MATEMÁTICA IV - 1º Semestre de 2020

2ª Avaliação em Quarentena

Entrega até 06/05/2020.

Todas as respostas devem ser justificadas.

Questão 1 Decida se cada afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

ítem	Afirmação	Resposta
(a)	Se $f(x_1, x_2) = 2 + \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2)$ então a matriz Hessiana de f em $(0,0)$ é $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.	( )
(b)	Se $f(x_1, x_2) = 2 + \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2)$ então $D^3f(0,0)(u^3) =$ $= (18u_1^2u_2 + 36u_1u_2^2)$	( )
(c)	Para um subconjunto aberto não vazio $A \subset \mathbf{R}^+$, se $a \in A$ então $f(x_1, x_2, x_3) = 5 + 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 - 2ax_2x_3 - x_1^4 +$ $+ \sin(x_1^3 e^{x_1x_2})$ tem mínimo local estrito na origem.	( )

Questão 2 Decida se cada ponto $\overline{x}$ dado é ponto crítico de f, e em caso afirmativo indique a alternativa correta:

(1) $\overline{x}$ é ponto de máximo local, e essa informação decorre da análise das derivadas parciais de ordem 2 de f em $\overline{x}$;

(2) $\overline{x}$ é ponto de mínimo local, e essa informação decorre da análise das derivadas parciais de ordem ≤ 2 de f em $\overline{x}$;

(3) $\overline{x}$ é ponto de sela, e essa informação decorre da análise das derivadas parciais de ordem ≤ 2 de f em $\overline{x}$;

(4) não é possível decidir se $\overline{x}$ é ponto de máximo local, de mínimo local ou de sela de f usando apenas as derivadas parciais de ordem ≤ 2.

$f : A \to B$	$f(x)$	$\overline{x}$	É ponto crítico?	Tipo?
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$f(x) = 2 + \cos(x + x^2)$	$\overline{x} = 0$		( )
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$f(x) = 2 + \cos(x^2)$	$\overline{x} = 0$		( )
$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$	$f(x) = \cos(x_1x_2)$	$\overline{x} = (0,0)$		( )
$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$	$f(x) = \cos(x_1 + x_2)$	$\overline{x} = (0,0)$		( )
$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$	$f(x) = e^{x^2-2x+y^2-2y+2}$	$\overline{x} = (1,1)$		( )
$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$	$f(x) = 2 + 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 +$ $+4x_2^2 + 2x_2x_3 + 8x_3^2$	$\overline{x} = (0,0,0)$		( )
$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$	$f(x) = 2 + 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 +$ $+4x_2^2 + 2x_2x_3 + 8x_3^2 + 10\cos(x_2)$	$\overline{x} = (0,0,0)$		( )

Questão 3 Decida se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

(a) Se $f : (a, b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^q$ é de classe C^1 e $\bar{t} \in (a, b)$ então $\dim \mathrm{Im}(Df(\bar{t})) = 1$

(b) Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ é de classe C^1 e $\overline{x} \in \Omega$ então $\dim T_{\overline{x}}(\mathrm{Graf}(Df(\overline{x}))) = p$.

(c) Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ é de classe C^1 então $\dim T_{\overline{x}}(\mathrm{Graf}(f)) = p$.

(d) Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ é de classe C^1 injetora então $\dim \ker(Df(\overline{x})) = 0$.

Questão 4 Complete as lacunas de forma a tornas cada afirmação verdadeira:

(a) Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ é de classe C^1 e $\overline{x} \in \Omega$, então se f é ______________ tem-se $\dim \ker(Df(\bar{t})) = q - p$.

(b) Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ é de classe C^1 e $\overline{x} \in \Omega$, então se f é ______________ tem-se $\dim \mathrm{Im}(Df(\bar{t})) = p$.

Questão 5 Decida se cada uma das afirmações é verdadeira (V) ou falsa (F).

ítem	Afirmação	Resposta
(a)	A superfície S dada pelo gráfico de $f(x_1, x_2) = \|x_1\|, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, pode ser descrita como imagem de uma função injetora de classe C^1.	( )
(b)	Se Γ_1 e Γ_2 são as circunferências de raio 1 em $\mathbf{R}^2$ centradas respectivamente em $(0, 0)$ e $(2, 0)$, então existe $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 tal que $Z(f) = \mathcal{N}_0(f) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.	( )
(c)	Se Γ_1 e Γ_2 são respectivamente o eixo dos x e o eixo dos y em $\mathbf{R}^2$, então existe $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 tal que $Z(f) = \mathcal{N}_0(f) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.	( )
(d)	Se Γ_1 e Γ_2 são respectivamente o eixo dos x e o eixo dos y em $\mathbf{R}^2$, então existe $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 com $Df(\overline{x}, \overline{y})$ sobrejetora em cada ponto $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbf{R}^2$ tal que $Z(f) = \mathcal{N}_0(f) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.	( )