Energia em circuitos RC

T. Catunda (01/05/2020)

Consideraremos inicialmente a Figura 3.11 (do roteiro) que ilustra um circuito onde inicialmente o capacitor, C_1, está <u>carregado</u> e o capacitor, C_2, está inicialmente <u>descarregado</u>, ou seja, $\mathbf{V_{C1}(0) = V_0}$ e $\mathbf{V_{C2}(0) = 0}$.Podemos dizer que em t = 0 as cargas nos capacitores são $Q_1(0) = Q_0 = V_0.C_1$ e $Q_2(0) = 0$.

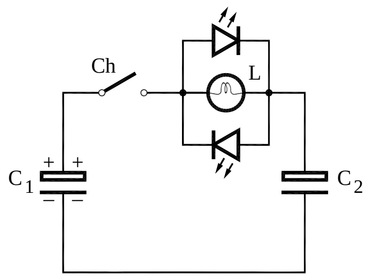


Figura **Erro! Nenhum texto com o estilo especificado foi encontrado no documento.**.1 - Circuito de uma lâmpada em série com dois capacitores, um carregado e outro descarregado

Nos experimentos do vídeo utilizamos o conjunto de diodo e lâmpadas para indicar o sentido da corrente. Para resolver o problema vamos considerar que temos um resistor R no lugar deste conjunto. Logo, usando a lei das Malhas (Kirchhoff) temos:

$$\frac{Q_1}{C_1} - R.I - \frac{Q_2}{C_2} = 0 \tag{1}$$

onde supomos que a corrente, I(t), está no sentido horário da Fig. 3.11. Consequentemente, I descarrega o capacitor C_1 e carrega o capacitor C_2, logo:

$$I = -\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_2}{dt} \tag{2}$$

Além disso, supomos que <u>há conservação da carga</u>, ou seja, para qualquer instante de tempo é válido que:

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q_0 \tag{3}$$

Logo, podemos reescrever a Eq.(1) considerando apenas a variável $Q_1(t)$:

$$R.\frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_{eq}} = \frac{Q_0}{C_2} \tag{4}$$

onde C_{eq} representa a capacitância equivalente dos dois capacitores em série

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{5}$$

Primeiramente podemos perceber que a Eq.(4), representa uma equação diferencial que admite uma solução estacionária, ou seja, para $t \to \infty$ temos $\frac{\mathrm{dQ_1}}{\mathrm{dt}} \to 0 \;\; onde \;\; .Q_1\,(t \to \infty\,) = \mathrm{Q}_{1\infty} = \frac{\mathrm{C_{eq}}}{\mathrm{C_2}} Q_0$.

A solução da equação diferencial pode ser encontrada através de uma solução tentativa:

$$Q_1\,(t) = a.\,e^{-t/\tau} + b \tag{6}$$

onde a, b e t são constantes a serem determinadas. Substituindo Eq.(6) em (4) verificamos que a solução proposta é válida se $\tau = R.\,\mathrm{C_{eq}}$ e $b = Q_0.\,\mathrm{C_{eq}}/\mathrm{C_2}$.

A constante a depende da condição inicial. Supondo que $Q_1(0) = Q_0$ temos $a = Q_0/2$. Para simplificar o problema vamos supor que $C_1 = C_2 = C$, logo $C_{eq} = C/2$. Obtemos então:

$$Q_1\,(t) = \frac{Q_0}{2}\left[1 + e^{-t/\tau}\right] \quad \text{e} \quad Q_2\,(t) = \frac{Q_0}{2}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \tag{7}$$

Para analisar a conservação da energia, consideramos que a energia armazenada em um capacitor é dada por $U = \frac{Q^2}{2C}$. Logo em t=0 toda a energia está armazenada no capacitor C_1, sendo $U_i = \frac{Q_0^2}{2C}$. No estado estacionário $\mathrm{Q}_{1\infty} = \mathrm{Q}_{2\infty} = Q_0/2$, logo a energia final total é dada por $U_f = \frac{Q_0^2}{4C}$, ou seja, $U_f = U_i/2$.

A diferença entre U_i e U_f deve ter sido dissipada no resistor. Para demonstrar isto podemos considerar que a potência dissipada no resistor é dada por $P_R(t) = R.I(t)^2$, logo a energia total dissipada é dada por:

$$U_R = \int_0^\infty P_R(t).\,dt = R.\int_0^\infty I(t)^2.\,dt \tag{8}$$

Da Qe.(7) obtemos $I(t) = \frac{Q_0}{2} e^{-t/\tau}$, que inserida em (8) resulta em $U_R = \frac{Q_0^2}{4C}$, ou seja $U_i = U_f + U_R$.

Capacitor carregado através de uma fonte

Na webconf 6 (30/04) discutimos o problema abaixo:

4) Quando um circuito *RC* está conectado à bateria, o circuito puxa uma corrente até o capacitor estar totalmente carregado. A quantidade de energia armazenada no capacitor, em relação a energia fornecida ao circuito pela bateria, é:

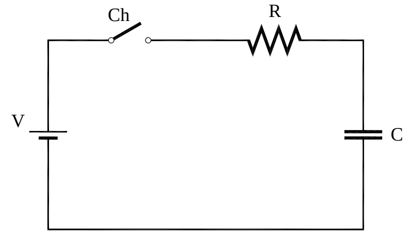
a) menor

b) igual
c) maior
d) necessita-se de mais informações.

Que pode ser ilustrado pelo Figura ao lado (Fig. 3.3 da prática 3). Tal como discutido na apostila, se o capacitor está inicialmente descarregado, sua tensão é dada por:

$$V_C(t) = V\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

onde $\tau = RC$



A carga do capacitor é então dada por $Q(t) = C.V_C(t)$ sendo a carga final (estado estacionário) $Q_f = C.V$, logo a energia armazena no capacitor é dada por $U_C = \frac{C.V^2}{2}$

A potência fornecida pela bateria é dada por $P_{bat}(t) = V.I(t)$, onde a tensão V é constante (supondo que a bateria seja ideal). Uma vez que a corrente é dada por I(t) = dQ/dt, obtemos $I(t) = \frac{V}{R}e^{-t/\tau}$.

Podemos então calcular a energia total fornecida pela bateria como:

$$U_{bat} = \int_0^\infty P_{bat}(t).dt = V.\int_0^\infty I(t).dt = \frac{V^2.\tau}{R} = C.V^2$$

Logo concluímos que $U_{bat} = U_C/2$. Além disso, usando a Eq.(8) é fácil mostrar que $U_{bat} = U_C + U_R$, onde U_R representa a energia dissipada no resistor que corresponde a metade da energia fornecida pela bateria. Este resultado é então análogo ao do problema anterior (Fig. 3.11) onde vimos que U_R era a metade da energia inicial armazenada no capacitor C_1.

Convém mencionar ainda que este fator 2 independo dos valores de R e C. Por exemplo, se nos dois casos tivéssemos usando um simples fio, com resistência R ~ 10^{-8} Ω, a fração da energia armazenada no capacitor seria a mesma, independente dos valores de R e C. Apenas o tempo de resposta do circuito (τ) depende fortemente da produtor R.C, portanto o tempo de carga do capacitor seria muito curto.