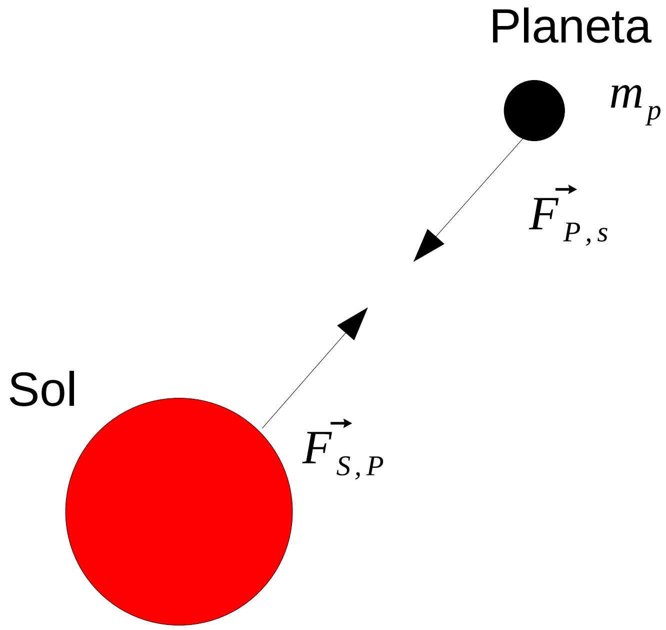
13. (TIPLER CAP 10, E 82) A segunda lei de Kepler afirma: o raio-vetor do sol até um planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Mostrar que esta lei é conseqüência imediata da lei de conservação do momento angular e de a força de atração gravitacional entre o sol e o planeta agir na direção da reta que une os dois corpos celestes.

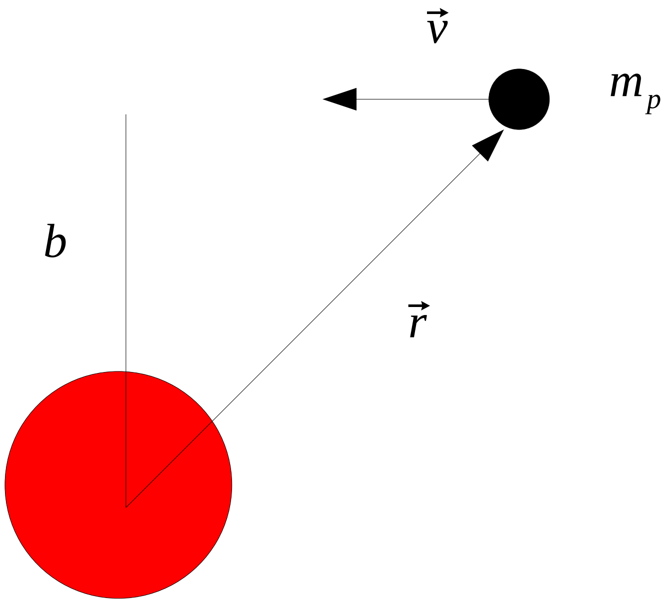


- As forças que atuam nos corpos são internas

Como não há torque externo resultante, o momento angular se conserva, ou seja

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0$$

Considerando o planeta com velocidade



O momento do planeta com relação ao Sol é

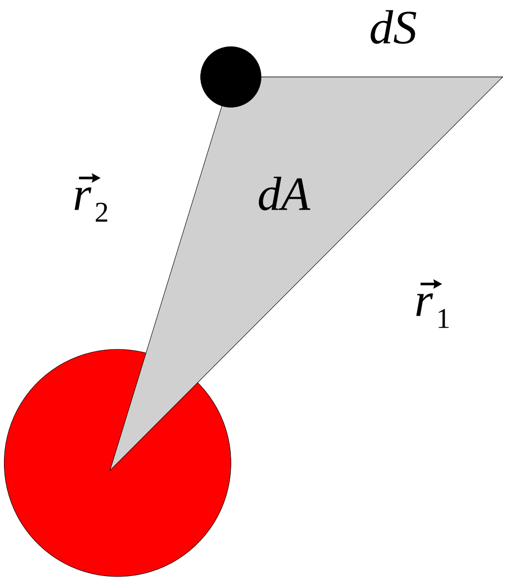
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_p$$

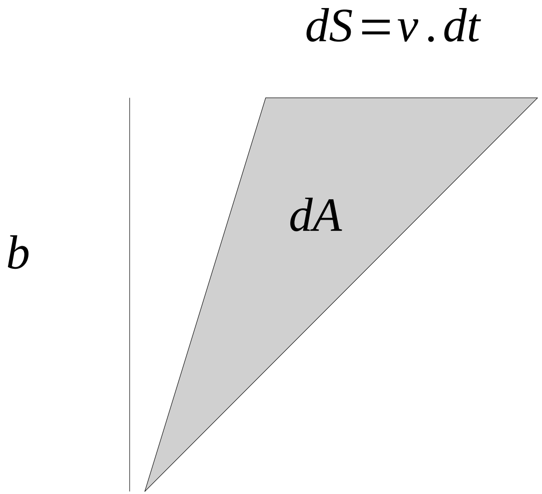
$$\vec{L} = \vec{r} \times m_p \vec{v}$$

Em módulo, como b é perpendicular a v

$$L = m_p . v . b$$

A área formada por um deslocamento infinitesimal dS é





$$dA = \frac{base\,.\,altura}{2} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{dS\,.\,b}{2} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{b\,.\,vdt}{2}$$

Multiplicando e dividindo pela massa do planeta

$$dA=\frac{b\,.\,vdt}{2}\frac{m_p}{m_p} \Rightarrow \frac{dA}{dt}=\frac{m_p\,.\,v\,.\,b}{2}\frac{1}{m_p}$$

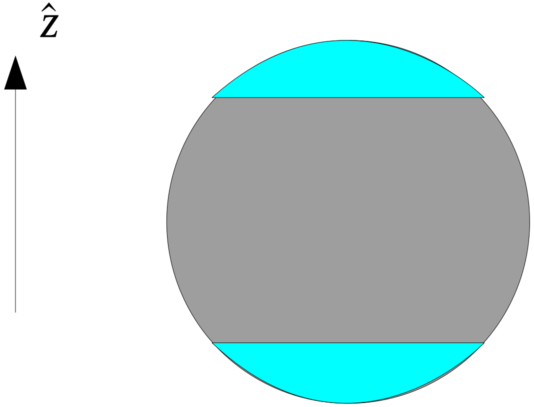
Como $L=m_p\,.\,v\,.\,b \Rightarrow \dfrac{dA}{dt}=\dfrac{L}{2m_p}$

Como $\dfrac{dL}{dt}=0 \Rightarrow L=constante \Rightarrow \boxed{\dfrac{dA}{dt}=constante}$

Portanto o raio vetor varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais

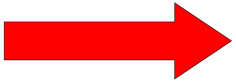
14. (TIPLER CAP 10, E 85) As calotas polares contêm cerca de $2{,}3\times10^{19}$ kg de gelo. Esta massa contribui desprezivelmente para o momento de inércia da terra, pois está localizada junto aos pólos, nas proximidades do eixo de rotação. Estimar a variação da duração do dia que seria provocada se as calotas polares fossem fundidas e a água resultante fosse distribuída uniformemente por toda a superfície da terra. (O momento de inércia de casca esférica de massa *m* e raio *r* é $2mr^2/3$.)

Antes

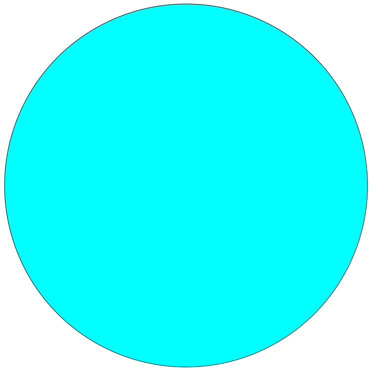


$$I = I_{esfera} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\vec{\omega}_a = \omega_a \hat{k}$$



Depois



$$I_d = I_{esfera} + I_{casca} = \frac{2}{5} MR^2 + \frac{2}{3} mR^2$$

$$\vec{\omega}_d = \omega_d \hat{k}$$

Considerando apenas o movimento de spin da Terra

- Na ausência de torques externos

$$\vec{L}_{antes}=\vec{L}_{depois} \quad \Longrightarrow \quad I_a\vec{\omega}_a=I_d\vec{\omega}_d \quad \Longrightarrow \quad I_{esfera}\vec{\omega}_a=(I_{esfera}+I_{casca})\vec{\omega}_d$$

De forma escalar $\quad I_{esfera}\omega_a=(I_{esfera}+I_{casca})\omega_d$

Como $\quad \omega=2\pi f \quad$ e $\quad f=\dfrac{1}{T} \quad \Longrightarrow \quad \omega=\dfrac{2\pi}{T}$

$$\Longrightarrow \quad I_{esfera}\frac{2\pi}{T_a}=(I_{esfera}+I_{casca})\frac{2\pi}{T_d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{I_{esfera}}{T_a}=\frac{I_{esfera}+I_{casca}}{T_d}$$

Isolando o “período depois”

$$T_d = \frac{(I_{esfera} + I_{casca})}{I_{esfera}} T_a \quad \Rightarrow \quad T_d = \left(1 + \frac{I_{casca}}{I_{esfera}}\right) T_a$$

Substituindo valores os valores de inércia

$$I_{casca} = \frac{2}{3} m R^2$$

$$I_{esfera} = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\Rightarrow \quad T_d = \left(1 + \frac{\frac{2}{3} m R^2}{\frac{2}{5} M R^2}\right) T_a$$

$$\Rightarrow \quad T_d = \left(1 + \frac{5m}{3M}\right) T_a$$

Como

$$M = 6{,}0 \times 10^{24}\, kg$$

$$m = 2{,}3 \times 10^{19}\, kg$$

$$T_a = 1\, d = 24\, h = 86400\, s$$

$$\Rightarrow \quad T_d = \left(1 + \frac{5 \times 2{,}3 \times 10^{19}}{3 \times 6{,}0 \times 10^{24}}\right) 86400$$

$$\Rightarrow \quad T_d \approx 86400{,}552\, s$$

Portanto $\quad \Delta T = T_d - T_A \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 86400{,}552 - 86400$

$$\boxed{\Delta T = 0{,}552\, s}$$