Corrente elétrica

Física III — Aula de 28/04/2020

Atualizado em 02/05/2020

1 Capacitores

A Fig. 1 descreve a geometria de um *capacitor* plano. São duas placas metálicas paralelas com área A, separadas por uma distância d. Tanto o comprimento como a largura de cada placa são muito maiores do que d. Entre as placas, portanto, tudo se passa como se elas fossem infinitas.

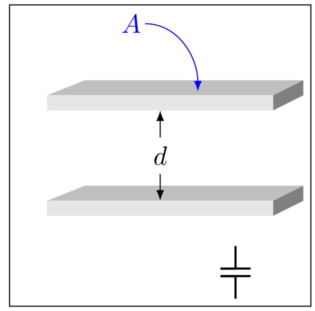

Figura 1: Geometria de um capacitor plano. O símbolo no canto inferior direito representa o dispositivo em desenhos de circuitos elétricos.

Para fazer o capacitor funcionar, liga-se o par a uma bateria, que impõe uma diferença de potencial ΔV entre as placas, como mostra a Fig. 2. Inicialmente, imediatamente após se fazer a ligação, as duas placas estão no mesmo potencial. Como a placa ligada ao polo positivo da bateria está num potencial mais alto, flui carga positiva da bateria para a placa superior. Já o polo negativo está num potencial mais baixo do que a placa, o que faz fluir carga negativa da bateria para a placa. Esse processo continua até a placa superior alcançar o potencial do polo positivo e a placa inferior alcançar o potencial da polo negativo. Nesse ponto, a placa superior terá uma carga positiva ΔQ e a placa inferior, uma carga negativa $-\Delta Q$.

Como as placas são condutoras, a carga de cada uma delas se acumula na superfície, e como as cargas têm o mesmo módulo, elas se acumulam nas superfícies internas, como esquematizado na Fig. 3. Com isso, há campo elétrico, dirigido de cima para baixo na região entre as placas, e o campo no restante do espaço é nulo. Isso concorda com a noção de que o campo elétrico dentro do metal deve ser nulo, tanto na placa superior como na inferior.

Uma vez que as cargas se acumulem e a diferença entre os potenciais das placas se iguale à diferença de potencial entre os terminais da bateria, o fluxo para. Nesse ponto, podemos desligar o capacitor da bateria, porque a diferença de potencial se manterá. Isso acontece porque o capacitor tem carga global nula, e a atração entre as cargas positivas e negativas garante estabilidade ao sistema.

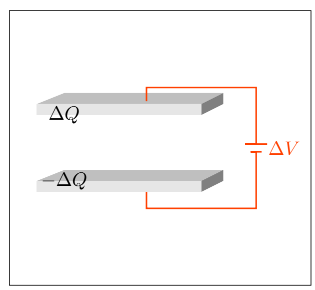

Figura 2: Capacitor sujeito a uma diferença de potencial ΔV.

1.1 Carga e diferença de potencial

Conhecida a distribuição de cargas, podemos relacionar ΔQ com ΔV. A densidade superficial de carga na placa superior é $\sigma = \Delta Q/A$ e na carga inferior, $-\Delta Q/A$. Na região entre as placas, na aproximação em que as placas são tratadas como infinitas, tanto o campo devido à placa superior como o campo devido à placa inferior têm módulo $\sigma/(2\epsilon_0)$ e apontam no sentido descendente. O campo elétrico resultante da soma dos dois é

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{1}$$

A Fig. 4 mostra o campo na região entre as placas. Podemos ver que o potencial da placa de cima é maior do que o da de baixo, dado que caminhamos no sentido do campo ao descer. De fato, a diferença de potencial entre a placa de cima e a de baixo é

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{2}$$

e como o campo é uniforme e paralelo ao deslocamento, resulta que

$$\Delta V = Ed. \tag{3}$$

A expressão (1) nos dá o campo elétrico. Podemos substituí-la no lado direito da Eq. (3) para ver que

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{A\epsilon_0} d. \tag{4}$$

Aqui, lembramo-nos de que a densidade superficial é $\sigma = \Delta Q/A$.

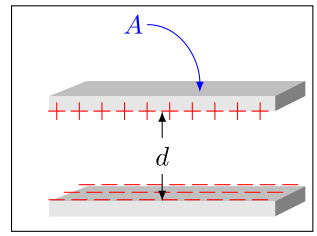

Figura 3: Distribuição de cargas no capacitor carregado.

1.2 Capacitância

A Eq. (4) é muito importante, porque nos diz que a carga nas placas é proporcional à diferença de potencial que aplicamos. Para pôr em evidência a proporcionalidade, é convencional escrever a igualdade na forma

$$\Delta Q = C\Delta V, \tag{5}$$

onde a constante C, conhecida como *capacitância*, depende apenas da geometria do capacitor:

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}. \tag{6}$$

Vale a pena gastar mais um minuto olhando para a Eq. (5). Ela expressa uma noção importante de forma simples e direta. Especificamente, ela nos recorda de algo que acabamos de aprender, que a carga no capacitor cresce em proporção à diferença de potencial que aplicamos nele.

O capacitor é um componente importante de circuitos eletrônicos. Se você entender e se lembrar da Eq. (5), terá em mente o que há de mais importante sobre ele. O capacitor é importante porque armazena carga. O equivalente dele nos sistemas mecânicos é a mola, que pode ser vista como um dispositivo que armazena força. Na mola, a deformação é proporcional à força, e a equação equivalente à Eq. (5) é a lei de Hooke:

$$\Delta x = -\frac{F}{k}. \tag{7}$$

Você deve conhecê-la na forma equivalente $F = -k\Delta x$, mas a forma (7) é mais expressiva, porque diz que a deformação (efeito) é proporcional à força (causa da deformação), assim como a Eq. (5) nos diz que a carga é proporcional à diferença de potencial.

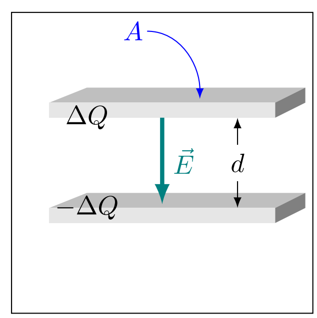

Figura 4: Campo elétrico no capacitor carregado.

O sinal na Eq. (7) diz que a deformação na mola tem sentido oposto à força. Na Eq. (5), o sinal é positivo porque definimos ΔV como a diferença entre o potencial da placa positiva e o da negativa. Se tivéssemos definido ΔV como a diferença entre os potenciais da negativa e da positiva, apareceria um sinal negativo na igualdade. Há, portanto, uma arbitrariedade. Essa indefinição será eliminada bem mais adiante, quando falarmos sobre a corrente elétrica que atravessa um capacitor.

Para obter a Eq. (5), consideramos um processo em que o capacitor estava inicialmente descarregado e foi carregado aos poucos pela diferença de potencial numa bateria. Como tanto a carga como a diferença de potencial no capacitor eram inicialmente nulas, podemos ver que $\Delta Q = Q$ e $\Delta V = V$, onde Q e V representam a carga final e a diferença final entre os potenciais da placa. Assim, a Eq. (5) equivale à forma abreviada

$$Q = CV, \tag{8}$$

que vale em qualquer instante. Por exemplo, no início do processo, V era igual a zero e Q também era igual a zero.

Figura 5: Capacitores, várias capacitâncias. (Eric Schrader/wikimedia, curid=37625896)

1.3 Unidade

Como indicado pela Eq. (8), a capacitância C tem dimensão de carga por diferença de potencial. A razão entre 1 C (unidade de carga) e 1 V (unidade de potencial) é chamada de *Farad*, e denotada F:

$$1\,\mathrm{F} \equiv 1\,\mathrm{C/V}. \tag{9}$$

Assim como o Coulomb, o Farad é uma unidade muito grande. Um capacitor como o da Fig. 1, com área $A = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$ e separação $d = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$ tem capacitância $C = 8.8\,\mathrm{pF}$, da Eq. (6), visto que $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ no Sistema Internacional. É pouco prático ter separações muito menores, porque é difícil evitar que as placas se toquem. É muito mais conveniente introduzir materiais polares entre as placas, como veremos na aula de 4 de maio.

Entretanto, se teimarmos em reduzir a separação, poderemos imaginar como limite mínimo uma separação cem vezes maior do que o diâmetro de um átomo. O diâmetro de um átomo no cobre é de 0.25 nm. Nesse extremo, a capacitância seria 3.5 µF.

A Fig. 5 mostra capacitores de várias capacitâncias. Os menores, têm capacitâncias da ordem de 10 pF. O maior, azul escuro, tem capacitância de 4.7 mF, mil vezes maior do que o máximo que estimamos. Isso é possível porque (1) o capacitor não é preenchido com ar e (2) a área é muito maior do que $1\,\mathrm{cm}^2$. A área é maior porque, em lugar de planas, as placas são fitas enroladas na forma de duas espirais cilíndricas concêntricas.

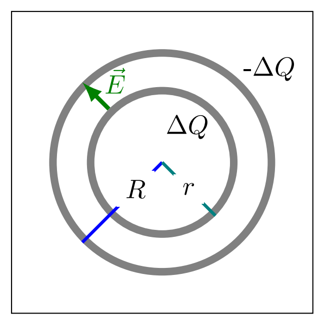

Figura 6: Capacitor esférico. As regiões cinza mostram duas cascas esféricas concêntricas, que ocupam o lugar das placas planas na Fig. 1

Mas há capacitores muito mais poderosos. Nos últimos 25 anos, o interesse pelo armazenamento de energia elétrica levou ao desenvolvimento de dispositivos com capacidades muito maiores. Hoje, a internet oferece *ultracapacitores* com alguns milhares de Farads por menos de US\$10.00. Esses capacitores são preenchidos por material granulado, de forma que tanto as cargas positivas como as negativas ficam armazenadas em um número enorme de grãos com dimensões nanoscópicas. A separação entre as cargas positivas e as negativas é de apenas alguns nanômetros, em média, o que explica a capacitância gigantesca.

A definição do Farad nos oferece uma alternativa compacta para indicar a unidade de ϵ_0. Como a Eq. (6) indica, a dimensão da capacidade é igual à dimensão de ϵ_0 multiplicada por distância^2 e dividida por distância. Assim, o Farad é igual à unidade de ϵ_0 multiplicada por metro. Podemos portanto escrever que

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}. \tag{10}$$

Essa forma é muito mais conveniente do que expressar a unidade de ϵ_0 como combinação das unidades básicas do Sistema Internacional (Coulomb, quilograma, metro e segundo).

2 Capacitores esféricos

A Fig. 6 mostra um capacitor de outro formato: esférico. Para aplicações práticas, essa forma é inconveniente. Entretanto, do ponto de vista conceitual, é interessante calcular a sua capacitância.

Como na Seção 1, aplicamos uma diferença de potencial entre a casca esférica de dentro e a casca de fora. É costume aplicar-se o potencial positivo à casca interna, para que o campo elétrico entre as esferas seja dirigido para fora. Ficamos, então, com o acúmulo de cargas e o campo que a figura mostra.

O campo indicado por uma seta verde, como sabemos do estudo da Lei de Gauss, é igual ao de uma carga ΔQ posicionada no centro. Poderíamos facilmente integrá-lo para encontrar a diferença de potencial entre as cascas. No entanto, é mais fácil aproveitar o que já sabemos sobre o potencial.

O potencial da casca externa é constante dentro da casca. Ele é dado pela mesma expressão tanto na casca externa como na casca interna:

$$V_e(R) = V_e(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\Delta Q}{R}, \tag{11}$$

Já o potencial devido à casca interna tem valores distintos nos raios R e r. Na casca externa, ele vale

$$V_i(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\Delta Q}{R}, \tag{12}$$

enquanto na casca interna o valor é

$$V_i(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\Delta Q}{r}. \tag{13}$$

Assim, a soma dos potenciais é nula na casca externa,

$$V_e(R) + V_i(R) = 0, \tag{14}$$

enquanto a soma na casca interna é

$$V_e(r) + V_i(r) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{15}$$

A diferença ΔV entre os potenciais na casca interna e na casca externa é, portanto, dada pelo lado direito da Eq. (15):

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{16}$$

Podemos agora somar as frações dentro dos parênteses à direita da Eq. (16):

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R-r}{rR}. \tag{17}$$

A diferença de potencial é positiva, como esperávamos, pois o potencial da casca interna é maior do que o da externa: ao ir da casca interna para a externa, caminhamos a favor do campo elétrico. A Eq. (17) mostra, ademais, que a carga ΔQ é proporcional a ΔV, como na Eq. (4). Podemos, portanto, voltar à Eq. (5) para definir a capacitância

$$C = 4\pi\epsilon_0\frac{rR}{R-r} \qquad \text{(esférico)}. \tag{18}$$

O lado direito da Eq. (18) tem alguma semelhança com o lado direito da Eq. (6). As duas capacitâncias são proporcionais a ϵ_0 e, nos dois casos, o fator de proporcionalidade tem dimensão de distância. Podemos avançar um pouco mais se notarmos que a diferença $R - r$ no denominador do segundo fator à direita na Eq. (18) é a distância d entre as duas cascas esféricas. Com isso, a capacitância do capacitor esférico pode ser escrita na forma

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{rR}{d} \qquad \text{(esférico)}. \tag{19}$$

Mesmo assim, as capacitâncias dos capacitores plano e esférico parecem muito diferentes, especialmente porque o fator 4π à direita na Eq. (19) não tem correspondente na Eq. (6). Vejamos se é possível alinhar melhor as duas igualdades.

A *média geométrica* $\bar{a}$ entre duas grandezas a_1 e a_2 que têm a mesma dimensão é definida como a raiz quadrada do produto $a_1 a_2$. A média geométrica entre r e R é

$$\bar{r} = \sqrt{rR}. \tag{20}$$

A partir dessa igualdade, podemos reescrever a Eq. (19) na forma

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\bar{r}^2}{d} \qquad \text{(esférico)}, \tag{21}$$

e como a área $\bar{A}$ da superfície esférica com raio $\bar{r}$ é $\bar{A} = 4\pi\bar{r}^2$, somos conduzidos à expressão mais simples

$$C = \frac{\bar{A}\epsilon_0}{d}, \tag{22}$$

muito parecida com a Eq. (6). Aqui, $\bar{A}$ não é a área de nenhuma das superfícies que definem o capacitor. É a média geométrica entre as duas áreas.

Mas vamos ser práticos. Se fôssemos construir um capacitor esférico, procuraríamos fazer d tão pequeno quanto possível, para maximizar a capacitância. Significa escolher um raio externo R pouco maior do que o raio interno r. Nessas condições, o raio médio $\bar{r}$ é praticamente igual a r ou R e a área $\bar{A}$ é praticamente igual à área de qualquer uma das cascas esféricas. No limite $d \to 0$, o capacitor esférico equivale a um capacitor plano.

Não surpreende. Toda superfície esférica, vista de perto, parece plana. Na Idade Média, a maioria dos europeus acreditava que a Terra era plana. Havia certas evidências de que ela não era plana, mas essas evidências não apareciam na vida da maior parte da população. Quem olhasse para o mar aberto, por exemplo, veria o horizonte, uma evidência de que vivia num planeta arredondado. Entretanto, pouca gente vivia a beira-mar. Por isso, sem pensar muito sobre isso, as pessoas comuns da época construíram o modelo da Terra plana. Esse modelo funciona muito bem a curtas distâncias.

Discussão: Para quem mora no centro de São Carlos e nunca se afasta mais do que um ou dois quilômetros da Catedral, o modelo funciona muito bem. Se essa pessoa for observadora e viajar até Ibaté, talvez perceba que alguns dos morros em volta da cidade são mais altos do que parecem ser quando vistos de São Carlos. Ela perceberá que o modelo da Terra plana não funciona tão bem quanto parecia e, se tiver espírito irriquieto, poderá perder a confiança que tinha.

Especificamente, para que o modelo comece a falhar é necessário que uma distância de interesse prático deixe de ser muito pequena em comparação com o raio da Terra. Para quem está na praia e olha em direção ao mar aberto, o horizonte fica a cerca de $5\,\mathrm{km}$. Essa distância é menos de um milésimo do raio do planeta, mas isso é suficiente para questionar o modelo da Terra plana.

O mal dos terraplanistas modernos, como podemos ver, não é adotar o modelo da Terra plana. Todos nós adotamos modelos imperfeitos no nosso dia a dia. Quem guia um automóvel, por exemplo, adota as Leis de Newton. Suponhamos que a motorista seja uma física de altas energias. Ela sabe que as Leis de Newton são uma aproximação que se torna muito ruim em certas circunstâncias. Entretanto, ela nem pensa em empregar a mecânica quântica para avaliar se precisa acionar os freios do veículo, porque sabe que as Leis de Newton são muito precisas e práticas no dia-a-dia. Quando chega a seu laboratório, por outro lado, ela passa a trabalhar com a mecânica quântica relativística.

Da mesma forma, o modelo da Terra plana funciona muito bem, e é prático no dia-a-dia. O que é errado é insistir que na validade do mesmo modelo a grandes distâncias e, principalmente, negar evidências experimentais ou forjar dados para adaptar a realidade a um modelo que deixou de funcionar.

Da mesma maneira que o modelo da Terra plana, a aproximação do capacitor plano funciona muito bem quando a distância entre as duas cascas na Fig. 6 é muito menor do que os raios r e R.

2.1 A capacitância da Terra

No extremo oposto, podemos examinar a Eq. (18) no limite em que $R \to \infty$. Nesse limite, podemos substituir R no lugar de $R-r$ no denominador da segunda fração à direita. Cancelado o fator comum R, a expressão da capacitância assume a forma

$$C = 4\pi\epsilon_0 r \qquad \text{(esférico)}. \tag{23}$$

Outra vez, a Terra entra nessa discussão. Podemos pensar que nosso planeta é a parte interna do capacitor e que a superfície externa cresceu até o infinito. É verdade que o planeta é sólido, não é uma casca, mas isso não tem importância, porque de qualquer forma as cargas num condutor se distribuem na superfície. Também é verdade que o material de que é feita a Terra não é metálico, mas a terra úmida conduz relativamente bem a eletricidade.

Assim, se você plantar um fio no solo e o ligar a um objeto carregado com carga inicial Q_o, a carga fluirá do corpo para a Terra até que os potenciais sejam iguais. Para encontrar o potencial a que os dois ficarão no final do processo, precisamos calcular a capacitância do planeta, dada pela Eq. (23). Substituído o raio $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$ da Terra no lugar de r, no lado direito, e efetuada a multiplicação, chegamos ao resultado

$$C_T = 0.71\,\mathrm{mF}. \tag{24}$$

É uma capacitância bem grande. Se o objeto em contato com o fio for uma esfera condutora, mesmo que seu raio seja muito grande (um metro, por exemplo), sua capacitância C_o será insignificante em comparação com a da Terra.

Quando a corrente no fio se encerrar, o objeto ficará com uma carga q_o e a Terra com uma carga q_T. A soma das duas cargas deve ser igual à carga inicial:

$$Q_o = q_o + q_T. \tag{25}$$

Por outro lado, da Eq. (8), temos que

$$q_o = C_o V \tag{26}$$

e

$$q_T = C_T V, \tag{27}$$

já que a Terra e o objeto estão no mesmo potencial V.

Assim, a Eq. (25) pode ser escrita como

$$(C_o + C_T)V = Q_o \tag{28}$$

ou

$$V = \frac{Q_o}{C_o + C_T}. \tag{29}$$

De acordo com a Eq. (26), portanto, a carga final no objeto será

$$q_o = \frac{C_o}{C_o + C_T} Q_0 \tag{30}$$

e como a capacitância C_o é muitíssimo menor do que C_T, podemos concluir que a carga q_o no objeto será praticamente nula. Praticamente toda a carga flui para a Terra.

Podemos ver da Eq. (29) que o próprio potencial V será muito pequeno. Só seria apreciável se a carga Q_o fosse enorme, da ordem de $1\,\mu$C ou mais (lembre-se de que C_T, no denominador, é um pouco menor do que $1\,$mF). Uma carga dessas cabe facilmente num capacitor com duas placas, porque a carga negativa atrai a carga positiva.

Aqui, entretanto, estamos estudando capacitores que resultam da Fig. 6 quando $R \to \infty$, isto é, capacitores com uma única superfície. Num capacitor de uma superfície uma carga muito grande atrairia instantaneamente partículas de carga oposta. Assim, a carga Q_o é, necessariamente, menor do que $1\,\mu$C. O potencial V na Eq. (29) é, portanto, zero para todos os efeitos práticos.

Em resumo, ligar um objeto à Terra por um fio garante que o seu potencial seja zero. Por isso, a ligação à Terra é frequentemente empregada para estabilizar aparelhos elétricos. *Aterrar* um aparelho, isto é, ligar à Terra a superfície externa de uma geladeira ou de um máquina de lavar garante que o usuário nunca levará um choque elétrico ao tocar a porta ou a tampa do aparelho. Por isso, as tomadas desses aparelhos têm três contatos. O do meio está ligado à superfície externa e deve ser conectado, na tomada, a um condutor aterrado.