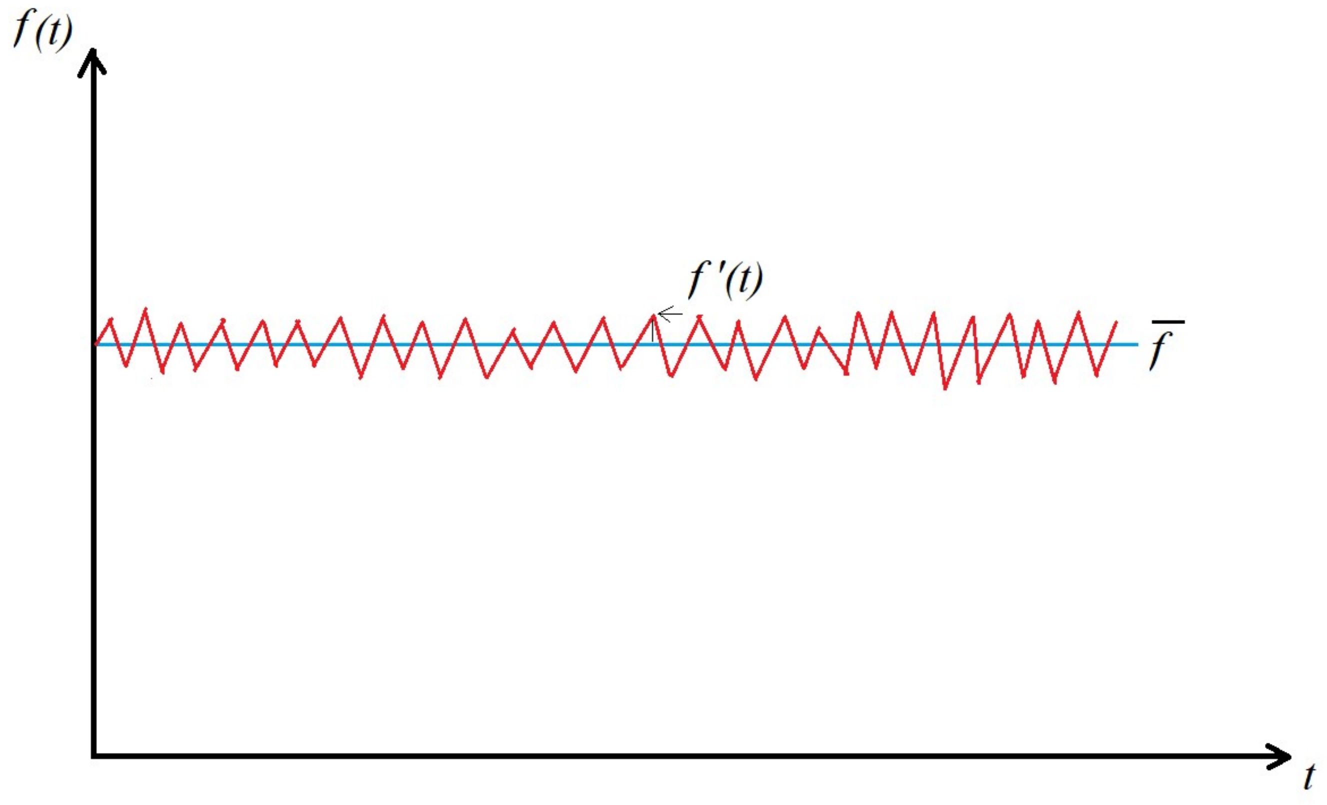
Média de Reynolds da Equação de Navier-Stokes da Camada Limite Turbulenta

Numa camada limite turbulenta, o escoamento pode ser considerado formalmente como não-permanente. Uma grandeza física f característica do escoamento, tal como u, υ ou p, pode ser escrita como a superposição de um valor médio $\overline{f}$ e uma flutuação f', de modo que $f(t) = \overline{f} + f'(t)$.



O valor médio de $f(t)$ pode ser obtido por uma média temporal:

$$\overline{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f\, dt$$

Lembrando que $f(t) = \overline{f} + f'(t)$, temos:

$$\overline{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \left[\overline{f} + f'(t)\right] dt = \underbrace{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \overline{f}\, dt}_{\overline{f}} + \underbrace{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f'(t)\, dt}_{0}$$

De onde chegamos em dois resultados:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \overline{f}\, dt = \overline{f}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f'(t)\, dt = 0$$

Ou seja: A média temporal de uma média é a própria média, e a média de uma flutuação aleatória é nula.

Podemos fazer a operação de média sobre as equações da camada limite turbulenta:

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$$

Fazendo a média sobre os dois lados da equação:

$$\lim_{T\to\infty}\ \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dt=\underbrace{\lim_{T\to\infty}\ \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} 0\ dt}_{0}$$

Do lado esquerdo, temos:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \frac{\partial u}{\partial x}\, dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\, dt = 0$$

Como a integração é no tempo e a derivação é espacial, o sinal de derivação pode ir para fora das integrais:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} u\, dt\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} \upsilon\, dt\right] = 0$$

Substituindo agora $u = \bar{u} + u'$ e $\upsilon = \bar{\upsilon} + \upsilon'$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T}\bar{u}\;dt}_{\bar{u}}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T}u'\;dt}_{0}\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T}\bar{\upsilon}\;dt}_{\bar{\upsilon}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T}\upsilon'\;dt+}_{0}\right]=0$$

E resulta a equação da continuidade para a camada limite de um escoamento incompressível e bidimensional:

$$\boxed{\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\upsilon}}{\partial y}=0}$$

Tomando a equação da Navier-Stokes:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Primeiramente, vamos somar a equação da continuidade multiplicada por u do lado esquerdo:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+u\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}}_{0}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Isso resulta:

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}}+\underbrace{\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}}_{\frac{\partial(u\upsilon)}{\partial y}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Assim, temos a equação de Navier-Stokes escrita da forma:

$$\frac{\partial\left(u^{2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial(u\upsilon)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}$$

É sobre essa equação que vamos executar a operação de média. Uma vez que os detalhes já foram explanados durante a operação de média da equação da continuidade, vamos representar a média apenas por uma barra sobre as variáveis. Assim:

$$\frac{\partial\left(\overline{u^{2}}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{u\upsilon}\right)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\nu\frac{\partial^{2}\overline{u}}{\partial y^{2}}$$

Agora, vamos lembrar que $u=\overline{u}+u'$, $\upsilon=\overline{\upsilon}+\upsilon'$ e $p=\overline{p}+p'$. Assim:

$$\overline{u^2}=\overline{(\overline{u}+u')(\overline{u}+u')}=\overline{\overline{u}\,\overline{u}+2\overline{u}u'+u'^2}=\overline{\overline{u}\,\overline{u}}+\overline{2\overline{u}u'}+\overline{u'^2}=\overline{u}\,\overline{u}+2\overline{u}\underbrace{\overline{u'}}_{0}+\overline{u'^2}$$

Assim:

$$\overline{u^2}=\overline{u}\,\overline{u}+\overline{u'^2}$$

Analogamente, temos:

$$\overline{u\upsilon}=\overline{(\overline{u}+u')(\overline{\upsilon}+\upsilon')}=\overline{u}\,\overline{\upsilon}+\overline{u}\underbrace{\overline{\upsilon'}}_{0}+\underbrace{\overline{u'}}_{0}\overline{\upsilon}+\overline{u'\upsilon'}=\overline{u}\,\overline{\upsilon}+\overline{u'\upsilon'}$$

Substituindo esses resultados na equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial\left(\overline{u}\,\overline{u}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{u'^2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{\upsilon}\,\overline{u}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overline{u'\upsilon'}\right)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}$$

Experimentos mostram que, na camada limite:

$$\frac{\partial\left(\overline{u'^2}\right)}{\partial x}<<<\frac{\partial\left(\overline{u'\upsilon'}\right)}{\partial y}$$

Assim, esse termo é omitido e, considerando que a viscosidade cinemática é uniforme, a equação fica:

$$\frac{\partial\left(\bar{u}\,\bar{u}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\bar{\upsilon}\,\bar{u}\right)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}-\overline{u'\upsilon'}\right)$$

Finalmente, a equação da continuidade da camada limite turbulenta, multiplicada por $\bar{u}$, é subtraída do lado esquerdo da equação:

$$\frac{\partial\left(\bar{u}\,\bar{u}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\bar{\upsilon}\,\bar{u}\right)}{\partial y}-\bar{u}\left(\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial y}}_{0}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}-\overline{u'\upsilon'}\right)$$

Com essa última operação, a equação da camada limite turbulenta fica:

$$\boxed{\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{\upsilon}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}-\overline{u'\upsilon'}\right)}$$

Essa é chamada Média de Reynolds da Equação de Navier-Stokes (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equation, em inglês, conhecida pela sigla RANS) da Camada Limite Turbulenta de um escoamento bidimensional e incompressível.

O último termo da equação, multiplicado pela massa específica, é a chamada tensão turbulenta ou tensão de Reynolds:

$$\boxed{\tau_{turb}=-\rho\,\overline{u'\upsilon'}}$$

Uma primeira tentativa para modelar as tensões de Reynolds foi apresentada por Boussinesq em 1877. Em sua hipótese sobre as tensões turbulentas, este propôs que, a exemplo das tensões viscosas, as tensões turbulentas fossem tomadas como o produto dos gradientes de velocidade por um coeficiente de difusão, chamado de viscosidade turbilhonar ou turbulenta (eddy viscosity em inglês). Assim:

$$\boxed{-\overline{u'\upsilon'} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}}$$

Onde ν_t é a viscosidade turbilhonar. Ao contrário da viscosidade molecular, que é uma propriedade do fluido, a viscosidade turbilhonar seria uma propriedade do escoamento.

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.