Gabarito Primeira Lista de Exercícios

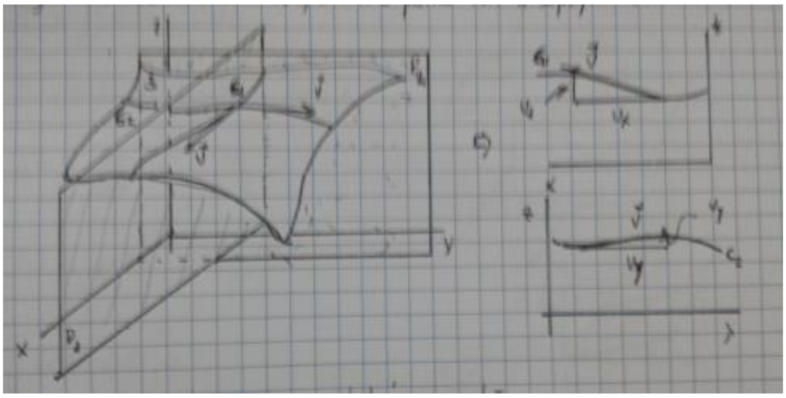
Exercício 1

O vetor normal à superfície é especificado por

$$\hat{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores tangentes à superfície. Suponhamos a equação da superfície dada por $F(x, y, z) = C \ \rightarrow constante$.

Para determinar esses vetores, tomamos dois planos paralelos aos planos coordenados e utilizamos vetores tangentes às curvas de intersecção desses planos com a superfície S.



Tomemos as componentes u_x e v_y arbitrárias; então

$$\vec{u} = u_x \hat{e}_x + u_z \hat{e}_z = u_x \hat{e}_x + \left(\frac{dz}{dx}\right)_{y;\mathrm{C}_1} u_x \hat{e}_z; \ \ \vec{v} = v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z = v_y \hat{e}_y + \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x;\mathrm{C}_2} v_y \hat{e}_z$$

Ao longo da curva C_1: $F(x, y, z) = C; z = z(x); x$ variável; portanto

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}_1} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \rightarrow \vec{u} = \frac{u_x}{\partial F/\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\hat{e}_x - \frac{\partial F}{\partial x}\hat{e}_x\right]$$

Fazendo o mesmo raciocínio ao longo da curva C_2, onde $z = z(y); y$ variável, obtemos

$$\vec{v} = \frac{v_y}{\partial F/\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\hat{e}_y - \frac{\partial F}{\partial y}\hat{e}_z\right]$$

Portanto

$$\vec{u} \times \vec{v} = \frac{u_x v_y}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \hat{e}_z + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}\hat{e}_y\right] = \frac{u_x v_y}{\partial F/\partial z}\nabla F$$

$$\rightarrow \ \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

Exercício 2

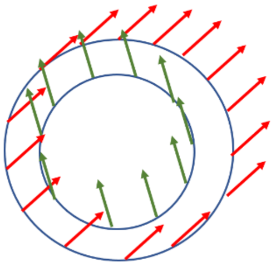
$$\nabla\cdot\vec{r}=\left(\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\hat{e}_\varphi}{r\sin\theta}\right)\cdot(r\hat{e}_r)=\frac{\partial r}{\partial r}\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r+\hat{e}_\theta\cdot\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}+\frac{\hat{e}_\varphi}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\varphi}=3$$

$$\nabla\times\vec{r}=\left(\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\hat{e}_\varphi}{r\sin\theta}\right)\times(r\hat{e}_r)=\hat{e}_r\times\hat{e}_r+\hat{e}_\theta\times\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}+\frac{\hat{e}_\varphi}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\varphi}$$
$$=\hat{e}_r\times\hat{e}_r+\hat{e}_\theta\times\hat{e}_\theta+\hat{e}_\varphi\times\hat{e}_\varphi=0$$

$$\nabla^2\vec{r}=\nabla(\nabla\cdot\vec{r})-\nabla\times\nabla\times\vec{r}=0$$

Exercício 3

Um engano comum dos alunos é considerarem $\vec{F}=\vec{r}=r\hat{e}_r$ seja função somente de r. Isto não está correto porque o versor $\hat{e}_r$ é uma função de (θ,φ)! Uma função vetorial que só dependa de r não pode ter sua direção variando com os ângulos. Um exemplo é dado na figura. Portanto, a solução do exercício em coordenadas esféricas é trivial.



$$\nabla\cdot\vec{F}=\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\cdot\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{F}}{dr}$$

Em coordenadas cartesianas, temos

$$\nabla\cdot\vec{F}=\sum_i\frac{\partial F_i}{\partial x_i}=\sum_i\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{dF_i}{dr}=\sum_i\frac{x_i}{r}\frac{dF_i}{dr}=\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{d\vec{F}}{dr}$$

$$\nabla F(r)=\sum_i\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{dF}{dr}\hat{e}_i=\sum_i\frac{x_i}{r}\frac{dF}{dr}\hat{e}_i=\frac{dF}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

Exercício 4

$$\hat{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y+\cos\theta\,\hat{e}_z$$

$$\hat{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y-\sin\theta\,\hat{e}_z$$

$$\hat{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\hat{e}_x+\cos\varphi\,\hat{e}_y$$

Portanto

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\varphi}=-\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_x+\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_y=\sin\theta\left[-\sin\varphi\,\hat{e}_x+\cos\varphi\,\hat{e}_y\right]=\sin\theta\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\varphi}=-\cos\theta\sin\varphi\,\hat{e}_x+\cos\theta\cos\varphi\,\hat{e}_y=\cos\theta\left[-\sin\varphi\,\hat{e}_x+\cos\varphi\,\hat{e}_y\right]=\cos\theta\,\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\cos\varphi\,\hat{e}_x-\sin\varphi\,\hat{e}_y=-[(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2]\left(\cos\varphi\,\hat{e}_x+\sin\varphi\,\hat{e}_y\right)$$
$$=-\sin\theta\,\hat{e}_r-\cos\theta\hat{e}_\theta$$

Exercício 5

$$\nabla\cdot\vec{F}=\left(\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\hat{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot\left(F_r\hat{e}_r+F_\theta\hat{e}_\theta+F_\varphi\hat{e}_\varphi\right)=$$

$$=\left[\frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{F_r}{r}+\frac{F_r}{r}\right]+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{F_\theta}{r\sin\theta}\cos\theta\right]+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right]=$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

Exercício 6

Segunda Identidade de Green:

$$\int[\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi]dV=\int\left[\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]dS$$

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|};\ \ \nabla^2\psi=-\delta(\vec{r}-\vec{r}');\ \ \ \nabla^2\phi=-\rho/\epsilon_0$$

$$\int\left[-\phi\delta(\vec{r}-\vec{r}')+\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\rho}{\epsilon_0}\right]dV=\int\left[\frac{\phi}{4\pi}\hat{n}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)-\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\hat{n}\cdot\nabla\phi\right]dS$$

Fazendo o intercâmbio $\vec{r}\rightleftarrows\hat{r}'$, considerando que a função delta é simétrica com relação às estas variáveis, temos

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'+\oint\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\phi-\phi\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\right]\cdot d\vec{S}';d\vec{S}'=\hat{n}dS'$$

Exercício 7

$$\varepsilon=\oint\vec{E}'\cdot d\vec{\ell}=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}+\oint\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell}$$

Neste problema

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0;\ \ \vec{v}\parallel d\vec{\ell}\ \Longrightarrow\ \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{\ell}=0\ \ \therefore\varepsilon=0$$

Explicação física: para que haja variação de fluxo dentro da área de um circuito fechado, é necessário que as linhas de força de $\vec{B}$ atravessem seu perímetro. Neste problema, a anel girante permite que o fio se desenrole sem nunca cruzar as linhas de força!

Exercício 8

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}\ \rightarrow\mu_0\vec{J}=\nabla\times\nabla\times\vec{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right);\ \ \vec{A}=a\varphi\hat{e}_r+(b+cr^2)\hat{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{a\varphi}{r};\ \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{a\varphi}{r^2}\hat{e}_r + \frac{a}{r^2}\hat{e}_\varphi$$

$$\nabla \times \vec{A} = -2cr\hat{e}_\varphi - \frac{a}{r}\hat{e}_z;\ \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{a}{r^2}\hat{e}_\varphi - 4c\hat{e}_z$$

$$\therefore\ \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{a\varphi}{r^2}\hat{e}_r - 4c\hat{e}_z\right]$$

<u>Exercício 9</u> Solução encaminhada, de forma mais completa, na aula de 2 de abril.

<u>Exercício 10</u>

A primeira parte deste problema não está bem formulada, porque, para encontrar uma solução, é necessário supor que o campo magnético tenha simetria azimutal com relação a qualquer eixo vertical z. Estou procurando uma solução mais clara para essa parte e vou disponibilizá-la logo que a formular.

A segunda parte é bastante direta. A Lei de Faraday nos fornece

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \int (\nabla \times \vec{E}).d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Tomando a integral de linha sobre um círculo de raio r, e considerando que o campo magnético não varia com o ângulo azimutal, de forma que o campo induzido também não deve variar, obtemos o resultado.

<u>Condição Betatron</u>

Em um campo magnético, uma elétron executa órbita circular de raio r e velocidade v, de forma que a força centrípeta é dada pela força de Lorentz

$$evB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow erB = mv$$

A força tangencial atuando sobre o elétron é dada por

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(erB)$$

Para manter o raio constante, temos que

$$F = er\frac{dB}{dt}$$

Mas esta força é a feita pelo campo elétrico induzido ao longo da órbita, ou seja,

$$F_e = eE = \frac{e}{2\pi r}\frac{d\phi_m}{dt}$$

Igualando essas duas expressões, temos $2\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \frac{d\phi_m}{dt}$