O problema do lugar geométrico

Dada uma figura (condição geométrica) queremos determinar uma equação (condição algébrica) que a represente. Ou de maneira recíproca, dada uma equação, qual será a figura geométrica que ela determina.

O lugar geométrico de uma equação (no nosso caso, equações com duas ou três variáveis)

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad g(x, y, z) = 0$$

é o conjunto de todos os pares ou triplas que satisfazem a equação.

<u>Exemplo</u>: A equação $f(x, y) = ax + by + c = 0$ representa uma reta no plano, ou seja, o lugar geométrico de $ax + by + c = 0$ é uma reta.

<u>Exercício</u>:

Encontrar o lugar geométrico determinado pela equação:

$$|x| + |y| - 1 = 0.$$

Solução: note que:

- Se $x > 0$ e $y > 0$

$$x + y - 1 = 0$$

$$\underline{y = -x + 1}$$

- Se $x > 0$ e $y < 0$

$$x - y - 1 = 0$$

$$\underline{y = x - 1}$$

- Se $x < 0$ e $y > 0$

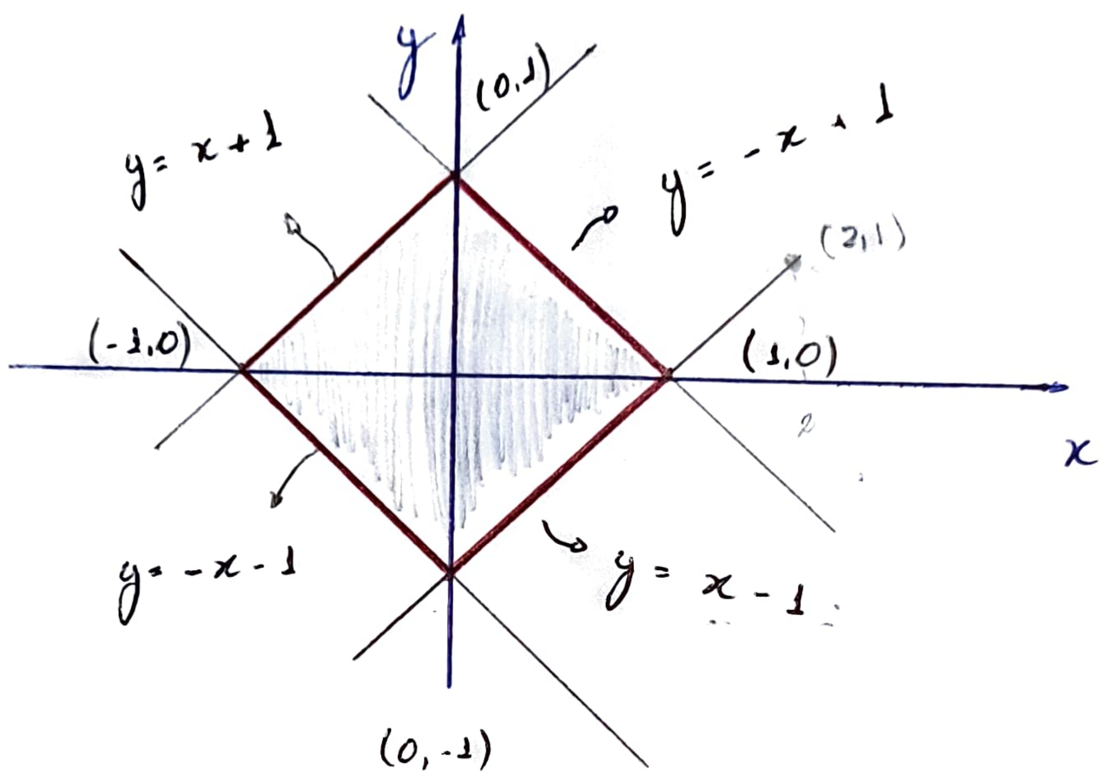
$$-x + y - 1 = 0$$

$$\underline{y = x + 1}$$

- Se $x < 0$ e $y < 0$

$$-x - y - 1 = 0$$

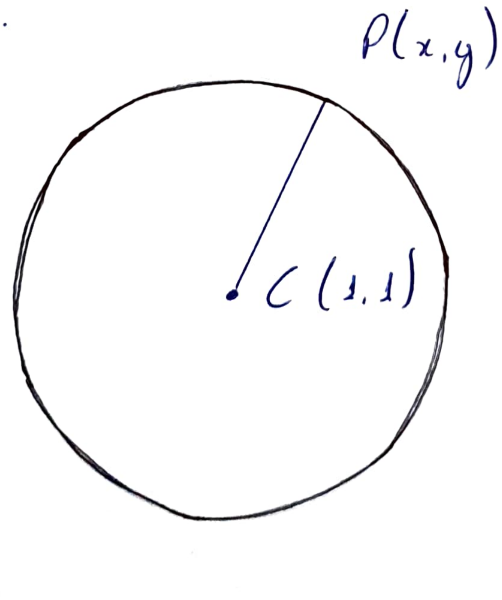
$$\underline{y = -x - 1}$$



Logo, o lugar geométrico determinado pela equação $|x|+|y|-1=0$ é o quadrado de vértices $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$.

Exercício 2:

Determinar a equação do lugar geométrico no plano de todos pontos que estão a uma distância 1 do ponto $C(1,1)$.



Solução:

Se P é um ponto de coordenadas (x,y), então:

$$d(C,P) = \|\overrightarrow{CP}\| = \|(x-1,\ y-1)\|$$
$$= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

Logo, $P(x,y)$ está no nosso lugar geométrico se, e somente se, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Secções Cônicas

Parábolas

1º caso: O eixo da parábola é o eixo dos y.

Equação da parábola de vértice na origem do sistema:

$$\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{PP'}\|$$

ou

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \|\overrightarrow{P'P}\|$$

$$\left\|\left(x-0,\ y-\frac{p}{2}\right)\right\| = \left\|\left(x-x,\ y+\frac{p}{2}\right)\right\|$$

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2 = 0+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}-\cancel{2}y\frac{p}{\cancel{2}}+\cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{y^2}+\cancel{2}y\frac{p}{\cancel{2}}+\cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$x^2-py = yp$$

$$\boxed{x^2 = 2py}$$

Esta equação é chamada equação reduzida da parábola e constitui a forma padrão da equação da parábola de vértice na origem, tendo o eixo como sendo o eixo y.

→ $2py$ será sempre positivo, com isso os sinais p e y são sempre iguais.

p/ $p > 0$ → concavidade p/ cima

$p < 0$ → concavidade p/ baixo

2º Caso: O eixo da parábola é o eixo dos x.

$$\|\vec{PF}\| = \|\vec{PP'}\|$$

ou

$$\|\vec{FP}\| = \|\vec{P'P}\|$$

$$\|(x - \tfrac{p}{2}, y - 0)\| = \|(x + \tfrac{p}{2}, y - y)\|$$

$$\sqrt{(x - \tfrac{p}{2})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x + \tfrac{p}{2})^2}$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{2} p \frac{x}{\cancel{2}} + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + \cancel{2} p \frac{x}{\cancel{2}} + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

$$-px + y^2 = px$$

$$\therefore \boxed{y^2 = 2px}$$

Exercício 1:

Determinar o foco e a equação da diretriz das parábolas $x^2 = 8y$ e $y^2 = -2x$. Construir um esboço do gráfico.

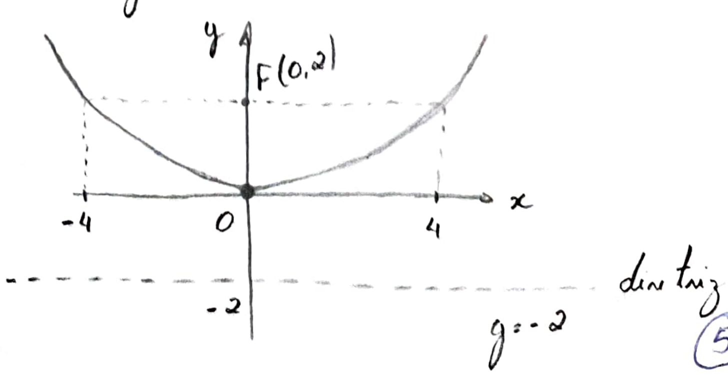
a) $x^2 = 8y$

A equação é da forma: $x^2 = 2py$ $\quad 2p = 8$

$\therefore x^2 = 8y \quad p = 4$ ou $\frac{p}{2} = 2$

Foco: $F(0,2)$

diretriz: $y = -2$



b) $y^2 = -2x$

equação $y^2 = 2px$

logo: $2p = -2$

$p = -1$

$\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$

foco $F(-1/2, 0)$

diretriz $x = \frac{1}{2}$