mathbf{E} - \left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}}{2}\right)\mathcal{I}\right] + \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left[\mathbf{B}\mathbf{B} - \left(\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}{2}\right)\mathcal{I}\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} \text{ onde } \mathcal{I} \text{ é a matriz identidade}$$

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t};\quad \overleftrightarrow{T} \doteq \epsilon_0\left[\mathbf{E}\mathbf{E} - \left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}}{2}\right)\mathcal{I}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[\mathbf{B}\mathbf{B} - \left(\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}{2}\right)\mathcal{I}\right]$$

Aqui $\mathbf{GG}$ representa o bivetor ou produto tensorial para $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$

Exercício 7

No calibre de Coulomb, $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, o potencial escalar $\phi$ aparece na equação de onda para o potencial vetor $\vec{A}$. Tente eliminar o termo contendo $\phi$ separando a densidade de corrente em duas parcelas, $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, onde $\nabla\times\vec{j}_1 = 0$; $\nabla\cdot\vec{j}_2 = 0$. Mostre então que $\nabla(\partial\phi/\partial t) = \vec{j}_1/\epsilon_0$, de modo que a equação de onda para $\vec{A}$ tem somente $\vec{j}_2$ como fonte.

As componentes $\vec{j}_1$ e $\vec{j}_2$ são as componentes *longitudinal* e *transversal* da densidade de corrente e, como o potencial vetor dó depende da segunda, este calibre é também denominado *Calibre Transversal*.

**Solução**

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{j}_2 + \left[-\mu_0\mathbf{j}_1 + \nabla\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right] = -\mu_0\mathbf{j}_2 \text{ se } \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \mu_0\mathbf{j}_1$$

Exercício 8

Exercício 6.6 do Jackson.

O momento do campo é dado por

$$\vec{P} = \varepsilon_0\int\vec{E}\times\vec{B}dV$$

O campo magnético dentro de uma bobina toroidal é calculado em Física III utilizando a Lei de Ampère,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$$

e, naturalmente, o campo da carga pontual é dado por

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{e}_r$$

Portanto

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi}\mu_0 \frac{NI}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{drdz}{r^2}\hat{e}_z \approx \mu_0 \frac{QNI}{4\pi}\frac{A}{a^2}\hat{e}_z$$

<u>Exercício 9</u>

Exercício 6.9 do Jackson

Veja solução muito bem discutida na seção 6.3 do Livro Bo Thidé: ELECTROMAGNETIC FIELDS AND MATTER

<u>Exercício 10</u>

Exercício 4.11 do Frenkel

A energia eletrostática é dada por (Jackson 1.53)

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\, dV$$

Suponhamos que façamos uma pequena variação na posição das cargas no condutor, <u>sem variar a carga total</u>. Então a variação na energia será

$$\delta W = \frac{1}{2}\left[\int \delta\rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\, dV + \int \rho(\vec{r})\delta\phi(\vec{r})\, dV\right]$$

Essas integrais têm que ser feitas em todo o espaço. Lembrando que em um condutor o potencial eletrostático $\phi(\vec{r})$ é constante e que fora dele é vácuo, ou seja, não há cargas, prossiga para a conclusão final.