# Teorema da Função Inversa e Teorema da Função Implícita

# O que queremos estudar

## IIntrodução: Ponto de vista algébrico

- Queremos estudar um sistema não linear de $q$ equações a $p$ incónitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_p) = b_1 \\ f_2(x_1,\ldots,x_p) = b_2 \\ \vdots \\ f_q(x_1,\ldots,x_p) = b_q \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = b. \tag{1}$$

Aqui, podemos considerar $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$, de classe $C^1$.

# O que queremos estudar

## IIntrodução: Ponto de vista algébrico

- Queremos estudar um sistema não linear de $q$ equações a $p$ incónitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_p) = b_1 \\ f_2(x_1,\dots,x_p) = b_2 \\ \qquad\vdots \\ f_q(x_1,\dots,x_p) = b_q \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = b. \tag{1}$$

  Aqui, podemos considerar $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$, de classe $C^1$.

- Perguntas que queremos responder:

  (a) Para um dado $b = \overline{b}$, sob que condições a (supondo que exista) é única?

# O que queremos estudar

## IIntrodução: Ponto de vista algébrico

- Queremos estudar um sistema não linear de $q$ equações a $p$ incónitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_p) = b_1 \\ f_2(x_1,\ldots,x_p) = b_2 \\ \qquad\vdots \\ f_q(x_1,\ldots,x_p) = b_q \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = b. \tag{1}$$

Aqui, podemos considerar $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$, de classe $C^1$.

- Perguntas que queremos responder:

(a) Para um dado $b = \overline{b}$, sob que condições a (supondo que exista) é única?

(b) Se ela é única em $A \subset \Omega$ para um determinado valor de $\overline{b}$, que acontece para $b$ perto de $\overline{b}$? A solução continua única? E está perto ou distante da solução relativa a $\overline{b}$?

# O que queremos estudar

## Introdução: Ponto de vista algébrico

- Mais perguntas:
  (c) Sob que condições o fato de haver solução para um dado valor de $b = \overline{b}$, haverá solução também para $b$ perto de $\overline{b}$?

# O que queremos estudar

## Introdução: Ponto de vista algébrico

- Mais perguntas:

  (c) Sob que condições o fato de haver solução para um dado valor de $b = \overline{b}$, haverá solução também para $b$ perto de $\overline{b}$?

  (d) Sob tais condições, o conjunto de soluções associado a $b$ perto de $\overline{b}$ é "*parecido*" com o conjunto de soluções associado a $b = \overline{b}$? Em que sentido?

# O que queremos estudar

## Introdução: Ponto de vista algébrico

- Mais perguntas:

  (c) Sob que condições o fato de haver solução para um dado valor de $b = \overline{b}$, haverá solução também para $b$ perto de $\overline{b}$?

  (d) Sob tais condições, o conjunto de soluções associado a $b$ perto de $\overline{b}$ é "*parecido*" com o conjunto de soluções associado a $b = \overline{b}$? Em que sentido?

  (e) Em que sitações tem-se *existência, unicidade e dependência contínua de solução* com respeito ao parâmetro $b$? (Isto é, sob que condições "*o problema é bem posto*"?

# O que queremos estudar

## Introdução: Ponto de vista algébrico

- Mais perguntas:

  (c) Sob que condições o fato de haver solução para um dado valor de $b = \overline{b}$, haverá solução também para $b$ perto de $\overline{b}$?

  (d) Sob tais condições, o conjunto de soluções associado a $b$ perto de $\overline{b}$ é "*parecido*" com o conjunto de soluções associado a $b = \overline{b}$? Em que sentido?

  (e) Em que sitações tem-se *existência, unicidade e dependência contínua de solução* com respeito ao parâmetro $b$? (Isto é, sob que condições "*o problema é bem posto*"?

- Nesta parte da disciplina discutiremos essas questões e apresentaremos os principais resultados sobre o assunto.

# Teorema da Função Injetora

## Teorema da Função Injetora - Enunciado

**carácter "local":**
**f(x,y) =(e^x cos y, e^x sen y, 0)**

### Teorema 1.

**(Teorema da Função Injetora)**

- $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ *de classe* $C^1$*;*
- $\overline{x} \in \Omega$*;*
- $Df(\overline{x}) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ *injetora.*

**Homeomorfismo, preservação de compacidade e conexidade**

*Então existe* $\delta > 0$ *tal que*

**f(x,y) = (x,y,0)** **Im f é um plano.**

- $B_\delta[\overline{x}] \subset \Omega$*;*
- $f|_{B_\delta[\overline{x}]} : B_\delta[\overline{x}] \to \mathbf{R}^q$ *é injetora;*
- *A inversa da induzida* $\widetilde{f} = f|_{B_\delta[\overline{x}]} : B_\delta[\overline{x}] \to f(B_\delta[\overline{x}])$ *é contínua.*

# Teorema da Função Injetora

## Teorema da Função Injetora - Informações sobre o sistema (1)

- Note das hipóteses decorre que $p \leq q$.
- Pondo $\overline{b} = f(\overline{x})$, o teorema informa, sobre o sistema (1):

  Em $B_\delta[\overline{x}]$ há unicidade de solução $x_{\overline{b}}$ no caso em que $b = \overline{b} = f(\overline{x})$ (portanto, temos existência e unicidade nesse caso, pois $x_{\overline{b}} = \overline{x}$ ),

  Se $b$ variar pouco na imagem de $\widetilde{f}$, continua a existir uma única solução $x_b$ em $B_\delta[\overline{x}]$, e ela depende continuamente de $b$.

- Nas hipóteses, se $b_n \to \overline{b}$ em $f(B_\delta[\overline{x}])$ então

$$x_{b_n} \to x_{\overline{b}} = \overline{x}.$$

# Teorema da Função Injetora

## Teorema da Função Injetora - Uma pergunta interessante...

• Uma pergunta aparentemente natural é se nas condições do teorema, "a inversa de $\widetilde{f}$ seria diferenciável em $f(\overline{x})$ (e, quem sabe, $C^1$!) mas essa pergunta nem faz sentido a menos que $\overline{y} = f(\overline{x})$ seja um ponto interior da imagem de $\widetilde{f}$.

Por outro lado, se ela for diferenciável resulta que:
$\widetilde{f} \circ \widetilde{f}^{-1}$ é a identidade e portando, pela regra da cadeia teríamos $D\widetilde{f}(\overline{x}) \circ D(\widetilde{f}^{-1})(\overline{y}) = D\widetilde{f}(\widetilde{f}^{-1})(\overline{y}) \circ D(\widetilde{f}^{-1})(\overline{y}) = I$ e portando $D\widetilde{f}(\overline{x})$ seria inversível e $D(\widetilde{f}^{-1})(\overline{y})$ seria sua inversa.

# Teorema da Função Sobrejetora

## Teorema da Função Sobrejetora - Enunciado

**carácter "local":**
**f(x,y,z) =(e^x cos y, e^x sen y)**

### Teorema 2.

**(Teorema da Função Sobrejetora)**

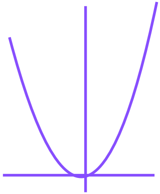
- $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ *de classe* $C^1$;
- $\overline{x} \in \Omega$;
- $Df(\overline{x}) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ *sobrejetora.*

*Então existem* $m > 0$ *e* $\alpha > 0$ *tais que*

- $B_{\frac{\alpha}{2m}}[f(\overline{x})] \subset f(B_\alpha[\overline{x}])$.

**Contra-Exemplo**
**f(x) = x^2,**
**xbarra = 0**

**[0]**



**A não quadrada**
**AB = I**
**CA = I**

# Teorema da Função Sobrejetora

## Teorema da Função Sobrejetora - Informações sobre o sistema (1)

- Note das hipóteses decorre que $p \geq q$.
- O teorema responde que:

Para qualquer $b$ na bola $B_{\frac{\alpha}{2m}}[f(\overline{x})]$ o sistema (1) tem solução na bola $B_\alpha[\overline{x}]$ (respondendo sobre existência de solução quando o parâmetro $b$ está perto de $\overline{b} = f(\overline{x})$).

Mais ainda, há uma certa continuidade: para $0 < \alpha_0 < \alpha$, vale uma conclusão análoga.
Assim, se $\overline{b}$ sofre uma pequena perturbação desprezível as soluções (que podem não ser únicas) $x_b$ em $B_\alpha[\overline{x}]$ resultam aproximações de $\overline{x}$ com perturbações também desprezíveis

# Teorema da Função Aberta

## Teorema da Função Aberta - Enunciado

**carácter "global":**
**f(x,y,z) =(e^x cos y, e^x sen y)**

**Teorema 3.**

**(Teorema da Função Aberta)**

- $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ *de classe* $C^1$;
- $Df(x) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ *sobrejetora*, $\forall x \in \Omega$.

*Então:*

- $G \subset \Omega$ *aberto* $\Longrightarrow f(G) \subset \mathbf{R}^q$ *aberto.*

# Teorema da Função Aberta

## Teorema da Função Aberta - Comentários

- Note das hipóteses decorre que $p \geq q$.
- O teorema fala de uma propriedade válida para funções contínuas com inversa contínua, mas no caso, $f$ pode nem sequer ser inversível.

Difeomorfismo

# Teorema da Função Inversa

## Teorema da Função Inversa - Enunciado

carácter "local":
f(x,y) =(e^x cos y, e^x sen y)

f: R^2 —> R^2
que leve cada
circunferência
num quadrado
não pode ser
difeomorfismo.

**Teorema 4.**

**(Teorema da Função Inversa)**

- $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ *de classe* $C^1$;
- $\overline{x} \in \Omega$;
- $Df(\overline{x}) : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ *bijetora.*

*Então existe* $U \subset \Omega$ *vizinhança aberta de* $\overline{x}$ *tal que*

- $V = f(U)$ *é vizinhança aberta de* $f(\overline{x})$;
- *A induzida* $\widetilde{f} = f|_U : U \to V$ *é bijetora com inversa contínua.*
- *Mais:* $g = \widetilde{f}^{-1} : V \to U$ *é de classe* $C^1$ *e*

$$Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}, \forall y \in V.$$

# Teorema da Função Inversa

## Teorema da Função Inversa - Informações sobre o sistema (1)

- Note das hipóteses consideramos que "$p = q$". Isso porquê para ter $Df(\overline{x})$ bijetora, é o único caso.
- O teorema junta as consequências dos teoremas da Função Injetora e da Função Sobrejetora, garantindo assim existência e unicidade de solução $x_b$ numa vizinhança conveniente $U$ de $\overline{x}$ para o sistema (1) se $b$ estiver em $V = f(U)$, e que $x_b$ depende continuamente de $b$ nessa situação.
- O teorema diz mais (com o auxílio do Teorema da Função Aberta, $V = f(U)$ é aberto): diz que a função $b \in V \mapsto x_b \in U$ é de classe $C^1$, e fornece sua diferencial em cada ponto!

# Teorema da Função Implícita

## O que queremos estudar - Ponto de vista algébrico

- Queremos estudar um sistema não linear de $q$ equações a $p+q$ incónitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)=b_1 \\ f_2(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ f_q(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q)=b_q \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x,y)=b. \tag{2}$$

Aqui, podemos considerar $f:\Omega=\Omega^\circ\subset\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$, de classe $C^1$.

# Teorema da Função Implícita

## O que queremos estudar - Ponto de vista algébrico

- Queremos estudar um sistema não linear de $q$ equações a $p+q$ incónitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) = b_1 \\ f_2(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_q(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_q) = b_q \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x,y) = b. \tag{2}$$

  Aqui, podemos considerar $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$, de classe $C^1$.

- Veja que o sistema (2) é um caso particular do sistema (1).

# Teorema da Função Implícita

## O que queremos estudar - Ponto de vista algébrico

- Perguntas que queremos responder:

  (a) Para um dado $b = \overline{b} \in \mathbf{R}^q$ para o qual o sistema tenha uma solução $(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, como é o conjunto de soluções, pelo menos perto de $(\overline{x}, \overline{y})$?

# Teorema da Função Implícita

## O que queremos estudar - Ponto de vista algébrico

- Perguntas que queremos responder:

  (a) Para um dado $b = \overline{b} \in \mathbf{R}^q$ para o qual o sistema tenha uma solução $(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, como é o conjunto de soluções, pelo menos perto de $(\overline{x}, \overline{y})$?

  (b) Isto é, como é a curva de nível $\overline{b}$ de $f$ perto de $(\overline{x}, \overline{y})$?

- Não há perda de generalidade em estudar o caso em que $b = O$.

# Teorema da Função Implícita

## Teorema da Função Implícita - Enunciado

**2 circunferências,**
**2 cilindros**
**V**
**1/2 Cone**
**8**

**Teorema 5.**
**(Teorema da Função Implícita)**

- $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$ *de classe* $C^1$;
- $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$;
- $f(\overline{x}, \overline{y}) = O$;
- $D_2 f(\overline{x}, \overline{y}) : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$ *bijetora*

*(onde* $Df(\overline{x}, \overline{y})(u, v) = Df(\overline{x}, \overline{y})(u, 0) + Df(\overline{x}, \overline{y})(0, v) = Df_1(\overline{x}, \overline{y})(u) + Df_2(\overline{x}, \overline{y})(v)$*).*
*Então existem*

- $U \subset \mathbf{R}^p$ *vizinhança aberta de* $\overline{x}$ *e uma única função* $\Phi : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbf{R}^q \\ x & \mapsto & y = \Phi(x) \end{array}$

  *de classe* $C^1$ *tal que* $\Phi(\overline{x}) = \overline{y}$ *e* $f(x, \Phi(x)) = 0, \forall x \in U$.
- $W \subset \Omega \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ *vizinhança aberta de* $(\overline{x}, \overline{y})$ *tal que*

$$\begin{array}{c} (x, y) \in W \\ f(x, y) = 0 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} x \in U \\ y = \Phi(x) \end{array}$$

- *Além disso,* $D_1 f(x, \Phi(x)) + D_2 f(x, \phi(x)) D\Phi(x) = O, \forall x \in U$.

# Teorema da Função Implícita

## Teorema da Função Implícita - Informações sobre o sistema (2)

- Note que podemos dizer que perto de $(\overline{x}, \overline{y})$, o conjunto $Z(f)$ é gráfico de uma função $C^1$.
- Note que usando $\overline{x}$ na última igualdade obtemos
$$D_1 f(\bar{\,},\overline{y}) + D_2 f(\bar{\,}\bar{)} D\Phi(\overline{x}) = O,$$
permitindo calcular $T_{(\overline{x},\overline{y})}(Z(f))$.
- Note das hipóteses consideramos que separamos as últimas coordenadas de $(x, y) \in \mathbf{R}^{p+q} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ para podermos falar em $D_2 f(\overline{x}, \overline{y})$ ser bijetora de $\mathbf{R}^q$ em $\mathbf{R}^q$. Poderíamos substituir a hipótese por "$Df(\overline{z})$ sobrejetora", mas nesse caso não poderíamos usar a facilidade de escrever $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y})$, e a notação seria mais complicada. Mas o resultado "correspondente" continuaria válido.