

EXERCÍCIO 1 – Usando o método de série de potências para resolver a E.D.O. $-3x\ddot{y}(x) + 2\dot{y}(x) + y(x) = 0$, em torno do ponto $x_0 = 1$, pede-se:

- a) Determine a relação de recorrência para os coeficientes da série de potências;
- b) Determine duas soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$;
- c) Determine os dois primeiros termos diferentes de zero de cada solução linearmente independente $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

EXERCÍCIO 2 – Usando o método de série de potências, encontre duas soluções linearmente independentes da equação de Airy $\ddot{y}(x) - xy(x) = 0$, $-\infty < x < +\infty$:

- a) Em torno do ponto $x_0 = 0$;
- b) Em torno do ponto $x_0 = 1$.

EXERCÍCIO 3 – Usando o método de série de potências, encontre duas soluções linearmente independentes da equação $(1 + x^2)\ddot{y}(x) - 4x\dot{y}(x) + 6y(x) = 0$:

- a) em torno do ponto $x_0 = 0$.
- b) em torno do ponto $x_0 = 1$;

EXERCÍCIO 4 – Encontre a solução geral das seguintes equações de Legendre:

- a) $(1 - x^2)\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + 2y(x) = 0$;
- b) $(1 - x^2)\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + 6y(x) = 0$.

EXERCÍCIO 5 – Usando o método de Fröbenius, encontre a solução geral das seguintes E.D.O.s, em torno do ponto $x_0 = 0$:

- a) $x^2\ddot{y}(x) + (x^2 + x)\dot{y}(x) - y(x) = 0$;
- b) $x\ddot{y}(x) + 3\dot{y}(x) - y(x) = 0$;
- c) $x\ddot{y}(x) + \dot{y}(x) - 4y(x) = 0$.

EXERCÍCIO 6 – Encontre a solução geral das seguintes equações de Bessel:

- a) $x^2\ddot{y}(x) + x\dot{y}(x) - \left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)y(x) = 0$;
- b) $x^2\ddot{y}(x) + 2x\dot{y}(x) + (x^2 - 1)y(x) = 0$.

EXERCÍCIO 7 – As funções de Bessel de primeiro tipo e ordens zero e um são dadas por:

$$J_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

e

$$J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (n+1)! 2^{2n+1}}$$

Dessa forma, pede-se:

- a) Prove que tanto J_0 como J_1 convergem $\forall x \in \mathbb{R}$;
- b) Prove que $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$;
- c) Prove que $xJ_0(x) = \frac{d}{dx}(xJ_1(x))$.

EXERCÍCIO 8 – Usando o item c) do exercício anterior, prove que as seguintes funções de Bessel

$$J_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

e

$$J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (n+1)! 2^{2n+1}}$$

são soluções da equação de Bessel

$$x^2 \ddot{y}(x) + x \dot{y}(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$