Notas de Mecânica Clássica

Airton Deppman

03/2020 - Distribuição limitada aos estudantes da disciplina
Versão não revisada e não corrigida.

Capítulo 1

Problemas de Sistemas Contínuos

1.1 Problemas de Sistemas Contínuos

1. Considere a densidade Lagrangeana
$$\mathcal{L} = \dot{\phi}(\boldsymbol{x})^2 - a\phi(\boldsymbol{x})^2 - b\phi(\boldsymbol{x})^4 - c^2\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^2 . \tag{1.1}$$
Obtenha a equação de movimento.

2. Uma corda com densidade linear de massa μ e esticada ao longo do eixo x sofre uma perturbação em sua posição de repouso produzida pro deslocamentos na direção do eixo y, perpendicular ao eixo x. Para pequenas perturbações, a força restauradora sobre um elemento infintesimal da corda, de comprimento dx, é $F = -Y dy$, onde dy é a variação da posição desse elemento linear de corda na direção y . (a) Determine da densidade Lagrangena, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(y, \dot{y}, y')$, sendo $y' = dy/dx$. (b) Usando a equação de Lagrange para sistemas contínuos, determine o movimento da corda em função do tempo.

3. A densidade Lagrageana do campo eletromagnético é
$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi c} F_{kl} F^{kl} , \tag{1.2}$$
onde
$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} . \tag{1.3}$$
Determine, usando as equações de Lagrange para sistemas contínuos, as equações de movimento.

4. A densidade Lagrangeana do campo de Kein-Gordon é

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2 \,. \tag{1.4}$$

O momento conjugado é dado por $\pi = \partial_0 \Phi$. (a) Determine a equação de movimento. (b) Determine a densidade Hamiltoniana do sistema. (c) Determine a corrente de Noether correspondente à simetria por invariância do sistema pela transformação $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, onde a^μ é constante.

5. Considere o campo vetorial dado por $\mathbf{v}(x_1, x_2) = (x_1^2 + b x_1 x_2)\mathbf{x}_1 + x_2^2 \mathbf{x}_2$. Determine as variações Δv_i e δv_i para esse campo quado as coordenadas sofre uma rotação no plano $x_1 x_2$.

6. Considere a invariança de um campo vetorial por rotação, cuja transformação é dada por $x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu^\nu x_\nu$, com $\epsilon_\mu^\nu = -\epsilon_\nu^\mu$. Determine a corrente de Noether correspondente e a grandeza conservada.

7. Usando a definição de densidade Hamiltoniana, e o Princípio de Hamilton, determine as regras de transformações canônicas.

8. Obtenha a transformação canônica infitesimal para o caso de sistemas contínuos.

9. Obtenha a expressão para os Parêntesis de Poisson para sistemas contínuos.

10. Considere um campo escalar complexo, $\phi(x)$, e sua Lagrangena

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi \phi^* \,. \tag{1.5}$$

   a) Mostre que a transformação interna $\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x)$ é uma simetria da Lagrangeana, onde α pode ser considerado pequeno ou infinitesimal.

   b) Usando o Teorema de Noether, determine a grandeza conservada associada a esta simetria.