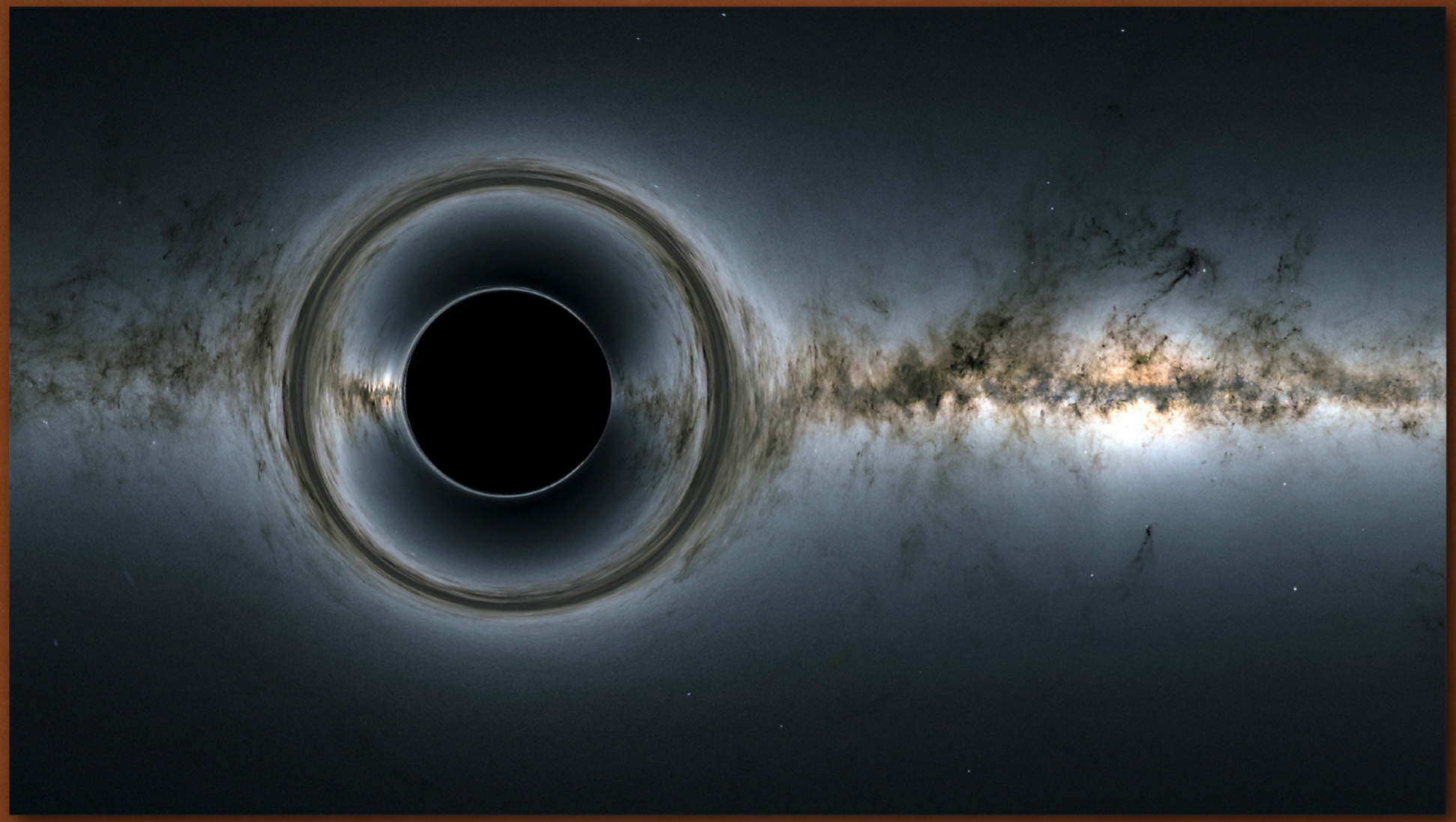
INTRODUÇÃO À

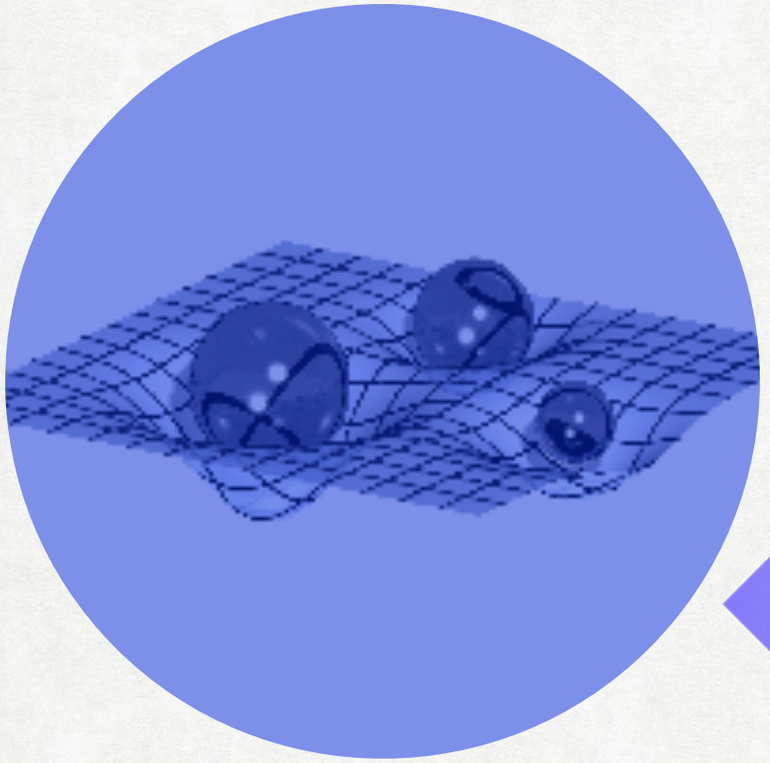


RELATIVIDADE

AULA 15 - 29/04/2020

- Soluções simples das Equações de Einstein
- A métrica de Schwarzschild
- **Leitura: Capítulo 5 (5.1-5.4) do Carroll**

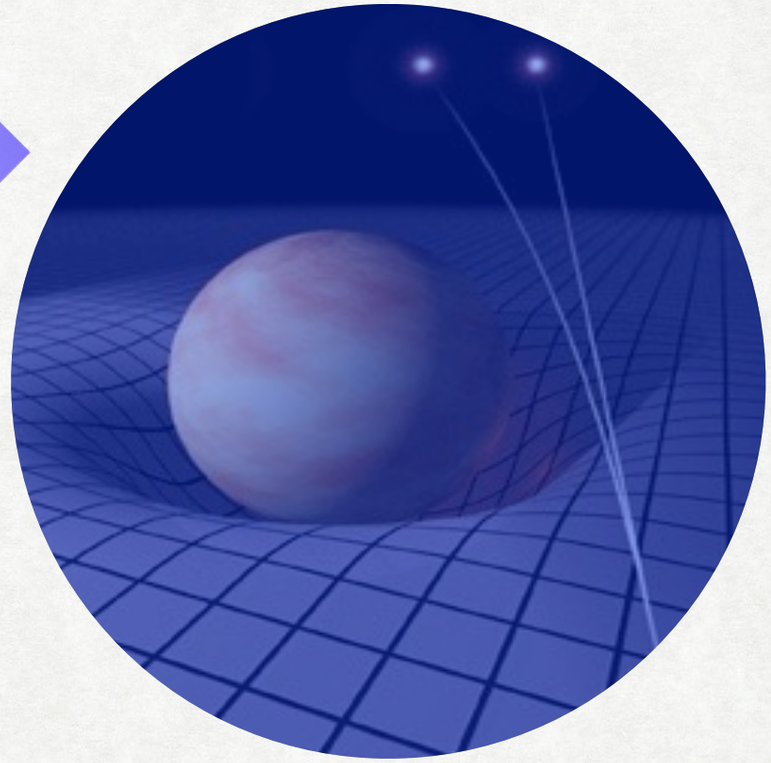
EQUAÇÕES DE EINSTEIN



A matéria curva o espaço-tempo, e determina a métrica...

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

... enquanto a métrica determina como a matéria se move.

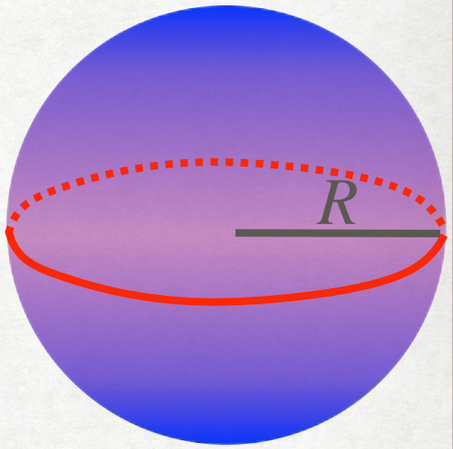


Hoje vamos começar a explorar algumas **soluções** das Equações de Campo de Einstein. Nosso ponto de partida é o caso mais simples possível:

Digamos que a métrica é conhecida.

Qual o tensor de energia e momento associado a esse espaço-tempo?

ESFERA (1+2)D



- Lembra da esfera 2D? Vamos recuperar a dimensão temporal:

$$ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 \quad \rightarrow \quad ds^2 = -\,c^2 dt^2 + R^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

- Dada a métrica desse espaço-tempo, obtemos:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = -\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

OBS: EM COORDENADAS ESFÉRICAS, A MÉTRICA TEM DIMENSÕES!

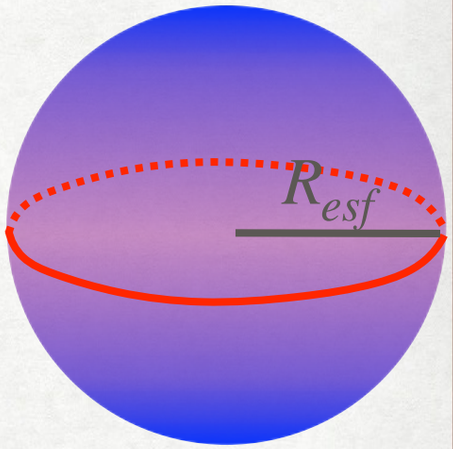
- O tensor de Riemann pode ser calculado facilmente:

$$R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta} = \partial_\alpha\,\Gamma^\mu_{\beta\sigma} - \partial_\beta\,\Gamma^\mu_{\alpha\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\,\Gamma^\lambda_{\beta\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}$$

$$R^0{}_{\sigma\alpha\beta} = R^\mu{}_{0\alpha\beta} = 0 \quad , \quad R^1{}_{212} = \operatorname{sen}^2\theta \quad , \quad R^2{}_{121} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad R_{0101} = R_{0202} = 0 \quad , \quad R_{1212} = R_{2121} = R^2\operatorname{sen}^2\theta$$

ESFERA (1+2)D



- Usando os resultados acima podemos calcular o ***tensor de Ricci***:

$$R_{\sigma\beta} = R^{\mu}_{\ \sigma\mu\beta}$$

$$\Longrightarrow \quad R_{00} = 0 \quad , \quad R_{11} = 1 \quad , \quad R_{22} = \mathrm{sen}^2\,\theta$$

- O ***escalar de Ricci*** é:

$$R = g^{\sigma\beta} R_{\sigma\beta} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{2}{R_{esf}^2}$$

- Podemos agora calcular o **tensor de Einstein**:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$\Longrightarrow \quad G_{00} = \frac{1}{R_{esf}^2} \quad , \quad G_{11} = 0 \quad , \quad G_{22} = 0$$

- Agora podemos inserir isso nas ***Equações de Einstein***, e obter:

$$G_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad T_{00} = \rho = \frac{1}{\kappa\, R_{esf}^2} \quad , \quad T_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

SE VOCÊS ANALISAREM ESSE EXEMPLO COM **BEM MAIS PROFUNDIDADE**, VÃO ENCONTRAR VÁRIOS PROBLEMAS...!

ENTÃO, NÃO SE EMPOLGUEM MUITO COM ESSA SOLUÇÃO!

MÉTRICAS COM SIMETRIA ESFÉRICA

- Poderíamos generalizar o exemplo anterior para N dimensões espaciais… E, mais adiante, vamos fazer justamente isso!

- Mas por enquanto vamos ficar em 3 dimensões espaciais, e vamos assumir a mesma simetria que temos acima, ou seja, vamos supor que o nosso sistema físico tem ***simetria esférica***, descrita pelo elemento de área angular $d\Omega^2 = d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta\, d\varphi^2$.

- Vamos também, por simplicidade, supor que o nosso universo é ***estático*** — ou seja, vamos supor que a sua geometria não muda com o tempo.

- E, por final, vamos procurar por uma ***solução de vácuo*** (ou quase…) Querendo dizer: queremos que $G_{\mu\nu} = 0$ em ***quase*** todo o espaço-tempo.

MÉTRICAS COM SIMETRIA ESFÉRICA

- Vamos então combinar as exigências de que o espaço-tempo tem as propriedades:

  1. Tem simetria esférica (não depende de θ, φ) ;
  2. É estático (não depende de t) ;
  3. Deve corresponder a uma solução de vácuo das equações de Einstein, ou seja, $G_{\mu\nu} = 0$ *.

- Essas hipóteses, combinadas, levam à métrica:

$$ds^2 = -B(r)\, c^2 dt^2 + A(r)\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

OBS: VOCÊ PODERIA PENSAR EM UM TERMO TIPO $F(r) r^2 d\Omega^2$, MAS UMA REDEFINIÇÃO DO RAIO ASSIMILA ESSA FUNÇÃO À FUNÇÃO GENÉRICA $A(r)$

- É útil re-escrever isso como $A(r) = e^{a(r)}$, $B(r) = e^{b(r)}$, de tal forma que:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{b(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{a(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \mathrm{sen}^2\,\theta \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-b(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-a(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \mathrm{sen}^{-2}\,\theta \end{pmatrix}$$

LIMITE DE ESPAÇO-TEMPO PLANO (MINKOWSKI): $a, b \to 0$

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Vamos começar a explorar algumas propriedades dessa métrica genérica:

$$ds^2 = -\, e^{b(r)}\, c^2 dt^2 + e^{a(r)}\, dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

LIMITE DE MINKOWSKI:
$a \to 0,\ b \to 0$

- O elemento de volume 4-dimensional neste caso é:

$$\sqrt{-\det g}\; d^4x = r^2\, e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{sen}\theta\, c dt\, dr\, d\theta\, d\varphi \;=\; cdt \;\times\; e^{\frac{a+b}{2}} \;\times\; r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

- Podemos também calcular as ***conexões***. Temos:

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad , \quad \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{db}{dr} = \frac{1}{2} b' \quad , \quad \Gamma^0_{\alpha 2} = \Gamma^0_{\alpha 3} = 0$$

SINAL CORRIGIDO!

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} b' e^{b-a} \quad , \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} a' \quad , \quad \Gamma^1_{22} = -\, r e^{-a} \quad , \quad \Gamma^1_{33} = -\, r e^{-a} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = -\operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad , \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Gamma^2_{0\mu} = \Gamma^3_{0\mu} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^2_{13} = 0$$

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Podemos calcular o tensor de Ricci diretamente da sua definição:

$$R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\sigma\beta} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

$$= \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} - \partial_\beta\partial_\sigma \sqrt{-\det g} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

- Depois de um pouquinho de álgebra obtemos que as ***únicas componentes não-nulas*** são:

$$R_{00} = e^{b-a}\left[\frac{1}{2}b'' - \frac{1}{4}b'(a'-b') + \frac{1}{r}b'\right]$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}b'' + \frac{1}{4}b'(a'-b') + \frac{1}{r}a'$$

$$R_{22} = 1 - e^{-a} - \frac{r}{2}(b'-a')e^{-a}$$

$$R_{33} = R_{22}\,\mathrm{sen}^2\theta$$

SINAL CORRIGIDO!

Agora, note que estamos buscando uma ***solução de vácuo*** das Equações de Einstein, ou seja, $G_{\mu\nu} = 0$.
Mas lembre-se que:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad \Rightarrow \quad g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\mu}R$$

$$\Longrightarrow \quad G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -R$$

Portanto, se $G_{\mu\nu} = 0$, então $R_{\mu\nu} = 0$ e $R = 0$! Logo, no caso de uma solução de vácuo, as equações de Einstein são equivalentes a resolver $R_{\mu\nu} = 0$!

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Ou seja, temos de resolver o sistema de equações:

$$R_{00} = e^{b-a}\left[\frac{1}{2}b'' - \frac{1}{4}b'(a'-b') + \frac{1}{r}b'\right] \;=\; 0$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2}b'' + \frac{1}{4}b'(a'-b') + \frac{1}{r}a' \;=\; 0$$

$$R_{22} = 1 - e^{-a} - \frac{r}{2}(b'-a')e^{-a} \;=\; 0$$

$$R_{33} = R_{22}\,\mathrm{sen}^2\theta \;=\; 0$$

- Onde, claramente, as equações para R_{22} e R_{33} são redundantes. Ou seja, nosso sistema simplifica para:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}b'' - \frac{1}{4}b'(a'-b') + \frac{1}{r}b' \;&=\; 0 \\ -\frac{1}{2}b'' + \frac{1}{4}b'(a'-b') + \frac{1}{r}a' \;&=\; 0 \end{aligned}\right\} \quad b' + a' = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$$

$$1 - e^{-a} - \frac{r}{2}(b'-a')e^{-a} \;=\; 0$$

SINAL CORRIGIDO!

A RIGOR, $b = -a + c$, ONDE c É UMA CONSTANTE. MAS BASTA TOMAR O LIMITE DE MINKOWSKI, $a \to 0$, $b \to 0$, PARA VER QUE $c = 0$!

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Substituindo a igualdade $b = -a$ na equação para R_{22} obtemos:

$$1 - e^{-a} - \frac{r}{2}(b' - a')e^{-a} \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-a} + r\,a'\,e^{-a} \;=\; 0$$

SINAL CORRIGIDO!

ou seja, $e^{a} - 1 + r\,a' \;=\; 0$, o que pode ser reescrito como:

$$a' = \frac{1 - e^{a}}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{da}{1 - e^{a}} = \frac{dr}{r}$$

- Tanto o lado esquerdo quanto o lado direito têm primitivas:

$$\int \frac{da}{1 - e^{a}} = \int \frac{dr}{r} \quad \Longrightarrow \quad -\log\left(e^{-a} - 1\right)_{a_0}^{a} = \log\,(r)_{r_0}^{r}$$

- Sem perda de generalidade, vamos tomar $a_0 = a(r_0) \to -\log 2$, assim $e^{-a_0} - 1 = 1$.

- Portanto, obtemos finalmente que:

$$-\log\left(e^{-a} - 1\right) = \log(r) - \log(r_0) = \log\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{-a} \;=\; e^{+b} \;=\; 1 + \frac{r_0}{r}}$$

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Portanto, chegamos no resultado de que a métrica é:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

- Mas afinal, quem é essa constante r_0 que apareceu? Para isso, vamos nos lembrar do **limite Newtoniano**:

$$g_{00} \to -\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right) \quad \Rightarrow \quad r_0 = -\frac{2\,GM}{c^2} \quad .$$

- Note que, na solução obtida para a métrica, a massa M aparece primeiro como uma constante de integração, que depois podemos identificar, numa certa aproximação (não-relativística, quase-estática) com a massa de um objeto tal como um planeta ou estrela.

- Porém, a métrica acima é uma solução ***exata***, perfeitamente ***relativística.*** Veremos logo mais em que limites essa métrica leva a uma física parecida com aquela da gravitação de Newton, e quando ela é fundamentalmente diferente, levando a fenômenos inteiramente novos.

- Para resumir: a métrica que encontramos acima chama-se métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2 \quad ,$$ onde $R_s = \dfrac{2GM}{c^2}$ é o ***raio de Schwarzschild***

A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Note que é fácil tomar o limite de Minkowski: basta fazer $a \to 0$ e $b \to 0$.

- Isso equivale tomar $R_s \to 0$, ou $M \to 0$. Nesse caso temos:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2$$

$$\to \quad ds^2 = -\, c^2\, dt^2 + dr^2 + r^2\, d\Omega^2 \quad ,$$

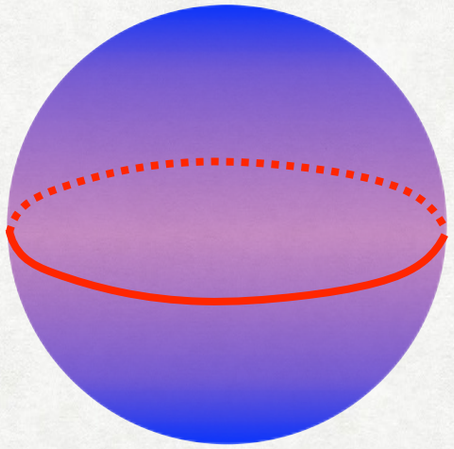
que é de fato o espaço-tempo plano, expresso em coordenadas esféricas.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Nesse momento vamos introduzir formalmente o conceito de ***embedding*** (***imersão***).

- Vamos tomar o nosso exemplo favorito: a esfera 2D.

- Apesar da esfera 2D ter apenas **duas dimensões espaciais**, de modo a visualizar essa superfície precisamos do **espaço Euclideano de três dimensões**:



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Vamos fazer algo parecido com a métrica de Schwarzschild. Comece notando que o elemento de distância espacial é dado por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \boxed{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2}$$

- Sem perda de generalidade, vamos escrever a expressão para esse elemento no plano $\theta = \pi/2$, $\operatorname{sen}\theta = 1$, e $d\theta = 0$, e nesse plano $r \to \rho$. Temos então:

$$dl^2 = \left(1 - \frac{R_S}{\rho}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2$$

- O elemento de distância acima define uma certa superfície 2D. Vamos tentar "enfiar" essa superfície no espaço Euclideano de 3D. Note que:

$$dl_E^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Para fazer a imersão da superfície 2D da seção $\theta = \pi/2$ da métrica de Schwarzschild no espaço Euclideano, igualamos:

$$dl^2 = \left(1 - \frac{R_S}{\rho}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2 \;=\; dl_E^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

- Ou seja, vamos tomar a superfície $z(\rho)$ no espaço Euclideano, tal que:

$$\frac{d\rho^2}{1 - \frac{R_S}{\rho}} = d\rho^2 + dz^2(\rho) = d\rho^2 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 d\rho^2$$

- Simplificando, temos:

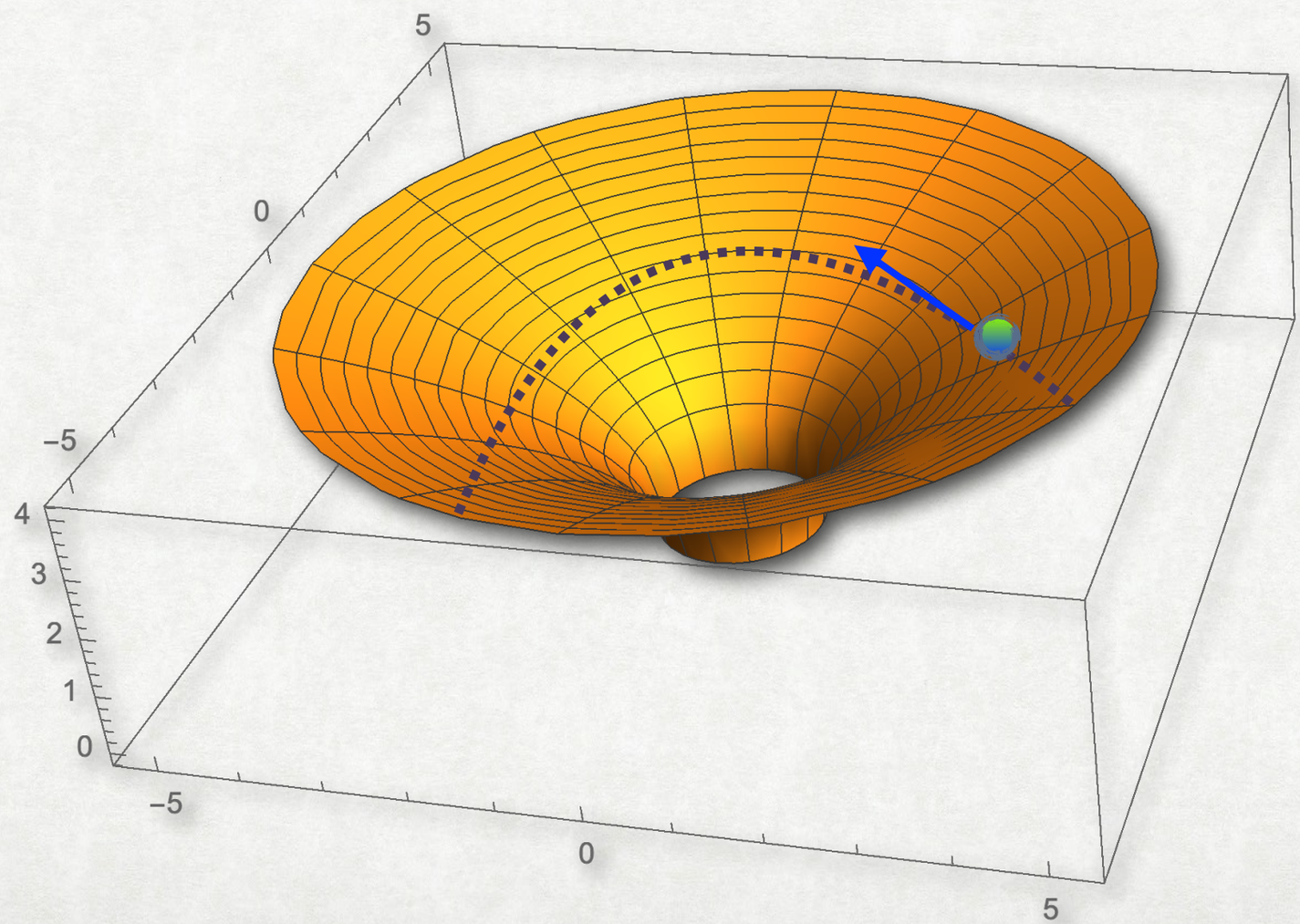
$$\frac{1}{1 - \frac{R_S}{\rho}} - 1 = \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 \quad \Rightarrow \frac{R_s/\rho}{1 - R_s/\rho} = \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 \quad \Rightarrow z(\rho) = \int d\rho \sqrt{\frac{R_s/\rho}{1 - R_s/\rho}}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- A integral anterior é trivial, e resulta em:

$$z(\rho) = 2\sqrt{R_s(\rho - R_s)} + C \quad , \quad \rho > R_s$$

- Vamos visualizar essa essa superfície:

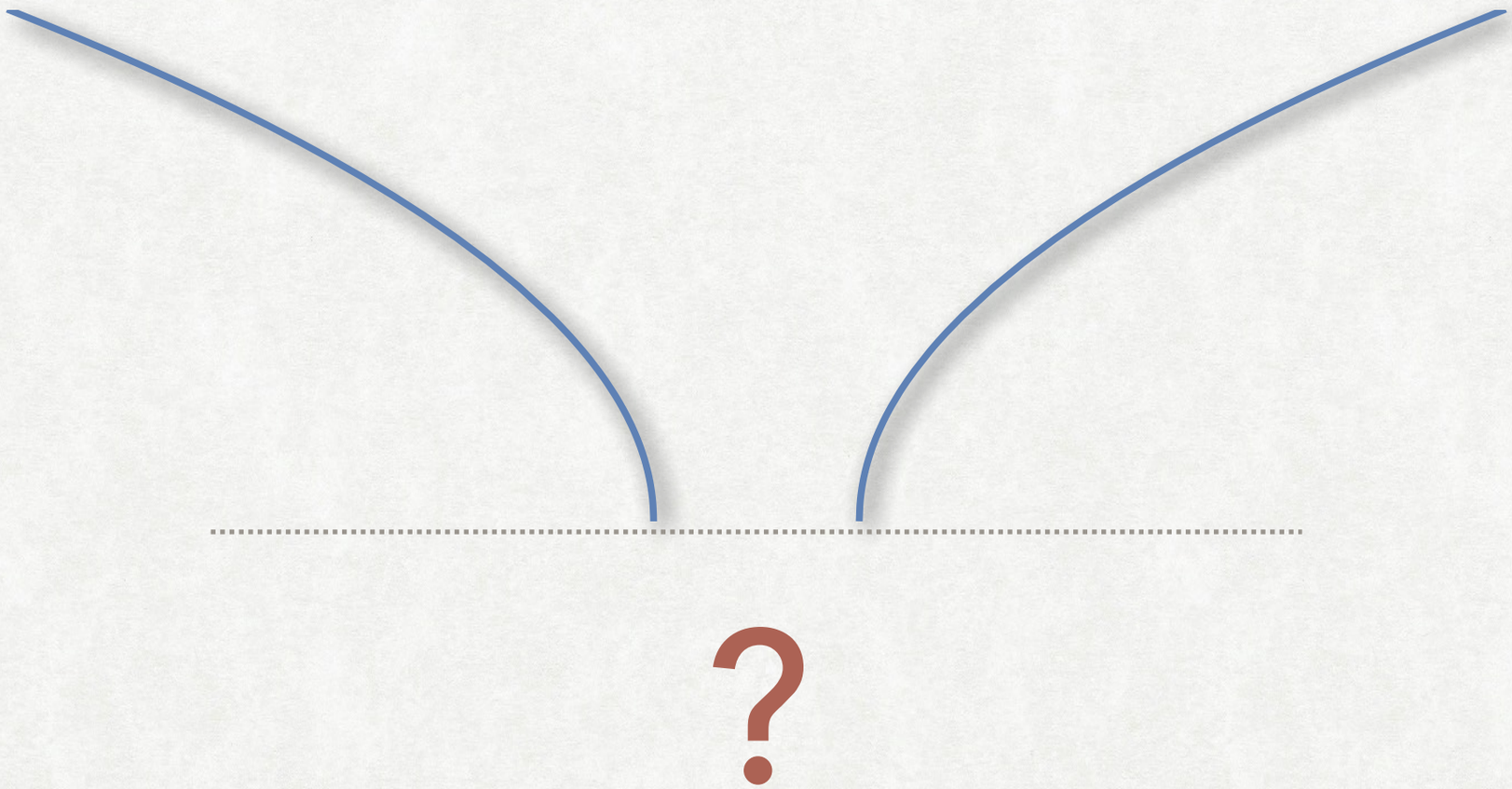


MATHEMATICA

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Vamos olhar isso de perfil:

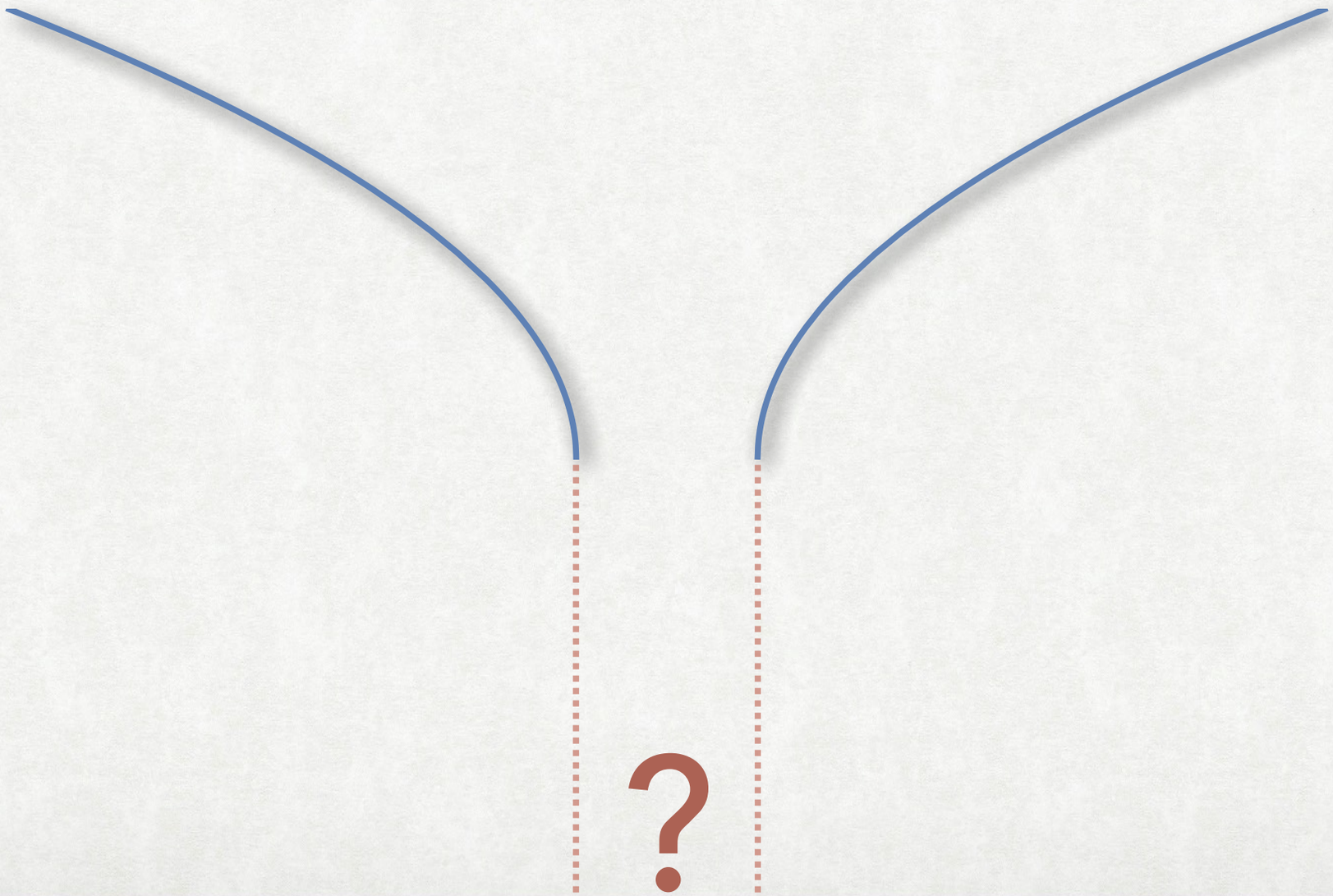
$$z(\rho) = 2\sqrt{R_s(\rho - R_s)}$$



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

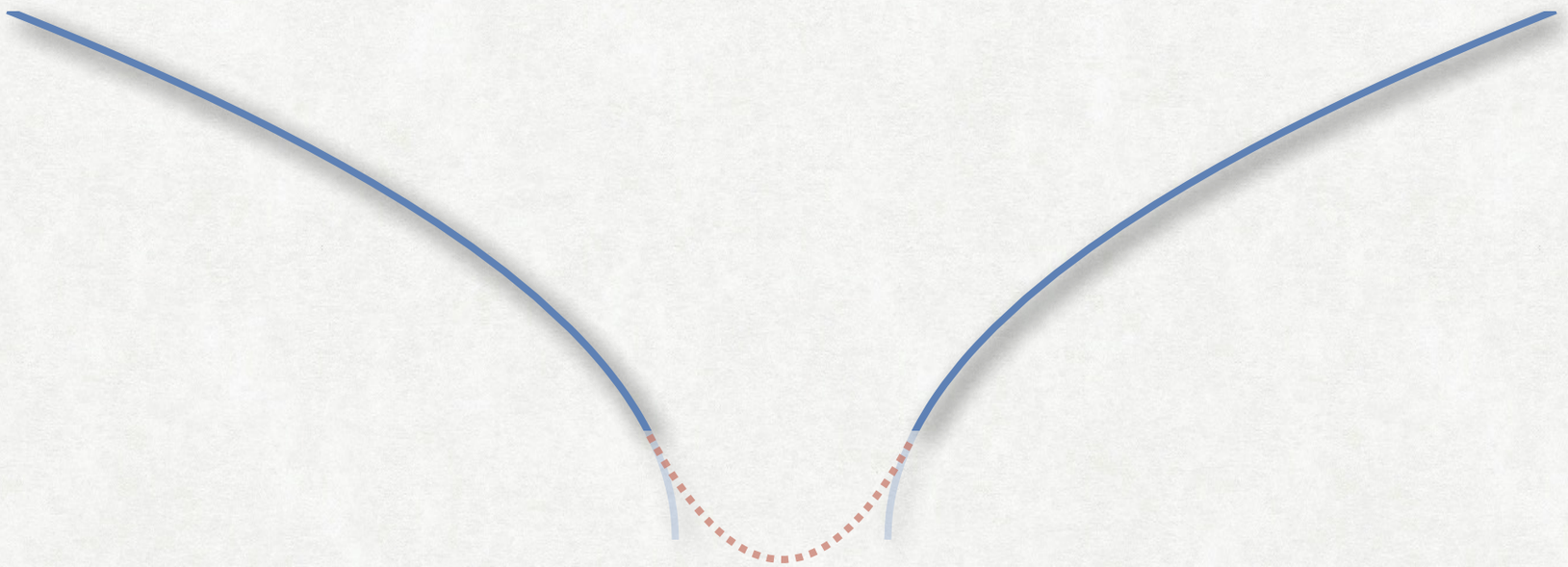
- Vamos olhar isso de perfil:

$$z(\rho) = 2\sqrt{R_s(\rho - R_s)}$$



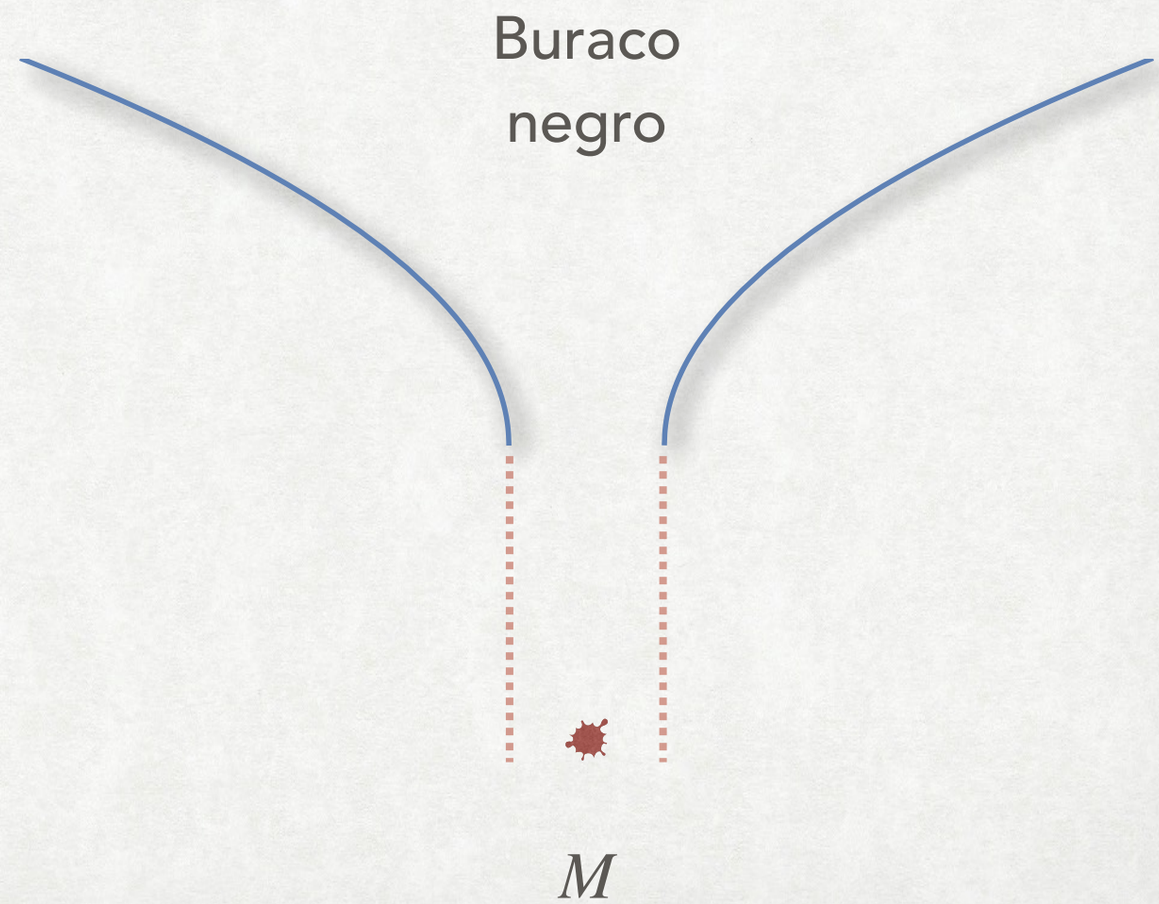
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Podemos imaginar que existem soluções similares, nas quais esse "poço" infinito é suavizado, levando a uma solução ***finita*** em todo o espaço:



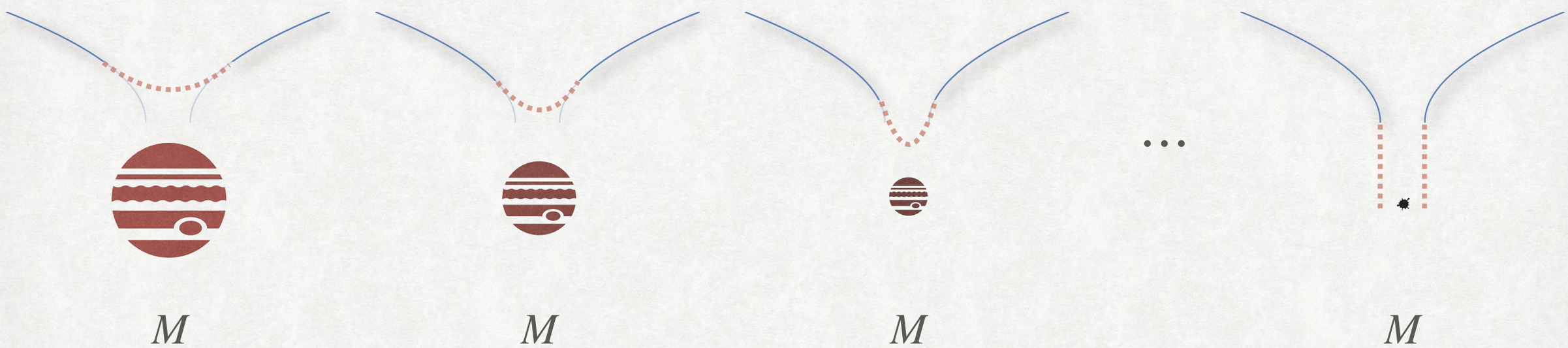
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Nós veremos mais adiante que a solução exata obtida acima corresponde à solução de Schwarzschild para um buraco negro, com uma massa concentrada na origem ($r = 0$), enquanto que as soluções suavizadas correspondem a espaços-tempos típicos de objetos esfericamente simétricos com densidade de energia finita — ou seja, estrelas, planetas e coisas to tipo



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Podemos pensar inclusive numa evolução ao longo do tempo, no qual a a massa do planeta/estrela vai se **concentrando**, concentrando… até que ela forma um buraco negro



PROPRIEDADES DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Agora vamos olhar com mais detalhe a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \boxed{-\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2} + \boxed{\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2} + r^2\,d\Omega^2$$

- Note que, à medida que tomamos r cada vez menor, as coisas começam a ficar muito estranhas:

  1. Primeiro, se $r = R_s$, a parte temporal se anula, e a parte radial diverge!

  2. Depois, se $r < R_s$, os sinais da parte temporal e da parte radial trocam de sinal (?!)

  3. E, o pior de tudo se $r \to 0$, os dois termos divergem!

- Veremos mais adiante que nos dois primeiros casos ($0 < r \leq R_s$) não há nenhum problema — mas teremos de trabalhar um pouco para entender melhor o que está acontecendo.

- Já no terceiro caso, $r \to 0$, veremos mais adiante que ali ocorre de fato uma ***singularidade***, um ponto onde ***tanto a métrica quanto a curvatura divergem***.

PROPRIEDADES DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Nas próximas aulas vamos mostrar que a solução de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2 \quad ,$$

  possui algumas características altamente não-triviais.

- Primeiro, o raio $r = R_s$ caracteriza uma região especial, chamada de ***horizonte de eventos*** do buraco negro. Veremos que, uma vez que uma partícula (com ou sem massa) caia dentro ($r < R_s$) desse horizonte, ela não pode mais sair, e sua trajetória leva inevitavelmente à origem ($r = 0$).

- Veremos que não há nada de extravagante que acontece com uma partícula quando ela cruza esse horizonte: apesar da métrica acima ter uma divergência em $r = R_s$, quando calculamos a curvatura nessa região, ela é bem comportada. Em particular, a aceleração à qual uma partícula está sujeita é finita no horizonte de eventos.

- Já na posição $r = 0$, o que temos é de fato uma singularidade: ***tanto a métrica quanto a curvatura divergem***. Nesse ponto, portanto, $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \neq 0$, $R_{\alpha\beta} \neq 0$, $R \neq 0$, $G_{\alpha\beta} \neq 0$, etc. — de fato, nesse ponto todas essas quantidades são ***singulares***.

- É claro que nesse ponto, portanto, não podemos ter $T_{\alpha\beta} = 0$, portanto naquele ponto não há o vácuo. O que há ali é algo misterioso, um ponto no qual a massa M está concentrada toda num ponto singular, cuja compreensão exata ainda é um grande mistério para a Física.

PROPRIEDADES DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Em vez de ficar aqui quebrando a cabeça sobre o que está acontecendo na ***origem*** do buraco negro, vamos explorar um pouco mais as suas propriedades onde a solução parece ser bem comportada. Uma das ferramentas mais poderosas para compreender a estrutura de qualquer espaço-tempo é o estudo dos ***cones de luz***.

- Vamos lembrar que, no caso da luz, temos $ds_l^2 = 0$. No caso do espaço-tempo de Minkowski, temos que, em coordenadas esféricas:

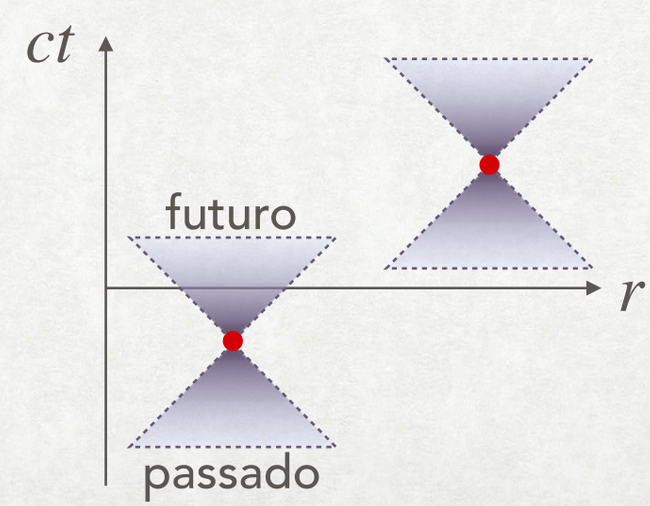
$$ds_l^2 = -c^2 dt_l^2 + dr_l^2 + r_l^2\, d\Omega_l^2 = 0 \quad ,$$

onde o raio de luz caminha por uma trajetória $\{ct_l, r_l, \theta_l, \varphi_l\}$

- Vamos tomar um sinal de luz que faça uma trajetória radial, ou seja, $d\theta = d\varphi = d\Omega = 0$. Então:

$$-c^2 dt_l^2 + dr_l^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c\int dt_l = \pm \int dr_l$$

- Ou seja, para qualquer ponto em $\{t, r\}$ temos o ***cone de luz***:



CONES DE LUZ NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Vamos então estudar a solução de Schwarzschild do ponto de vista dos ***cones de luz*** nesse nosso sistema de coordenadas. Novamente tomando $ds_l^2 = 0$ temos:

$$ds_l^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r_l}\right) c^2 dt_l^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r_l}\right)^{-1} dr_l^2 + r_l^2 \, d\Omega_l^2$$

- Novamente tomamos um sinal de luz que faça uma trajetória radial, então:

$$-\left(1 - \frac{R_S}{r_l}\right) c^2 dt_l^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r_l}\right)^{-1} dr_l^2 = 0$$

- Podemos resolver a equação acima para $t_l(r_l)$:

$$c^2 dt_l^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r_l}\right)^{-2} dr_l^2 \quad \Longrightarrow \quad c \int dt_l = \pm \int dr_l \left(1 - \frac{R_S}{r_l}\right)^{-1} = \pm \left[r_l + R_s \log\left(r_l - R_s\right)\right]$$

CONES DE LUZ NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Note que a primitiva acima deve ser feita com cuidado. Vamos primeiro supor que $r_l > R_s$, e integrar entre os limites:

$$c\int_{t_0}^{t} dt_l = \pm\int_{r_0}^{r} dr_l \left(1-\frac{R_S}{r_l}\right)^{-1} = \pm\left[r_l + R_s \log\left(r_l - R_s\right)\right]_{r_0}^{r}$$

$$\Longrightarrow \quad c(t-t_0) = \pm\left[(r-r_0) + R_s \log\left(\frac{r-R_s}{r_0-R_s}\right)\right]$$

- Agora, vamos supor que temos $r_l < R_s$. Podemos usar a mesma primitiva, com $\log(-1) = i\,\pi$, e o resultado pode ser escrito como:

$$\Longrightarrow \quad c(t-t_0) = \pm\left[r - r_0 + R_s \log\left(\frac{R_s-r}{R_s-r_0}\right)\right]$$

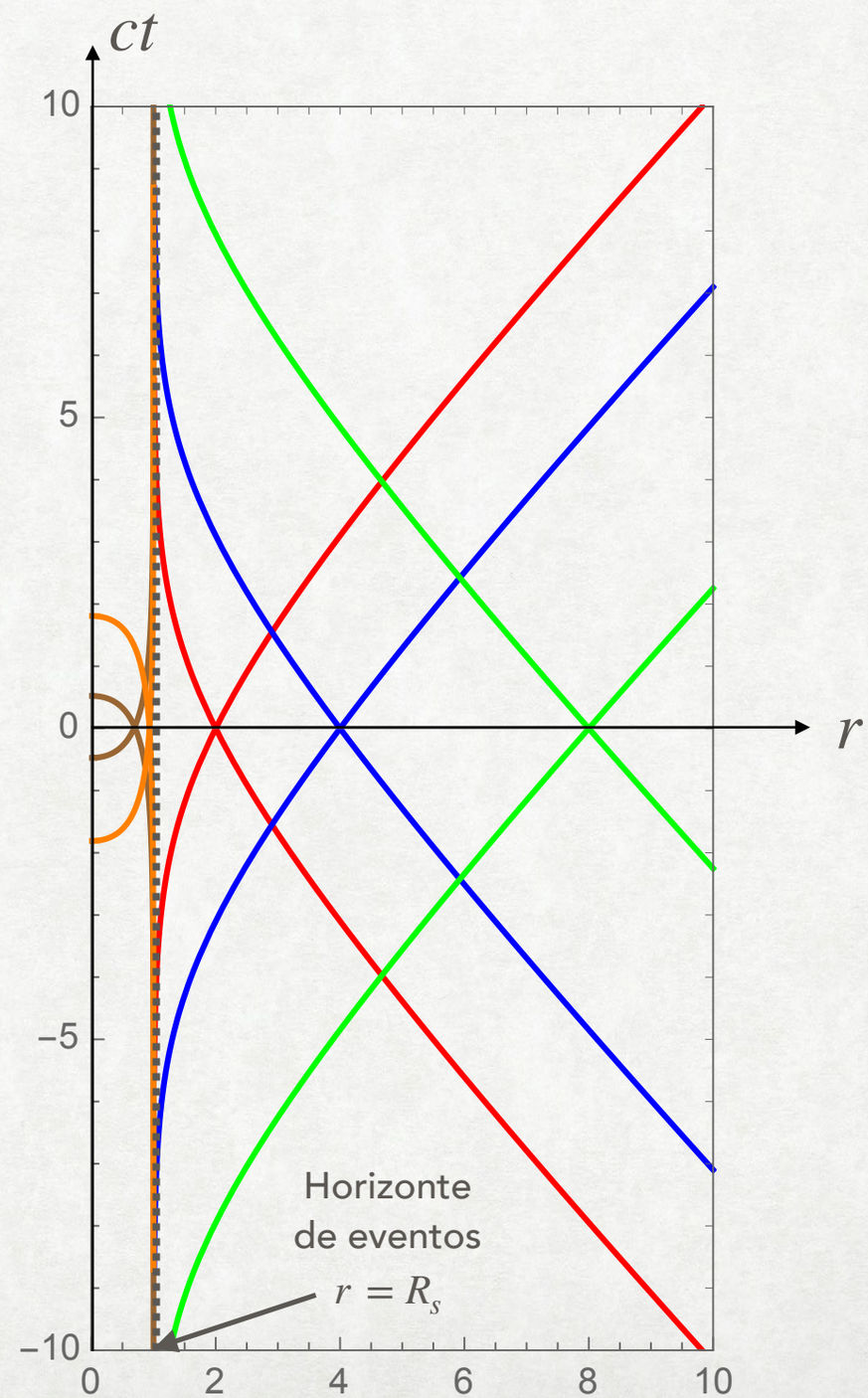
onde inclusive podemos tomar $r_0 \to 0$, se quisermos.

CONES DE LUZ NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Os resultados acima mostram que, de um modo geral, podemos escrever:

$$ct = ct_* \pm \left[r - r_* + R_s \log \left| \frac{r}{R_s} - 1 \right| \right]$$

e aqui estão algumas dessas trajetórias:

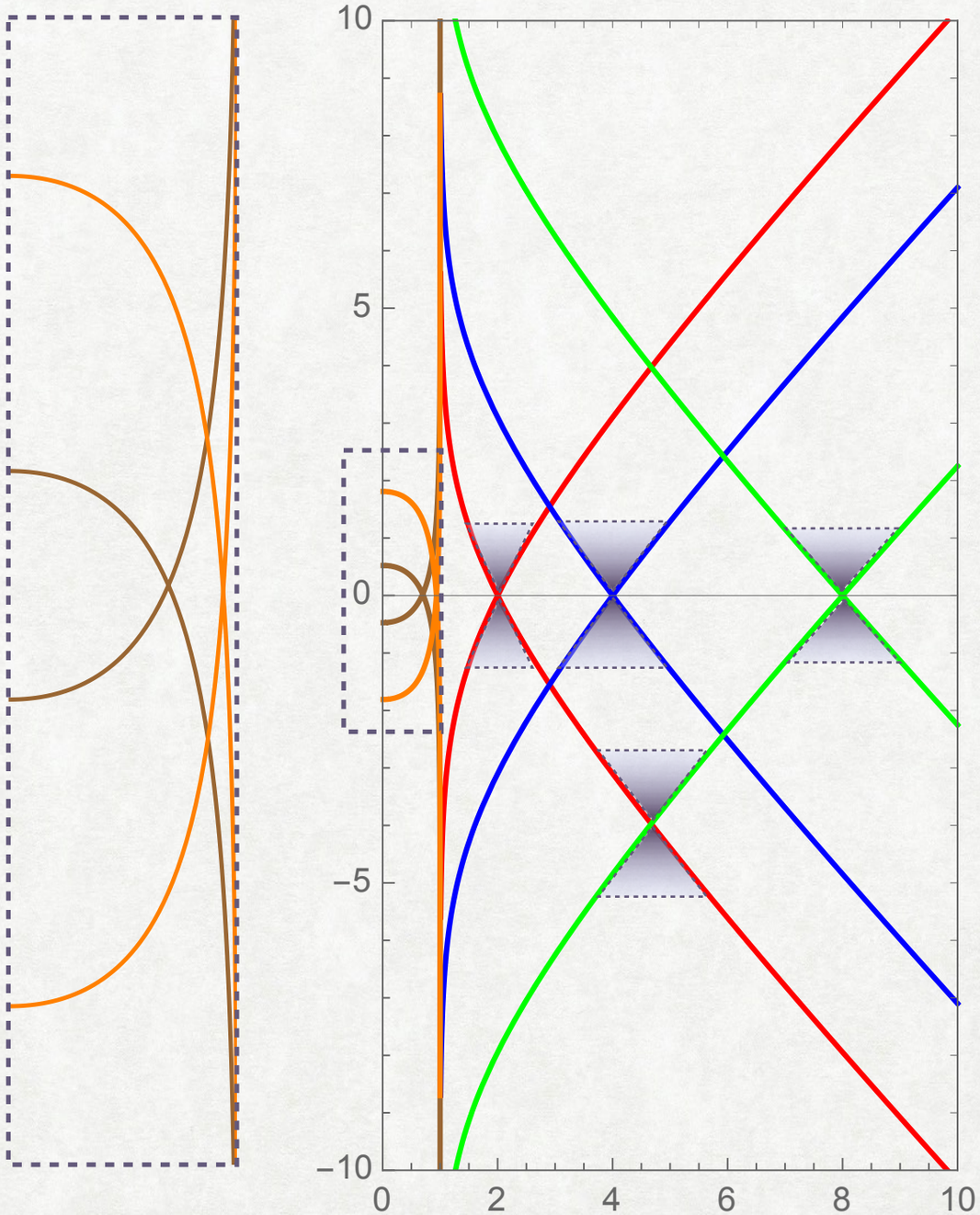


CONES DE LUZ NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Finalmente podemos desenhar os ***cones de luz*** da solução de Schwarzschild.

- Como se vê, os cones de luz são ***deformados*** pela métrica de Schwarzschild, com respeito ao que seria o caso no espaço-tempo plano de Minkowski (que, naquele caso, é um cone com abertura de 45º).

- No ***interior do horizonte de eventos*** do buraco negro algo muito interessante ocorre — que veremos na próxima aula.

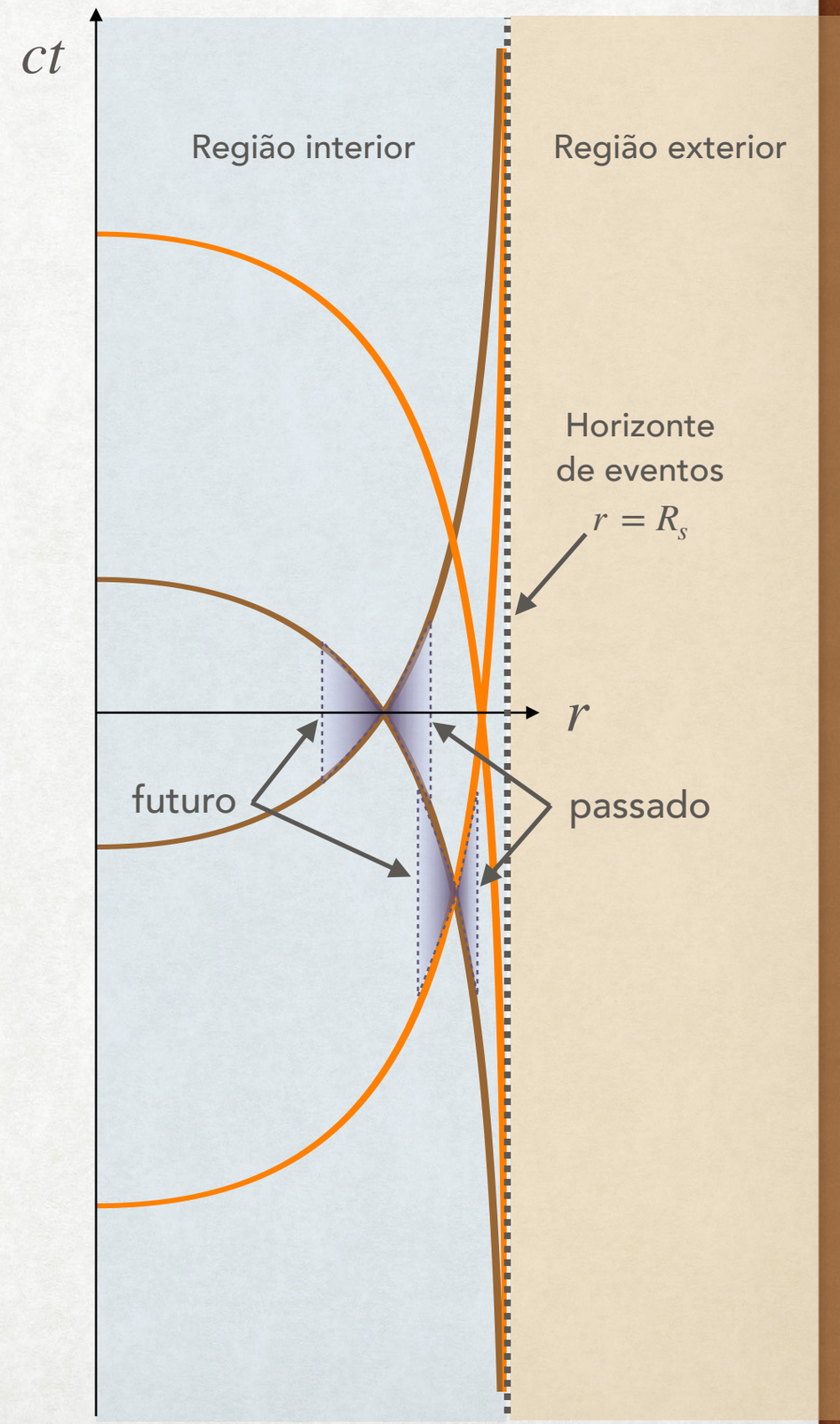


CONES DE LUZ NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

- Veremos nas próximas aulas, por meio da análise da ***Equação da Geodésica***, e utilizando outros sistemas de coordenadas, que na verdade essas trajetórias "interiores" estão andando sempre "para dentro" — ou seja, os cones de luz apontam de fato para $r = 0$, como indicado na figura ao lado.

- Ou seja, veremos na próxima aula que, dentro do horizonte do buraco negro, o "futuro" de qualquer trajetória aponta na direção $r \to 0$.

- Em outras palavras: uma vez dentro desse horizonte, não há escapatória, e todos os caminhos levam em direção à singularidade ($r = 0$).



CONES DE LUZ NA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

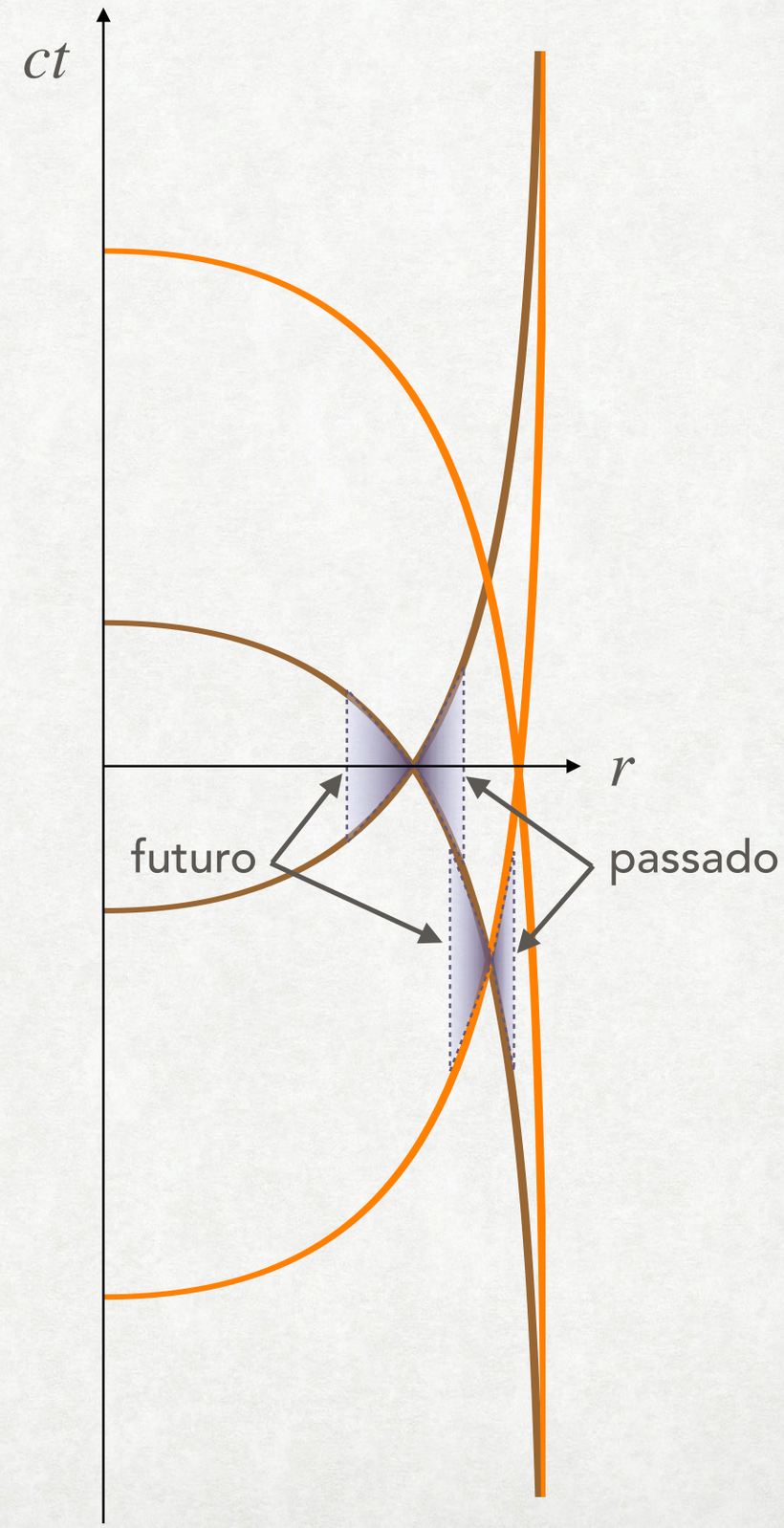
- Essa inversão se dá por conta da métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \boxed{-\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2}\boxed{+\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2} + r^2\,d\Omega^2$$

- Veja que na região interior ($r < R_s$) os sinais do primeiro e do segundo termo se ***invertem***!

- Ou seja, nessa região a coordenada r tem a assinatura de "tempo" (-1), enquanto a coordenada t tem a assinatura de coordenada espacial (+1).

- Portanto, dentro do horizonte o raio faz o papel do tempo, e o tempo faz o papel do raio. E nessa região, o "tempo" (r) anda na direção $r \to 0$ — em outras palavras, $dr/d\tau < 0$ para qualquer geodésica.



PARA A AULA QUE VEM:

- **Terminem a 3a lista de exercícios, já! A 4a lista já está sendo preparada!...**
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 5
- Mas, antes de terminar… Breaking News!