

Limites

1

Vimos que limite nada mais é que estudar o comportamento de uma função $f(x)$ quando a variável x aproxima-se de um valor " a ".

Notação: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Vimos também que quando dizemos: "a variável x aproxima-se de um valor a ", essa aproximação pode ser por valores maiores ou menores do que " a ", ou seja, $x \rightarrow a^+$ (aproximação por valores maiores do que " a ")

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$x \rightarrow a^-$ (aproximação por valores menores do que " a ")

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

"Esses limites são os limites laterais".

Agora vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ quando a variável x cresce (ou decresce) indefinidamente, ou seja, qual o valor da função quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$.

Notação: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ LIMITES NO INFINITO

Em algumas situações, a função x aproxima de um valor numérico (L é um valor numérico), em outras situações a função também pode crescer (ou decrescer) indefinidamente ($L \rightarrow +\infty$ ou $L \rightarrow -\infty$), ou seja, o resultado da função pode ser $+\infty$ ou $-\infty$. Esses são os LIMITES INFINITOS

LIMITES NO INFINITO ($x \rightarrow \pm\infty$) LIMITES INFINITOS ($L \rightarrow \pm\infty$)

LIMITES NO INFINITO ($x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$)

(2)

isso é um
número muito
grande e +
9.999.999...

isso é um número
muito grande e -
-9.999.999...

Considere a função $f(x)$ a seguir:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$$

OBS: não há nenhuma restrição no domínio da $f(x)$ pois o denominador ($x^2 + 1$) nunca será "ZERO". CERTO?

A pergunta é: Qual o comportamento da função à medida que a variável x cresce indefinidamente ($x \rightarrow +\infty$)?

Iremos atribuir alguns valores para variável x e verificar o que acontece com a função.

x	$f(x)$
0	$f(0) = 0$
1	$f(1) = 1$
10	$f(10) = 1,98$
1.000	$f(1.000) = 1,999...$
10.000	$f(10.000) = 1,9999... \approx 2,0$

$x \rightarrow +\infty$

$$f(0) = \frac{2(0)^2}{0^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f(10.000) = \frac{2(10.000)^2}{(10.000)^2 + 1} = 2,0$$

Observando os valores da tabela podemos dizer que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2,0 //$$

E quando os valores da variável x decresce indefinidamente ($x \rightarrow -\infty$)?

x	$f(x)$
0	$f(0) = 0$ (já vimos)
-1	$f(-1) = 1$
-10	$f(-10) = 1,98$
-1.000	$f(-1.000) = 1,999...$
-10.000	$f(-10.000) = 1,9999... \approx 2,0$

$x \rightarrow -\infty$

$$f(-1) = \frac{2(-1)^2}{(-1)^2 + 1} = 1$$

$$f(-10.000) = \frac{2(-10.000)^2}{(-10.000)^2 + 1} = 2,0$$

Observando os valores, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2,0 //$$

Se seguirmos a lógica na resolução de limites, temos 3
que substituir o valor de x na $f(x)$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2(+\infty)^2}{(+\infty)^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

ISSO TAMBÉM
É UMA INDETER-
MINAÇÃO!

NÃO É UM RESUL-
TADO VÁLIDO!

OBS: VIMOS, NA AULA PASSADA, QUE A INDETERMINAÇÃO DO TIPO $\frac{0}{0}$
FOI RESOLVIDA UTILIZANDO AS REGRAS DE FATORAÇÃO OU MUL-
TIPICANDO PELA CONJUGADA (EM EXPRESSÕES COM RAÍZES).

Para resolver esse tipo de indeterminação $\left(\frac{+\infty}{+\infty}; \frac{+\infty}{-\infty}; \frac{-\infty}{+\infty} \text{ e } \frac{-\infty}{-\infty}\right)$
vamos precisar da seguinte propriedade (P4) e de um arti-
fício, que será apresentado a seguir.

P4) Para todo número natural n e para b (uma constante)
pertencente ao conjunto dos números reais ($b \in \mathbb{R}$), tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b}{x^n} = 0$$

O artifício de conta é: dividir o numerador e denomi-
nador da função $f(x)$ pela variável x com sua maior
potência.

EXEMPLO: Na função $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ a variável x com a
maior potência é x^2 . Então,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}{\frac{\cancel{x^2}+1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \\ &= \frac{2}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1+0} = 2 \end{aligned}$$

"0" pela P4

OUTROS EXEMPLOS

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \frac{2(-\infty)^2 - (-\infty) + 3}{(-\infty)^3 - 8(-\infty) + 5} = \frac{+\infty}{-\infty} \quad \text{INDETERMINAÇÃO!}$$

x^3 é a variável x com a maior potência!

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 7x^2 + 2}{2x^4 + 1} = \frac{3(-\infty)^4 - 7(-\infty)^2 + 2}{2(-\infty)^4 + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{INDETERMINAÇÃO!}$$

x^4 é a variável x com a maior potência!

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} - \frac{7x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{7}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^4}} = \frac{3}{2} \quad \text{OK!}$$

EXERCÍCIOS: Calcule os limites das funções que se seguem quando $x \rightarrow +\infty$ ~~quando $x \rightarrow +\infty$~~ (ENTREGA PELO STOA EM 06/04) ATE

$$a) f(x) = \frac{3+5x^3}{x^3}$$

$$(*) e) f(x) = \frac{x^{100} + x^{99}}{x^{101} - x^{100}}$$

NOTE POR E-MAIL

$$b) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 + 5x^3 + x + 2}$$

$$f) f(x) = \frac{\sqrt{8x^2 + 3}}{\sqrt{9x^2 - 7x}}$$

$$c) f(x) = \frac{2x + 3}{3x + 2}$$

$$g) f(x) = \frac{x^5 + 1}{3x^3 - 9x}$$

$$d) f(x) = \frac{x}{x - 1}$$

LIMITES INFINITOS

5

Quando, no cálculo do limite de uma função, o resultado do limite (L) cresce ou decresce indefinidamente, damos a eles o nome de LIMITES INFINITOS. São exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Veremos algumas propriedades que iremos usar.

P5) Se $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} w(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$ (k é uma constante)

Então,

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [h(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} h(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty + k = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} [w(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} w(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty + k = -\infty$$

b) Se $k > 0$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [h(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \cdot k = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [w(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} w(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \cdot k = -\infty$$

c) Se $K < 0$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [h(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \cdot (-K) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [w(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} w(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \cdot (-K) = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x)}{w(x)} \right] = 0 \quad \left. \frac{\frac{K}{-\infty} \text{ ou } \frac{K}{+\infty}}{\quad} = 0 \right\|$$

PG) Seja $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$

Para $K > 0$

- Se a função $h(x) > 0$ quando $x \rightarrow a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{K}{0^+} = +\infty$$

- Se a função $h(x) < 0$ quando $x \rightarrow a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{K}{0^-} = -\infty$$

EXEMPLO: $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3}{(x-2)^2} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\xrightarrow{g(x)}$ (3) $\xrightarrow{h(x)}$ $(x-2)^2$

Para $K < 0$

- Se a função $h(x) > 0$ quando $x \rightarrow a$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{-K}{0^+} = -\infty$$

- Se a função $h(x) < 0$ quando $x \rightarrow a$, então:

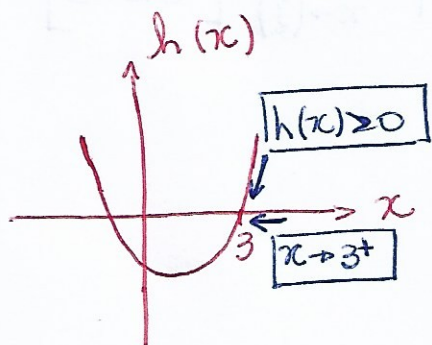
$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{-K}{0^-} = +\infty$$

EXEMPLO: Próxima página

EXEMPLO:

7

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 3^+} \overbrace{(x^2 + x + 2)}^{g(x)}}{\lim_{x \rightarrow 3^+} \underbrace{(x^2 - 2x - 3)}_{h(x)}} = \frac{(3)^2 + (3) + 2}{(3)^2 - 2(3) - 3} = \frac{14}{0}$$



avaliar o sinal da $h(x)$ quando $x \rightarrow 3^+$

$h(x)$ é uma função quadrática com concav. voltada para cima ($a > 0$) e raízes:

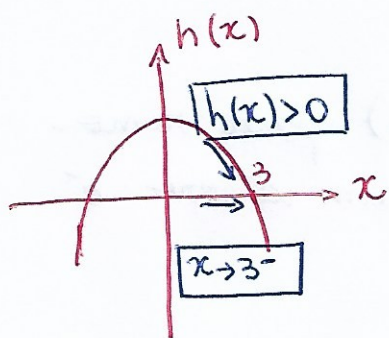
$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \leftarrow \text{esse valor interessa } x \rightarrow 3^+$$

logo, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} \right] = \frac{14}{0^+} = +\infty$

EXEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\frac{4x^2}{9 - x^2} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} \overbrace{(4x^2)}^{g(x)}}{\lim_{x \rightarrow 3^-} \underbrace{(9 - x^2)}_{h(x)}} = \frac{4(3)^2}{9 - (3)^2} = \frac{36}{0}$$



↳ avaliar o sinal da $h(x)$ quando $x \rightarrow 3^-$
↳ $h(x)$ é uma função quad. com concav. para baixo ($a < 0$) e raízes:

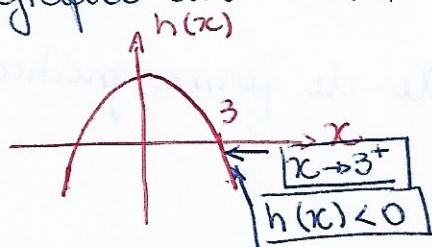
$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow 9 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \leftarrow \text{esse valor interessa } x \rightarrow 3^-$$

logo, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\frac{4x^2}{9 - x^2} \right] = \frac{36}{0^+} = +\infty$

E se considerarmos o mesmo limite quando $x \rightarrow 3^+$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{4x^2}{9 - x^2} \right] = \frac{36}{0}$. Olhando o gráfico da $h(x)$, vemos que:

logo, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{4x^2}{9 - x^2} \right] = \frac{36}{0^-} = -\infty$



? o que significa quando os limites laterais dão resultados $\neq$

EXERCÍCIOS: Calcule os limites (ENTREGA EM 06/04 PELO STOA) (8)

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4} \right] =$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} \right] =$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{5}{3 - x} \right] =$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2x+1}{x} \right] =$

* e) $\lim_{x \rightarrow (\frac{2}{3})^+} \left[\frac{x^2}{4 - 9x^2} \right] =$
ENTREGA HOJE!
POR E-MAIL

f) $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{5})^-} \left[\frac{1}{5x - 3} \right] =$

EXERCÍCIOS: Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ se:}$$

a) $f(x) = x^2$; $a = 2$ (ENTREGA EM 06/04)

b) $f(x) = x^2 + 1$; $a = 2$ (")

c) $f(x) = (x - 3)^2$; $a = 1$ (")

ENTREGA EM 06/04

EXERCÍCIO: O custo em u.m. (unidades monetárias) para remover $x\%$ dos detritos tóxicos despejados em um aterro é dado por:

$$C(x) = \frac{0,8x}{100 - x}, \text{ para } 0 < x < 100.$$

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x)$.

b) Interprete de forma prática o resultado do item "a".