

Questões Apresentadas pelos Alunos, antes da Primeira Prova

1 Maio 2020

1. Felipe Salvador

Exercício 10 da lista (que é o exercício 11 do capítulo 4 do livro do Prof. Frenkel). Eu tentei fazer a minimização de energia para tentar chegar em alguma relação com a densidade de cargas, mas não consegui chegar em alguma relação correta. Que sugestões e dicas que o senhor poderia me dar para conseguir resolver este exercício?

O Felipe está se referindo à Segunda Lista.

Este problema, de facto, exige certo encaminhamento. A energia eletrostática é dada por (Jackson 1.53)

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$$

Suponhamos que façamos uma pequena variação na posição das cargas no condutor, sem variar a carga total. Então a variação na energia será

$$\delta W = \frac{1}{2} \left[\int \delta \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV + \int \rho(\vec{r}) \delta \phi(\vec{r}) dV \right]$$

Essas integrais têm que ser feitas em todo o espaço. Lembrando que em um condutor o potencial eletrostático $\phi(\vec{r})$ é constante e que fora dele é vácuo, ou seja, não há cargas, prossiga para a conclusão final.

2. Leonardo Osorio

No desenvolvimento da Função de Green em coordenadas esféricas (aula 27 ABR 2020), de onde saiu o fator 4π ao integrar a equação radial que aparece na expressão

$$\sum_{\ell=0}^{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_{\ell}(r, r')) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} g_{\ell}(r, r') + \frac{1}{r^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right] = 0$$

Observação muito bem feita pelo Leonardo. Foi um descuido meu ao utilizar a equação para a Função de Green, como fizemos para a Equação de Helmholtz. Lá definimos a Equação como

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Acontece que o Jackson inclui o fator 4π nesta equação (Equação 3.116 para $k = 0$)

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Os resultados finais, ao empregar a Função de Green, serão os mesmos. Mas, por consistência, ao escrever a equação

$$\left[\frac{d}{dr} (r g_\ell(r, r')) \right]_{r'+\epsilon} - \left[\frac{d}{dr} (r g_\ell(r, r')) \right]_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'}$$

eu não deveria ter incluído o fator 4π , copiado do Jackson. Portanto, peço que retirem esse fator dessa equação e das que a seguem, na aula de 27 ABR 2020. Assim,

$$C = \frac{1}{(2\ell + 1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \right]}$$

e

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{(2\ell + 1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \right]} \left[r_{<}^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r_{<}^{2\ell+1}} \right] \left[\frac{1}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{>}^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right]$$

3. Felipe Bueno de Almeida

Sugestão para resolver o Exercício 6 do Capítulo 9 do Panofsky and Phillips.

Este problema já foi discutido em outra aula. Mesmo assim, reproduzo aqui a solução, que não é trivial.

É solicitado mostrar que, numa região do espaço em que o campo magnético varia explicitamente com o tempo com a taxa $\partial \vec{B}(\vec{r}', t)/\partial t$, o campo elétrico de indução, no ponto $\vec{r}$, é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}', t)}{\partial t} dV$$

A forma mais imediata, que os alunos geralmente tentam, é partir de $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t$ e utilizar a expressão para o potencial vetor e termos da integral sobre a densidade de corrente. Esse caminho leva a uma integral sobre $\partial \vec{j}/\partial t$, que não é óbvio como calcular.

Ao invés de seguir este caminho, vamos utilizar diretamente a Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Tomando o rotacional de ambos os lados da equação, temos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Como não há densidade de carga no problema, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, e a equação fica, para cada componente cartesiana α do campo elétrico,

$$\nabla^2 E_\alpha = \left[\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]_\alpha$$

Essa é uma equação de Poisson para cada componente do campo elétrico, onde a fonte (equivalente à densidade de carga na eletrostática) é a componente α do rotacional da derivada temporal de $\vec{B}$.

A solução geral desta equação foi obtida pelo método da Função de Green; então

$$E_\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\left[\nabla' \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]_\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Multiplicando o resultado para cada componente pelo seu vetor unitário, $\hat{e}_\alpha$, e somando sobre todas as componentes, temos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Utilizando a reação vetorial $\nabla \times (f\vec{V}) = f\nabla \times \vec{V} + \nabla f \times \vec{V}$, temos

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla' \times \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] - \left[\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Inserindo esse resultado na expressão para o campo elétrico, teremos duas integrais.

Na primeira integral usaremos a seguinte relação vetorial $\int \nabla \times \vec{F} dV = \int d\vec{S} \times \vec{F}$;

$$\int \nabla' \times \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] dV' = - \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times d\vec{S}'$$

Neste resultado a integral tem que ser feita sobre uma superfície que englobe todo o volume considerado. Podemos tomar uma superfície esférica centrada no ponto $\vec{r}'$ e fazer seu raio R tender a infinito. Como $|\vec{B}| \sim 1/R^3$, no mínimo, e $dS \sim R^2$, temos que a integral de superfície se anula.

Portanto, a expressão para o campo elétrico fica

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \left[\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV'$$

Finalmente, utilizando a relação,

$$\nabla(1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = -(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$$

obtemos a expressão fornecida para o campo elétrico.

Comentário:

Esta relação é curiosa, porque permite calcular o campo elétrico em um ponto distante do campo magnético, no mesmo instante t em que este varia! É como se não houvesse necessidade de um tempo para a propagação do sinal de $\vec{r}'$ a $\vec{r}$. Quando estudarmos a emissão de ondas por fontes fixas, os alunos devem retornar a este problema e analisá-lo fisicamente.