LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

Começaremos com a ideia intuitiva de limites, ou seja, estudaremos o comportamento de uma função $f(x)$ quando o valor de x aproxima-se de um número.

Por exemplo, considere a função

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

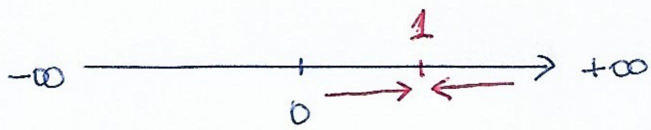
O domínio desta função é:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

$\downarrow$

não sabemos dividir por ZERO!

estudaremos o comportamento dessa função quando os valores de x aproximam-se de 1 (sem atingir $x = 1$)



$x<1$	$f(x)$
0	$f(0) = 1$
0,9	$f(0{,}9) = 2{,}8$
0,99	$f(0{,}99) = 2{,}98$
0,999	$f(0{,}999) = 2{,}998$
$\downarrow$ 1	$\downarrow$ 3

$x>1$	$f(x)$
2	$f(2) = 5$
1,1	$f(1{,}1) = 3{,}2$
1,01	$f(1{,}01) = 3{,}02$
1,001	$f(1{,}001) = 3{,}002$
$\downarrow$ 1	$\downarrow$ 3

Podemos verificar que à medida que x vai se aproximando do valor 1 (por valores maiores e menores que 1) os valores da $f(x)$ vão se aproximando de 3.

NOTAÇÃO: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Lê-se: "O número real L é o limite da função $f(x)$ quando x aproxima-se do valor "a".

Para o cálculo dos limites algumas propriedades são bastante úteis. Veremos algumas.

Propriedades

P1) Sejam m e b duas constantes quaisquer, então, se $f(x) = mx + b$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (mx + b) = m(a)x + b$$

Exemplos:

1) $\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{5x}{3} - 4 = \frac{5(1)}{3} - 4 = \frac{5}{3} - 4 = \frac{5 - 12}{3} = -\frac{7}{3}$

P2) Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são tais que $f(x) = g(x)$, exceto em um ponto $x = a$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x),$$ desde que exista um dos limites.

Esta propriedade nos permite "simplificar" as funções antes de calcular os limites. Essa simplificação é feita por meio da fatoração das funções.

Fatoração: Qualquer expressão do tipo $ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita (ou fatorada) como:

$$a(x - x_1)(x - x_2),$$ em que:

x_1 e x_2 são as raízes da equação de 2º grau.

Voltando ao exemplo, temos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{2(1)^2 - (1) - 1}{(1) - 1} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

isso é uma inditerminação!
NÃO VÁLIDO

A saída, neste caso, é encontrar uma função $g(x)$, equivalente à função $f(x)$, que não resulte em uma inditerminação. Para isso, vamos fatorar a expressão do numerador da função $f(x)$ para cancelar com a expressão que está no denominador.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$2x^2 - x - 1 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

As raízes x_1 e x_2 encontramos utilizando a fórmula de Báskara

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, a função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ é equivalente à função

$$g(x) = \frac{2\cancel{(x-1)}(x + 1/2)}{\cancel{(x-1)}} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x + 1.$$

Usando a P2, temos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 2(1) + 1 = 3$$

veja a grade de valores (noção intuitiva)

Outro ponto importante no cálculo de limite de funções é que, o valor da função no ponto $x=a$, ou seja, $f(a)$, não necessariamente é o valor do limite da função quando $x \to a$.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \text{ pode ser } \neq f(a)}$$

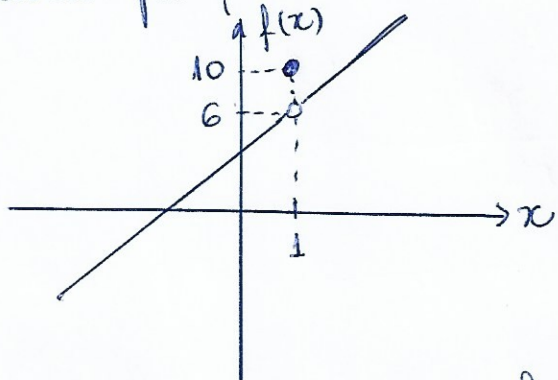
EXEMPLO: Seja $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{se } x \neq 1 \\ 2x+8 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

No ponto $x=1$, a função $f(x) = 2x+8 = 2.1+8 = 10$

Quando $x \to 1$, estamos falando de limite, então:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+5) = 1+5 = 6$$

Gráfico dessa função



REVER COMO FAZER OS GRÁFICOS DE FUNÇÕES AFIM

P3) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \text{ desde que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Note que esta propriedade não pode ser utilizada no exemplo 1 pois ~~[illegible]~~ o limite da função do denominador era igual a zero.

EXEMPLOS

1) Calcular o limite $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x-5}{x^3-7} \right)$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-5}{x^3-7} = \frac{(3)-5}{(3)^3-7} = \frac{-2}{27-7} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10}$$ OK sem problema!

2) Calcular o limite $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right)$.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right) = \frac{(1)^2-1}{(1)-1} = \frac{0}{0}$$ OPS! indeterminação!

↓

fatoração

Qualque expressão do tipo $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Logo, a função pode ser reescrita como:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} (x+1) = (1)+1 = 2$$

3) Calcular o limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0}$$ OPS! indeterminação!

↓

mas não consigo fatorar!

Quando nas funções aparecem raízes a saída é multiplicar o numerador e denominador da função pelo conjugado, ou seja, concorda que isso não altera a f(x)?

$\Rightarrow (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\sqrt{x+1}}^{a} - \overbrace{1}^{b}}{x} \times \frac{(\overbrace{\sqrt{x+1}}^{a} + \overbrace{1}^{b})}{(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}$$ OK!

EXEMPLOS DE FATORAÇÃO MAIS COMUNS

1) $a - ax = a(1-x)$

$f(x) = 5 - 5x = 5(1-x)$

2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$

$f(x) = x^2 \pm 6x + 9$ $\quad$ $f(x) = (x \pm 3)^2$

mantém o sinal

$\sqrt{x^2} \quad \sqrt{9}$

$2x(x \times 3) = 6x$

mantém o sinal

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ $\quad$ $f(x) = (x - 1)^2$

$\sqrt{x^2} \quad \sqrt{1}$

$2x(x \times 1) = 2x$

3) Se a fatoração do caso 2 não for possível, ou seja, se não for um trinômio quadrado perfeito, usamos $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ encontrando as raízes x_1 e x_2 por Báskara. vimos no exemplo

4) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$f(x) = 16 + 9x^2 = (4+3x)(4-3x)$

5) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$f(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ OBS: $\begin{cases} a = x \\ b = 1 \end{cases}$

$f(x) = 8 + x^3 = (2+x)(4 - 2x + x^2)$ OBS: $\begin{cases} a = 2 \\ b = x \end{cases}$

$f(x) = x^3 + 27 = ?$

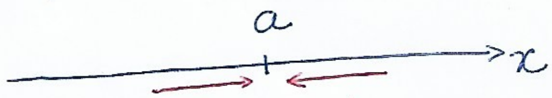
6) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$f(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ $\begin{cases} a = x \\ b = 1 \end{cases}$

$f(x) = x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ $\begin{cases} a = x \\ b = 3 \end{cases}$

Limites Laterais

O estudo dos limites laterais consiste no estudo do comportamento de funções quando os valores de x aproximam-se de um determinado número pela direita ou pela esquerda.



pela esquerda por valores menores do que a

$\Downarrow$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

pela direita ou por valores maiores do que a

$\Downarrow$

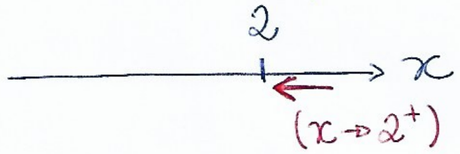
$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Fizemos isso na tabelinha primeiro exemplo

EXEMPLO: Calcular os limites $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ considerando a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{ se } x < 2 \\ 2 & , \text{ se } x = 2 \\ -x^2 + 9 & , \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

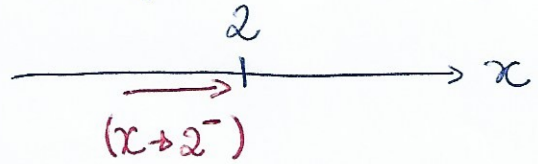
Calcular o limite $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ significa que queremos saber o comportamento da $f(x)$ à medida que x apoxima-se de 2 por valores maiores do que 2 (ou seja, pela direita)



Logo, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x^2 + 9) =$

$$= -(2)^2 + 9 = -4 + 9 = \underline{5}$$

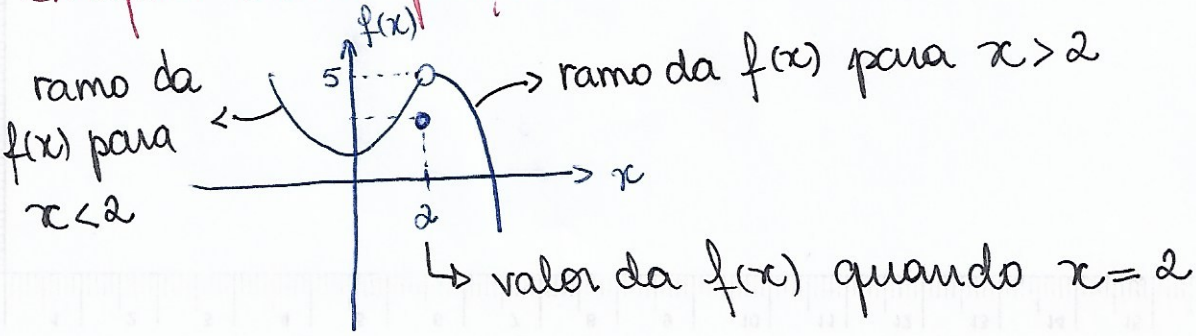
Calcular o limite $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ significa que x apoxima-se de 2 por valores menores do que 2 (ou seja, pela esquerda)



Logo, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) =$

$$= (2)^2 + 1 = \underline{5}$$

Gráfico dessa função



TEOREMA:

Seja $f(x)$ uma função com domínio D_f. Então,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se, os limites laterais existem e são iguais.

Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ $\Big\rangle$ $\lim_{x \to a} f(x) = L$

EXEMPLO: Verifique se $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe. Considere a $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ 3x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes e ver se resultam em um mesmo valor.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x) = 3.1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2) = 1^2 = 1$$

Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$ dizemos que o $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe!