

Aula 9

Aritmética Binária

SEL 0414 - Sistemas Digitais

Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira

1. SOMA DE DOIS NÚMEROS BINÁRIOS

Álgebra Booleana (OR)

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

Aritmética (+)

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ e "vai um"} = (10)$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ e "vai um"} = (11)$$

"Carry"

1. SOMA DE DOIS NÚMEROS BINÁRIOS

$$\begin{array}{r} 0 \\ + 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

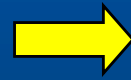
$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 10 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

→ “e vai um”

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ + 1 \\ \hline 11 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

→ “e vai um”

1. Exemplos

Nº 1

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 1 \quad \quad 1 \quad 1 \\
 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\
 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad + \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 11 + \\
 \hline
 36
 \end{array}$$

1. Exemplos

Nº 2

A binary addition diagram. The top row shows the numbers 1001 and 1111 with a plus sign. Above each digit is a carry bit, all of which are 1. A horizontal line separates the addends from the sum. The bottom row shows the result 10000. White arrows point from each carry bit to the sum digit in the column immediately to its right: from the first carry to the first sum digit (1), from the second to the second (1), from the third to the third (0), from the fourth to the fourth (0), and from the fifth to the fifth (0).

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ + 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Conferindo:

A decimal verification calculation. The number 09 is added to 15, with a plus sign. A horizontal line is drawn under 15, and the result 24 is shown below it.

$$\begin{array}{r} 09 \\ + 15 \\ \hline 24 \end{array}$$

1. Exemplos

Nº 3

$$\begin{array}{r}
 1111 \\
 11,011 \\
 10,110 + \\
 \hline
 110,001
 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r}
 3,375 \\
 2,750 + \\
 \hline
 6,125
 \end{array}$$

2. SOMA DE DOIS NÚMEROS BCD

$$\begin{array}{r} 52 \\ 43 + \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0101\ 0010 \\ 0100\ 0011\ + \\ \hline 1001\ 0101 \end{array}$$

2. SOMA DE DOIS NÚMEROS BCD

Quando a soma for maior do que 9?

$\begin{array}{r} 6 \\ 7 + \\ \hline 13 \end{array}$	{	$\begin{array}{r} 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1 + \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$	————→ BCD para 6 ————→ BCD para 7 ————→ BCD Inválido!
--	---	--	---

Somar 6 (0110) ao resultado final para corrigir o código BCD inválido e adicionar o “carry” que será gerado!

2. SOMA DE DOIS NÚMEROS BCD

$$\begin{array}{r}
 26 \\
 57 + \\
 \hline
 83
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \begin{array}{r}
 0010 \quad 0110 \\
 0101 \quad 0111 + \\
 \hline
 0111 \quad 1101 \\
 \hline
 1000 \quad 0011
 \end{array}
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \text{Adicione 6}
 \end{array}$$

8
3

2. SUBTRAÇÃO BINÁRIA

Aritmética (-)

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - 1 = 1 \text{ e "empresta um"}$$



"Borrow"

2. SUBTRAÇÃO BINÁRIA

$$\begin{array}{r} 0 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 10 \text{ (2)} \\ - 1 \text{ (1)} \\ \hline 1 \text{ (2-1=1)} \end{array}$$

“empresta um”
(2 - 1 = 1)

3. Exemplos

Nº 1

$$\begin{array}{r}
 11001 \\
 1011- \\
 \hline
 01110
 \end{array}$$

Conferindo:

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 11- \\
 \hline
 14
 \end{array}$$

3. Exemplos

Nº 2

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 11001- \end{array}$$

?



$$\begin{array}{r} 11 \\ 25- \\ \hline -14 \end{array}$$

4. Números negativos

BIT DE SINAL

Bit mais significativo (MSB) = indicador de sinal:

- se $MSB = 0$ ➡ $\oplus$
- se $MSB = 1$ ➡ $\ominus$

Portanto, o número binário pode ser representado por:

SINAL / MAGNITUDE



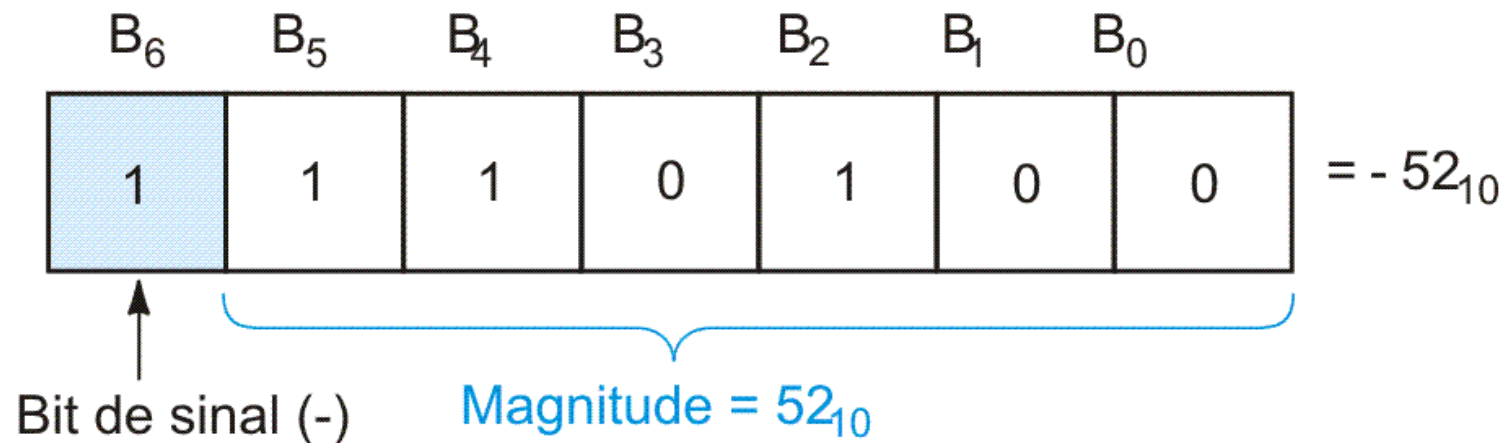
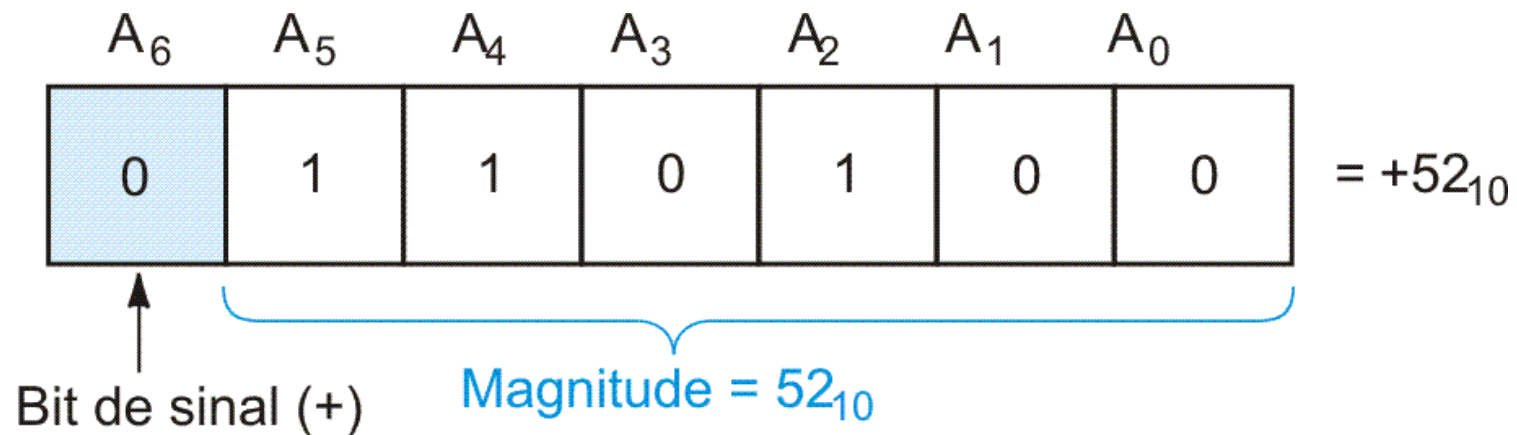
MSB



(n-1) bits restantes

Sistema Sinal-
Magnitude

SISTEMA SINAL-MAGNITUDE



Não é muito utilizado!

5. Complemento de um número

Em binário:

Complemento $\Rightarrow (2^n - 1) - \text{número}$

$\Rightarrow$ substituem-se todos os “0” por “1” e vice-versa

Comp. de 10110 = **01001**

$(2^5 - 1) = 32 - 1 = 31 \Rightarrow 11111$ (31) - 10110 (22) = 01001 (9)

Complemento

Comp. de 11011010 = 00100101

$(2^8 - 1) = 255 \rightarrow 11111111$ (255) - 11011010 (218) = 00100101 (37)

Complemento de 2

Em binário:

Complemento de 2 $\Rightarrow (2^n) - \text{número}$

$\Rightarrow$ substituem-se todos os “0” por “1” e vice-versa

$\Rightarrow$ soma-se “1” ao resultado

Comp. de 2 de 10110 = **01010**

$(2^5) = 32 \Rightarrow 100000 (32) - 10110 (22) = 01010 (10)$

Complemento de 2

Comp. de 2 de 11011010 = **00100110**

$(2^8) = 256 \rightarrow 100000000 (256) - 11011010 (218) = 00100110 (38)$

6. Representação de números com sinal usando complemento de 2

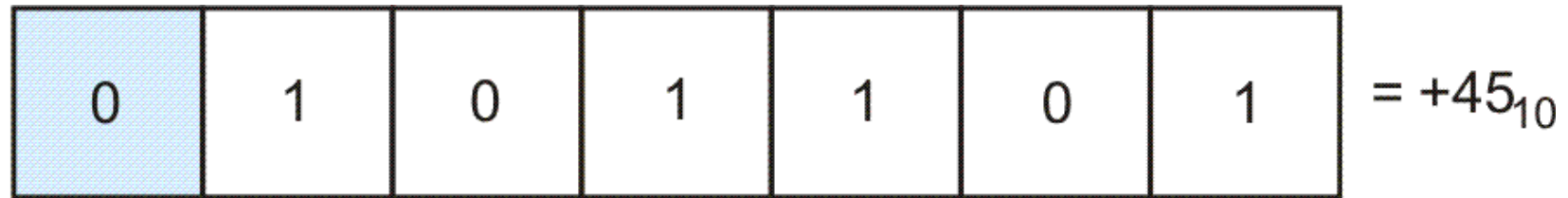
COMPLEMENTO DE 2

Bit mais significativo (MSB) = indicador de sinal:

- se $MSB = 0$ ➡ $\oplus$ SINAL // MAGNITUDE
- se $MSB = 1$ ➡ $\ominus$ SINAL // COMPLEMENTO DE 2

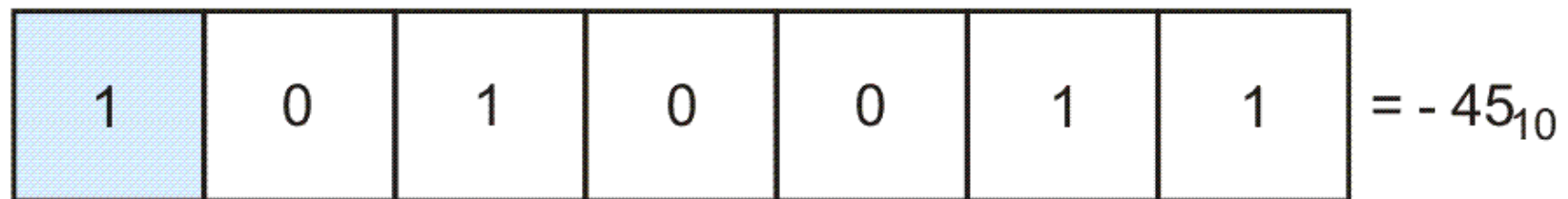
Sistema de
complemento de 2

SISTEMA COMPLEMENTO DE 2



↑
Bit de sinal (+)

Forma binária direta



↑
Bit de sinal (-)

Complemento de 2

Muito utilizado!

Exemplos 1

+13 $\Rightarrow$ 01101

- 9 $\Rightarrow$ 01001 $\Rightarrow$ 10110 + 1 $\Rightarrow$ 10111

- 8 $\Rightarrow$ 01000 $\Rightarrow$ 10111 + 1 $\Rightarrow$ 11000

Exemplos 2

01100 $\Rightarrow$ + 12

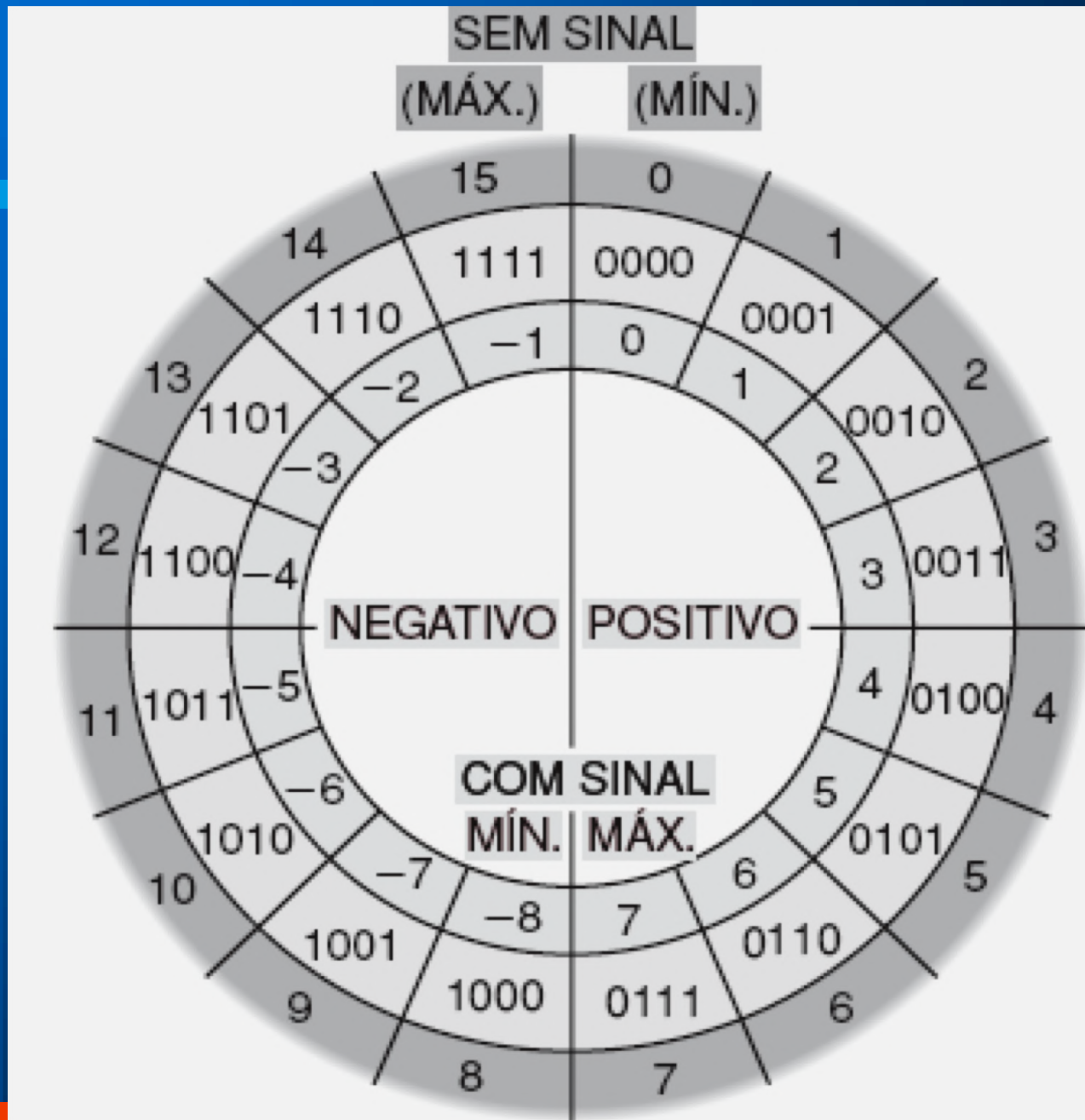
6
└───┘

11010 $\Rightarrow$ 00101 + 1 $\Rightarrow$ 00110 $\Rightarrow$ - 6

15
└───┘

10001 $\Rightarrow$ 01110 + 1 $\Rightarrow$ 01111 $\Rightarrow$ - 15

SISTEMA COMPLEMENTO DE 2



Subtração como soma de complementos

Subtração = soma com o complemento do subtraendo

$$A - B = A + (-B)$$

Em decimal, por ex.: $8 - 6 = 2$

Complemento de 6 = 4



$$\begin{array}{r} 8 \\ + 4 \\ \hline \cancel{1} 2 \end{array}$$

Vídeo Youtube: How to Subtract By Adding

Negação

Negamos um número calculando seu complemento de 2

$$+13 = 01101$$



$$-13 = 10010 + 1 = 10011$$



$$+13 = 01100 + 1 = 01101$$

7. Subtração por complemento de 2

Ex1: $\begin{array}{r} 51 \\ - 18 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} 0110011 \\ 0010010 - \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{comp. 2: } 1101110$

$\begin{array}{r} 0110011 \\ 1101110 + \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{1}0100001 \\ \hline \end{array}$



Resultado final (+33)

Desprezado quando
estiver à esquerda
do bit de sinal

7. Subtração por complemento de 2

Ex2:
$$\begin{array}{r} 18 \\ 51 - \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0010010 \\ 0110011 \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{comp. 2: } 1001101$$

$$\begin{array}{r} 0010010 \\ 1001101 + \\ \hline 1011111 \end{array} \rightarrow 0100001$$

33

Resultado final (-33)

0's e 1's à esquerda

A quantidade de 0's colocados à esquerda de um número positivo ou 1's colocados à esquerda de um número negativo não altera seu valor

$$+13 = 01101$$



$$+13 = 00001101$$

$$-13 = 10010 + 1 = 10011$$



$$-13 = 1110011$$

Usado para representar qualquer número binário, positivo ou negativo, com o número de bits desejado.

7. Subtração por complemento de 2

Ex3:
$$\begin{array}{r} 5 \\ 25 - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11001 - \end{array}$$

$$= \begin{array}{r} 000101 \\ 011001 - \end{array}$$

Preencha com zeros à esquerda até que os bits de sinal fiquem alinhados

$$\begin{array}{r} 000101 \\ 100111 + \\ \hline 101100 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 010100 \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \\ 20 \end{array}$$

Resultado final (-20)

7. Subtração por complemento de 2

Ex4:
$$\begin{array}{r} 25 \\ - 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11001 \\ - 101 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{r} 011001 \\ - 000101 \\ \hline \end{array}$$

Preencha com zeros à esquerda até que os bits de sinal fiquem alinhados

$$\begin{array}{r} 011001 \\ 111011+ \\ \hline \end{array}$$

~~1~~010100

Resultado final (+20)

Desprezado quando estiver à esquerda do bit de sinal

8. Representação de números com sinal usando complemento de 2

FAIXA COMPLETA DE VALORES QUE PODEM SER REPRESENTADOS

$$- 2^{(n-1)} \Rightarrow + (2^{(n-1)} - 1)$$

sendo **n** o número de bits

Exemplo

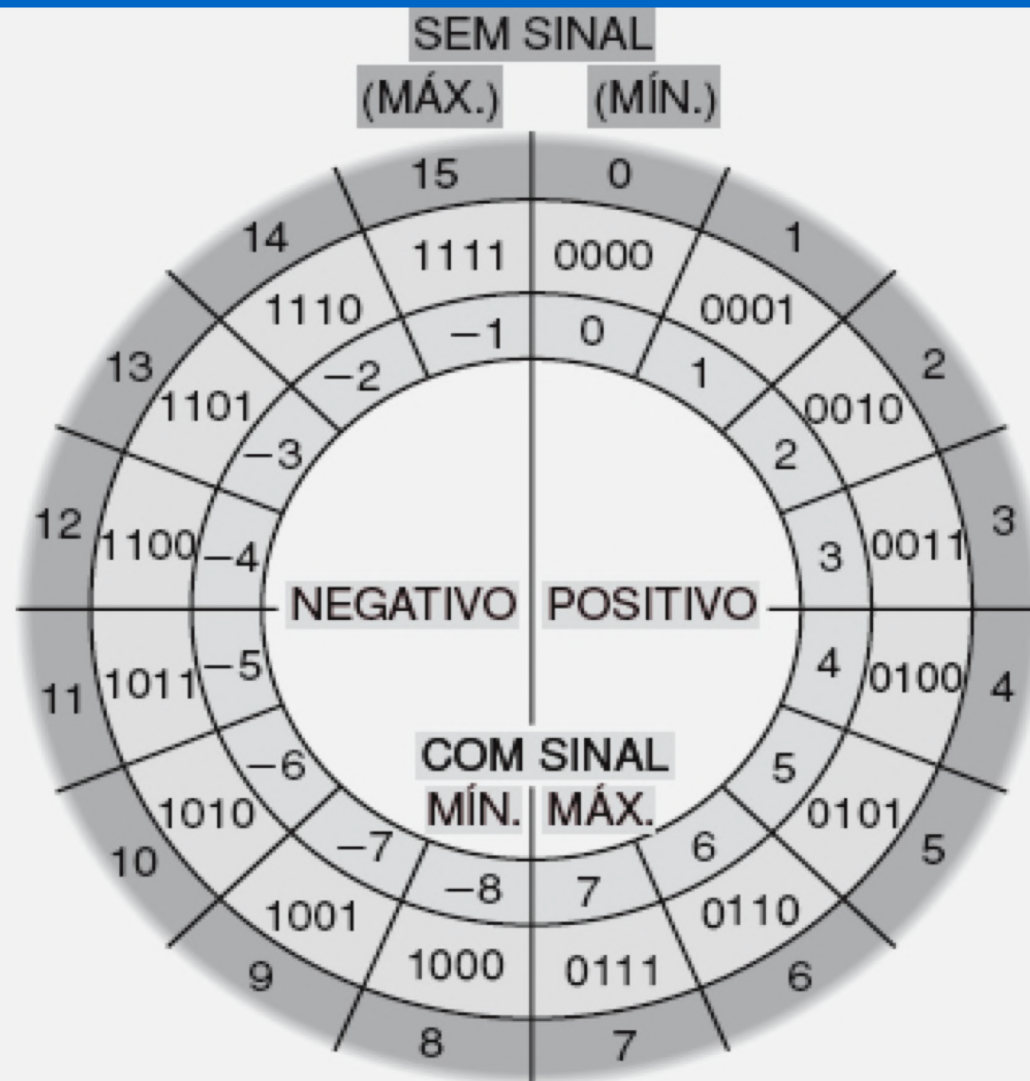
“Quantos números **com sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”

$$-(2^{n-1}) \Rightarrow +(2^{n-1} - 1) = 1000 (-8) \Rightarrow 0111 (+7)$$

“Quantos números **sem sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”

$$2^n = 16 \Rightarrow 0 \rightarrow 15$$

“Quantos números **com sinal** podem ser representados utilizando 4 bits?”



Caso especial de complemento de 2

$$1000 \Rightarrow 0111 + 1 \Rightarrow 1000$$



“Sempre que o número com sinal tiver um 1 no bit de sinal e zero em todos os outros bits, seu equivalente decimal será -2^n , sendo n o número de bits da magnitude”

$$\begin{aligned} 1000 &= -2^3 = -8 \\ 10000 &= -2^4 = -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 01000 &= +8 \\ 010000 &= +16 \end{aligned}$$

9. Overflow

Ex1:
$$\begin{array}{r} 18 \\ 60 + \\ \hline \end{array}$$

Pode ser representado com 5 bits. Precisa de 6 bits para representar o sinal

0 0 1 0 0 1 0

0 1 1 1 1 0 0 +

Pode ser representado com 6 bits. Precisa de 7 bits para representar o sinal

1 0 0 1 1 1 0

→ 78 (precisa de 7 bits!)

Não é bit de sinal!

O resultado não pode ser representado com 6 bits, pois é maior do que $2^6 = 64$!

Com bit de sinal, seriam necessários 8 bits!

→ 0 1 0 0 1 1 1 0 → +78 (precisa de 8 bits!)

9. Overflow

Ex2: -18
 -60

 $-(18+60)$

0 0 1 0 0 1 0

0 1 1 1 1 0 0 +

0 1 0 0 1 1 1 0

→ +78 (precisa de 8 bits!)

bit de sinal!

comp. 2: 1 0 1 1 0 0 1 0

Resultado final (-78)

9. Overflow

Ex2: -18
 -60

Precisa ser representado com
no mínimo 6 bits

1 1 0 1 1 1 0

1 0 0 0 1 0 0 +

Precisa ser representado com
no mínimo 7 bits

1 0 1 1 0 0 1 0

→ (precisa de 8 bits!)

bit de sinal!

comp. 2: 0 1 0 0 1 1 1 0

78

Resultado final (-78)

9. Overflow

- Só pode ocorrer overflow quando dois números positivos ou dois números negativos são somados. Assim, não pode haver mudança de sinal na resposta.
- Nesse caso, a necessidade de um bit extra é detectada quando o bit de sinal da resposta é diferente dos números somados.
- Quando isso ocorrer, um bit de sinal deve ser adicionado no bit mais significativo.

10. MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

$$\begin{array}{r} 11001 \\ 11x \\ \hline 11001 \\ 11001 \\ \hline 1001011 \end{array}$$

$$25 \times 3 = 75$$

10. MULTIPLICAÇÃO BINÁRIA

Multiplicamos um número binário por 2 cada vez que seus bits são rotacionados para a **esquerda** e o **zero** é colocado no bit **menos** significativo.

$$\begin{array}{rcccl} & 1 & 0 & 0 & 1 & = & 9 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & = 9 \times 2 = 18 \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & = 9 \times 4 = 36 \end{array}$$

11. DIVISÃO BINÁRIA

Dividimos um número binário por 2 cada vez que seus bits são rotacionados para a **direita** e o **zero** é colocado no bit **mais** significativo.

Atenção: Usar vírgula quando o bit menos significativo for igual a 1!

$$1\ 0\ 0\ 1\ 0 = 18$$


$$0\ 1\ 0\ 0\ 1 = 18 : 2 = 9$$


$$0\ 0\ 1\ 0\ 0, 1 = 18 : 4 = 4,5$$


$$0\ 0\ 0\ 1\ 0, 0\ 1 = 18 : 8 = 2,25$$

11. DIVISÃO BINÁRIA

A | B
R Q

25 | 2
1 12

1	1	0	0	1		1	0
-1	0					1	1
						0	0
0	1	0					
-	1	0					
0	0	0					
-	0	0					
0	0	1					
-	0	0					
0	1						

11. DIVISÃO BINÁRIA

$$25 \div 2 = 12,5$$

$$\begin{array}{r}
 11001 \overline{) 10} \\
 \underline{-10} \\
 010 \\
 \underline{-10} \\
 0001 \\
 00010 \\
 \underline{-10} \\
 00000
 \end{array}$$

Diagram illustrating the binary division of 25 (11001) by 2 (10). The quotient is 12,5 (1100,1). The process shows the division of the dividend by the divisor, with the remainder being shifted and the quotient being built up. The final result is 1100,1.

Exercícios

1. $100011 \div 101 \Rightarrow (111)$

2. $100111 \div 110 \Rightarrow (110,1)$

3. $21 - 13 \Rightarrow (01000)$

4. $14 - 17 \Rightarrow (111101)$



FIM