(279). Como temos duas soluções que são linearmente dependentes, então ainda não podemos determinar a solução geral. Para achar a solução geral, devemos definir a função de Bessel de segundo tipo de ordem ν, também chamada de função de Neumann, dada por:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cdot \cos(\nu \cdot \pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \qquad (287)$$

que vale para qualquer ν, inclusive $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, e que é linearmente independente de J_ν, mesmo para valores inteiros de ν. Resumindo a ópera, quando ν não é um número inteiro, podemos usar, como solução geral:

$$R_\nu(x) = a_1 \cdot J_\nu(x) + a_2 \cdot J_{-\nu}(x) \qquad (288)$$

sendo a_1 e a_2 constantes. Quando ν é um inteiro <u>m</u>, a solução geral pode ser escrita como:

$$R_\nu(x) = a_1 \cdot J_\nu(x) + a_2 \cdot N_\nu(x) \qquad (289)$$

que envolve as funções de Bessel e de Neumann, as quais formam uma solução linearmente independente.

<u>Exemplo 1</u>: Ache a solução geral da seguinte E.D.O. $9x^2 \ddot{y}(x) + 9x \cdot \dot{y}(x) + (9x^2 - \frac{1}{4}) \cdot y(x) = 0$

<u>Solução</u>: Para resolver esta E.D.O, primeiro vamos trazê-la à forma da equação de Bessel dada pela equação (242):

$$x^2 \cdot \ddot{y}(x) + x \cdot \dot{y}(x) + (x^2 - \nu^2) \cdot y(x) = 0$$

Assim,

$$x^2 \cdot \ddot{y}(x) + x \cdot \dot{y}(x) + \left(x^2 - \frac{1}{36}\right) \cdot y(x) = 0$$

Fica fácil identificar agora que estamos diante de uma E.D.O de Bessel de ordem $\nu = \pm\sqrt{\frac{1}{36}} = \pm\frac{1}{6}$

Como ν não é um inteiro, então a solução geral será dada pela equação (289):

$$y_{\frac{1}{6}}(x) = a_1 \cdot J_{1/6}(x) + a_2 \cdot J_{-1/6}(x) \Rightarrow$$

$$y_{1/6}(x) = a_1 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{1/6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{6}+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + a_2 \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{6}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\frac{1}{6}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \Rightarrow$$

$$y_{1/6}(x) = a_1 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{1/6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{7}{6})} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + a_2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n!\,\Gamma(n+\frac{5}{6})} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$y_{1/6} = a_1\left(\frac{x}{2}\right)^{1/6}\cdot\left(\frac{1}{0!\,\Gamma(7/6)} - \frac{1}{1!\,\Gamma(13/6)}x^2 + \frac{1}{2!\,\Gamma(19/6)}x^4 - \dots\right) + a_2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/6}\cdot\left(\frac{1}{0!\,\Gamma(5/6)} - \frac{1}{1!\,\Gamma(11/6)}x^2 + \frac{1}{2!\,\Gamma(17/6)}x^4 - \dots\right)$$

, sendo a_1 e a_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 2: Encontre a solução da equação dada por: $x^2\ddot{y}(x) + x\,\dot{y}(x) + \left(2x^2 - \frac{1}{9}\right)y(x) = 0$

Solução: Não é possível trazer esta equação à forma da equação de Bessel. Para colocá-la na forma da equação (242), teremos de fazer uma mudança de variável. Tomemos $z^2 = 2x^2$, que é o termo nos impedindo de trazer a E.D.O. à forma da equação de Bessel.

Assim, $z = \sqrt{2}x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{2}$. Como $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ então: $\dot{y} = \frac{dy}{dz}\cdot\sqrt{2}$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dz}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \ddot{y} = 2\cdot\frac{d^2y}{dz^2}.$$

Substituindo $\dot{y}$, $\ddot{y}$ e z na equação temos:

$$\frac{z^2}{\cancel{2}}\cdot\left(\cancel{2}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}\right) + \frac{z}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)\cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

Assim, $\nu = \pm 1/3$ e a solução geral pode ser escrita como:

$$y_{1/3}(z) = a_1\cdot J_{1/3}(\sqrt{2}x) + a_2\cdot J_{-1/3}(\sqrt{2}x)$$

$$= a_1\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^{1/3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{3}+1)}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^{2n} + a_2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^{1/3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\frac{1}{3}+1)}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^{2n}$$

$$y_{1/3}(\sqrt{2}x) = a_1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{1}{0!\,\Gamma(4/3)} - \frac{1}{1!\,\Gamma(7/3)}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2!\,\Gamma(10/3)}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4 - \dots\right) + a_2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^{-1/3}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{0!\,\Gamma(2/3)} - \frac{1}{1!\,\Gamma(5/3)}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2!\,\Gamma(7/3)}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4\right)$$

Exemplo 3: Mostre que o polinômio $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ satisfaz a E.D.O. de Legendre

Solução: A equação diferencial de Legendre é dada por (equação 202):

$$(1-x^2)\cdot\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + n(n+1)\cdot y(x) = 0$$

Assim, temos de $n = 5$. Portanto,

$$(1-x^2)\cdot\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + 5(5+1)\cdot y(x) = 0 \Rightarrow (1-x^2)\cdot\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + 30\cdot y(x) = 0$$

Se $P_5(x)$ é solução, então $y(x) = P_5(x)$. Derivando-se $y(x)$ duas vezes, temos:

$$\dot{y}(x) = \frac{5}{8}\cdot 63\cdot x^4 - \frac{210}{8}x^2 + \frac{15}{8} = \frac{315}{8}\cdot x^4 - \frac{105}{4}x^2 + \frac{15}{8}$$

$$\ddot{y}(x) = \frac{315\cdot 4}{8}\cdot x^3 - \frac{105\cdot 2}{4}\cdot x = \frac{315}{2}\cdot x^3 - \frac{105}{2}x$$

Substituindo $y(x)$, $\dot{y}(x)$ e $\ddot{y}(x)$ na E.D.O., temos:

$$(1-x^2)\cdot\left(\frac{315}{2}\cdot x^3 - \frac{105}{2}\cdot x\right) - 2x\left(\frac{315}{8}\cdot x^4 - \frac{105}{4}x^2 + \frac{15}{8}\right) + 30\left(\frac{1}{8}(63\cdot x^5 - 70x^3 + 15x)\right) =$$

$$\frac{315x^3}{2} - \frac{105}{2}\cdot x - \frac{315}{2}x^5 + \frac{105}{2}x^3 - \frac{315}{4}x^5 + \frac{105x^3}{2} - \frac{15}{4}x + \frac{945}{4}x^5 - \frac{525}{2}x^3 + \frac{225}{4}x$$

$$\left(-\frac{315}{2}x^5 - \frac{315}{4}x^5 + \frac{945x^5}{4}\right) + \left(\frac{315x^3}{2} + \frac{105x^3}{2} + \frac{105x^3}{2} - \frac{525x^3}{2}\right) + \left(-\frac{105x}{2} - \frac{15x}{4} + \frac{225}{4}x\right) = 0$$

$$\frac{-630x^5 - 315x^5 + 945x^5}{4} = 0 \qquad \frac{525x^3 - 525x^3}{2} = 0 \qquad \frac{-210x - 15x + 225x}{4} = 0$$

Portanto, o polinômio $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ é solução da E.D.O. de Legendre.

Exemplo 4 Encontre a solução de Legendre $(1-x^2)\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + \frac{3}{4}y(x) = 0$.

Solução: Para achar a solução, primeiro vamos determinar o valor de n. Comparando-se a equação dada no exercício com a forma da E.D.O. de Legendre, temos:

$$n(n+1) = \frac{3}{4} \Rightarrow n^2 + n - \frac{3}{4} = 0 \qquad n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}}{2\cdot 1}$$

$$\nearrow n_1 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\searrow n_2 = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$$

Tratando n como um real não negativo, então escolhemos a raiz $n_1 = \frac{1}{2}$. Usando a equação (213.a), temos de a_2 é dado por:

$$a_2 = -\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)}{2} a_0 = -\frac{3}{8} \cdot a_0$$

Usando a equação (213.b), temos de a_3 é dado por:

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1 = -\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{3!} a_1 = \frac{5}{24} \cdot a_1$$

Para $m = 2, 3, \ldots$, usamos a equação de recorrência dada pela equação (214):

$$a_{m+2} = \frac{-(n-m)(n+m+1)}{(m+1)(m+2)} a_m$$

$$a_4 = -\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}+2+1\right)}{(2+1)(2+2)} a_2 = -\frac{5}{128} a_0$$

$$a_5 = -\frac{\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}+3+1\right)}{(3+1)(3+2)} a_3 = \frac{1}{32} a_1$$

Como a solução da E.D.O. de Legendre é do tipo:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot x^m, \text{ então:}$$

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + \ldots \Rightarrow$$

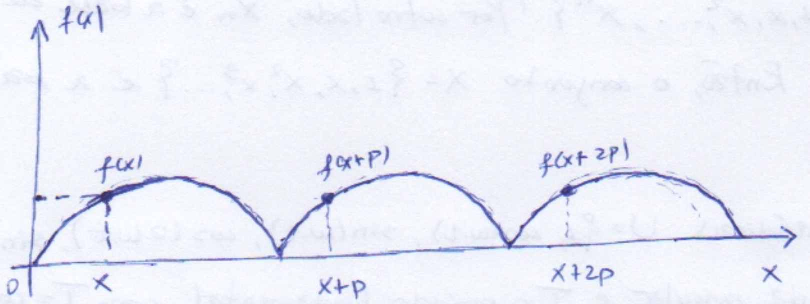
$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x - \frac{3}{8} \cdot x^2 a_0 + \frac{5}{24} \cdot a_1 x^3 - \frac{5}{128} a_0 x^4 + \frac{1}{32} a_1 \cdot x^5 \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = a_0 \left[1 - \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{128} x^4 - \ldots\right] + a_1 \cdot \left[x + \frac{5}{24} \cdot x^3 + \frac{1}{32} x^5 + \ldots\right]}$$

Série de Fourier

Série de Fourier é uma série infinita usada para representar funções periódicas. Uma função $f(x)$ é chamada de uma série periódica se ela está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ (exceto, talvez, em alguns pontos contáveis) e se há um número positivo p, chamado período, tal que:

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (290)$$



Do gráfico acima, tem-se $f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = \dots = f(x+k.p)$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. Decorre que se p é o período, então $2p, 3p, \dots$ também são. O período, definido dessa maneira, não é único. Assim, defini-se período como o menor valor de p tal que $f(x) = f(x+p)$ para todo p. O menor valor de p também é chamado de período fundamental.

Propriedades de funções periódicas

P1: Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções periódicas com período p, então $h(x) = f(x) + g(x)$ também é periódica. Também vale para o produto $h(x) = f(x).g(x)$.

P2: Se $f(x)$ é não periódica e $g(x)$ é periódica, então $h(x) = f(g(x))$ é periódica.

Exemplo: Se $g(x)$ é periódica, então $g^2(x)$ é periódica, $e^{g(x)}$ é periódica e $\dfrac{1}{1+g(x)}$ é periódica

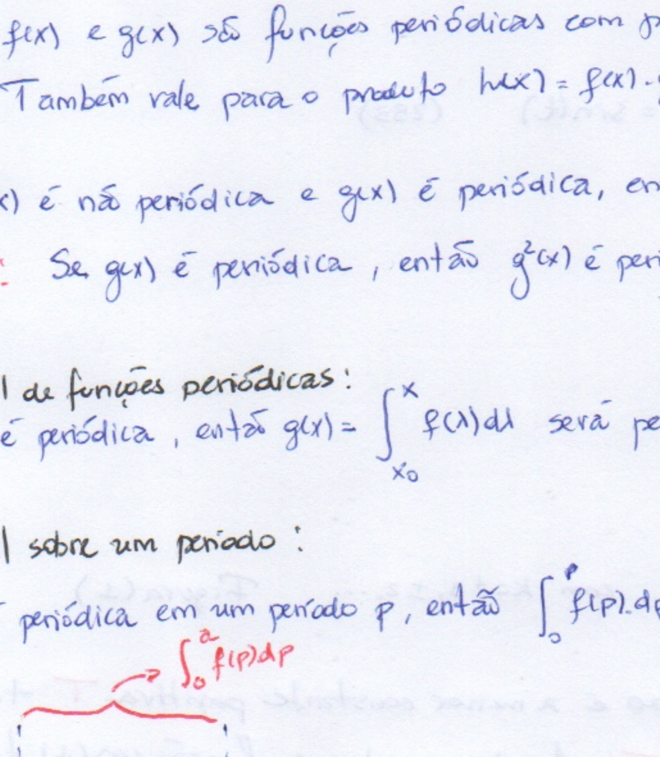
P3: Integral de funções periódicas:

Se $f(x)$ é periódica, então $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(\lambda)d\lambda$ será periódica se a integral $\int_{x_0}^{x_0+p} f(\lambda)d\lambda = 0$

P4: Integral sobre um período:

Se $f(x)$ é periódica em um período p, então $\int_0^p f(p).dp = \int_a^{a+p} f(p)\,dp$ qualquer que seja $\underline{\underline{a}}$

$\int_0^a f(p)dp$



$\int_a^{a+p} f(p).dp$

Polinômios Trigonométricos

Considera-se, inicialmente, os polinômios. Um polinômio algébrico de grau n é uma função da forma:

$$P_n(x) = c_0 + c_1 . x + c_2 . x^2 + \dots + c_n . x^n$$

sendo $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ coeficientes não dependentes de x. Todo polinômio algébrico de grau n é uma combinação linear das funções $X_n = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Por outro lado, X_n é a base de todos os polinômios com grau não superior a n. Então, o conjunto $X = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ é a base de todos os polinômios algébricos.

Seja, agora, o conjunto de funções periódicas $U = \{1, \cos(w.t), \sin(w.t), \cos(2.w.t), \sin(2.w.t), \dots\}$, sendo $w = \frac{2\pi}{T}$ a chamada freqüência angular e T o período fundamental, com T = constante. Qual o período de $\sin(t)$? Como $\sin(t)$ é periódica, então:

$$\sin(t+T) = \sin(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}. \quad (291)$$

De fato

$$\sin(t+T) = \sin(t).\cos(T) + \sin(T).\cos(t). \quad (292)$$

Logo, se a equação (291) é válida, então:

$$\sin(t).\cos(T) + \sin(T).\cos(t) = \sin(t) \quad (293)$$

A equação (293) é verdadeira se:

$$\begin{cases} \sin(T) = 0 \\ \cos(T) = 1 \end{cases}$$

Disso, resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(T) = 0 \Rightarrow T = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \\ \cos(T) = 1 \Rightarrow T = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots \end{array}\right\} T = k.2\pi, \text{ com } k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{Figura}(1)$$

Como, por definição, dissemos que o período é a menor constante positiva T tal que a equação (291) seja satisfeita, então $T = 2\pi$. Analogamente, a função $\cos(t)$ também tem período 2π.

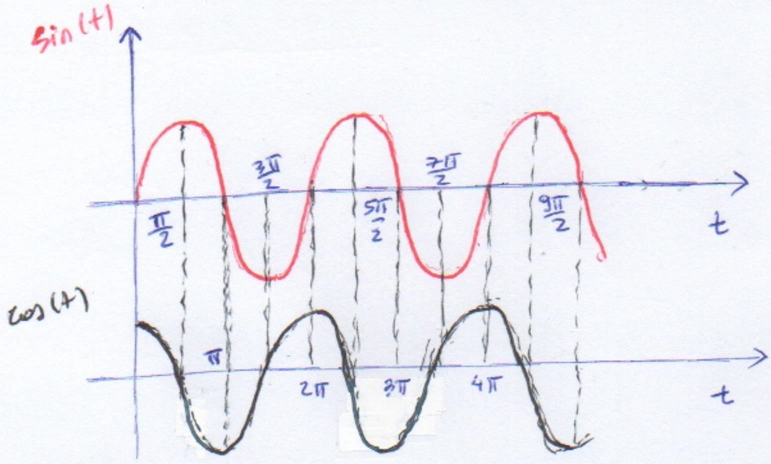


Figura (1)

Usando a propriedade $f(t) = f(t+T)$, $\sin(\omega.t) = \sin[\omega(t+T)]$, ou seja:

$$\sin(\omega.t) = \sin[\omega t + \omega T] \quad (294)$$

Considerando que a função sin tem período 2π, então a equação (294) será satisfeita se $\omega.T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$.