Derivada e Continuidade. Funções não deriváveis

. Lembrando: . $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ = derivada de f em p (se $\exists$ o limite)

. f é derivável em p se existe $f'(p)$.

Exercício 5. (Exercícios do Texto 7): $f'(0) = ?$

(a) $f(x) = \begin{cases} (x^4 + x^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^4 + x^2)\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \overbrace{(x^3 + x)}^{\to 0} \overbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}^{\text{lim}} = 0$$

Logo f é derivável no 0 e $f'(0) = 0$.

(b) $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

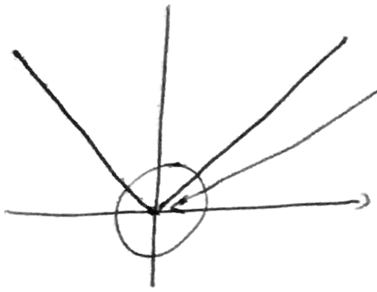
Mas: $\lim_{x \to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x}{x} = 1$

e $\lim_{x \to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0_-} \frac{-x}{x} = -1$

$\neq$ $\therefore$ não existe $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Logo f não é derivável em $x = 0$, ou seja, $\nexists\, f'(0)$.

Olhando o gráfico de $f(x) = |x|$:



↳ não é derivável em $p = 0$, note que não existe a reta tangente. Quando $x \to 0$, as retas secantes tendem a retas diferentes se faz $x \to 0_+$ ou $x \to 0_-$. Voltaremos depois a este ~~[illegible]~~ tipo de situação.

Derivada e continuidade

- Para uma função $f: Dom f \to \mathbb{R}$ e $p \in Dom f$, definimos:
  - f é contínua em $p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$
  - f é derivável em $p \iff \exists \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ $(= f'(p))$

- Acabamos de ver que a função $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$, mas ela é contínua no 0 (pois $\lim_{x \to 0} |x| = 0$). Isso mostra que são de fato conceitos diferentes (não equivalentes). Mas será que existe alguma relação entre eles?

- Vale:

Teorema: Se f é uma função derivável em p, então f é contínua em p.

Dem:
Por hipótese, f é derivável em p, ou seja, existe $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ $\to f'(p)$ $(\in \mathbb{R})$

Então,

$$\lim_{x \to p} [f(x) - f(p)] = \lim_{x \to p} \underbrace{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}_{\to f'(p)} \cdot \underbrace{(x-p)}_{\to 0} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to p} [f(x) - f(p)] = 0$$

Logo
$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} [\underbrace{f(x) - f(p)}_{\to 0} + \underbrace{f(p)}_{f(p)}] = f(p).$$

$\therefore f$ é contínua em p. //

. Segue daí que:

<u>Consequência</u>: Se f não é contínua em p, então f não é derivável em p.

. <u>Mas</u> <u>cuidado</u>: f contínua $\not\Rightarrow$ f derivável (<u>Exemplo</u>: $f(x) = |x|$) (não confundir qual limite tem que fazer em cada caso)

<u>Exemplo</u>: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$? Não, pois não é contínua em $p = 1$.

(Mas se a ~~f~~ concluísse que a função era contínua, teria que fazer o limite da definição da derivada para saber)

<u>Funções</u> <u>não</u> <u>deriváveis</u>

. É natural perguntar:

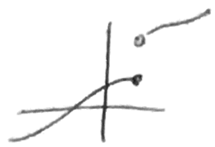
<u>Pergunta</u>: Quando f não é derivável?

. Já vimos que f não é derivável em p se f não for contínua em p. Além disso, sabemos que o limite não existe se os limites laterais forem diferentes ou se o limite é infinito.

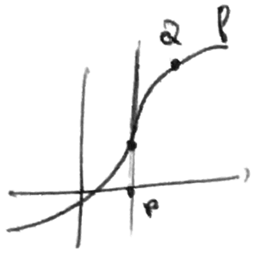
. Usando isso, concluímos que teremos 3 casos "típicos" em que a função não é derivável:

Obs: f não é derivável se:

1) f não é contínua em p



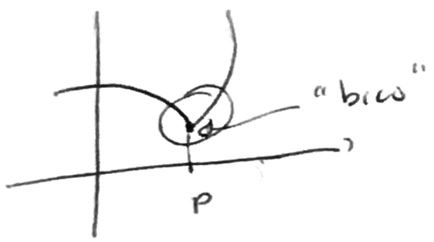
2) o "coeficiente angular da reta tangente" seria infinito



$\lim m_{PQ} = \infty$ (m_{PQ} = coef ang. da reta secante)

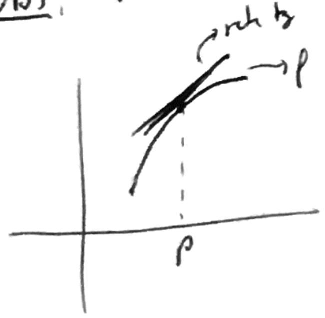
(Neste caso pode-se definir a reta tangente como sendo a reta $x = p$)

3) o gráfico de f forma um "bico"



Neste caso o limite não existe porque os limites laterais ~~das~~ são diferentes.
Geometricamente: as secantes tendem a retas diferentes se $x \to p$ pela esquerda ou pela direita.

Obs: A reta tangente aproxima a função perto de $(p, f(p))$,(*) isso não acontece quando o gráfico da função forma um "bico"



nenhuma reta aproxima bem f perto de p

((*) esta é outra propriedade importante da reta tangente, voltaremos a falar disso depois)