

Regras de Derivação

Notações

- O processo de encontrar uma derivada é chamado derivação ou diferenciação
- Pode-se pensar na derivação como uma operação sobre funções, que associa a função f' a uma função f
- Notação
 - $f'(x) = \frac{d}{dx} [f(x)]$
 - $f'(x) = D_x [f(x)]$
 - $f'(x) = y'(x)$
 - $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

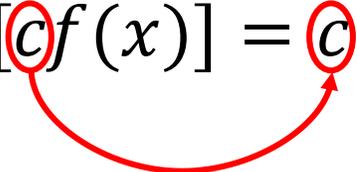
Regras de Diferenciação

- A derivada de uma **função constante** é 0
- Isto é, se c for um número real qualquer, então...
 - Se $f(x) = c$
 - $f'(x) = \frac{d}{dx}(c) = 0$
- Funções Potência
 - Se n for um número real, então...
 - $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
 - Exemplo:
 - $f(x) = x$
 - $f(x) = x^2$

Regras de Diferenciação

- Múltiplo Constante

- $f'(x) = \frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{d}{dx} [f(x)]$



- Exemplo: $f(x) = 3x^2$

Resolvam...

- $f(x) = -3$

- $f(x) = \sqrt{2}$

- $f(x) = x^5$

- $f(x) = x^{3,1}$

- $f(x) = x^{0,8}$

- $f(r) = \pi r^2$

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- $f(x) = -2x^3$

- $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

- $f(u) = \frac{2}{\sqrt{u}}$

- $f(x) = 0,3x^{-1,2}$

Regras de Diferenciação

- Regra da Soma/Subtração

- $\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] \pm \frac{d}{dx} [g(x)]$

- A derivada da soma/diferença de duas funções diferenciáveis é igual à soma/diferença de suas derivadas

- Exemplo

- $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

- $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 6$

- $f(x) = 0,03x^2 - 0,4x + 10$

- $f(x) = 0,002x^3 - 0,05x^2 + 0,1x - 20$

Resolvam...

Regras de Diferenciação

- Regra do Produto

- $\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- **A derivada do produto não é o produto das derivadas!!!!**

- Exemplo

- $f(x) = (2x + 3)(3x - 4)$

Resolvam...

- $f(x) = 2x(x^2 + 1)$

- $f(x) = (x^3 - 12x)(3x^2 + 2x)$

- $f(w) = (w^3 - w^2 + w - 1)(w^2 + 2)$

- $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + (x^2 + 1)(x^2 - x - 1) + 28$

Regras de Diferenciação

- Regra do Quociente

$$\bullet \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx} [f(x)] - f(x) \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

- Exemplo

- $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$

Resolvam...

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f(x) = \frac{3}{2x+4} \\ \bullet f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+x+1} \\ \bullet f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1} \end{array} \right.$$

Regras do Produto/Quociente

- $f(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x-2}$
- $f(x) = \frac{x}{x^2-4} - \frac{x-1}{x^2+4}$
- Ache a declividade e a equação da reta tangente nos pontos indicados
 - $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 - 2); (2,18)$
 - $f(x) = \frac{x^2}{x+1}; (2, \frac{4}{3})$
- Seja $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, indique os pontos onde a reta tangente de $f'(x)$ é horizontal

Challenging

- Um fabricante de tênis descobre que as vendas de seu tênis de corrida é uma função $f(p)$ do preço p do par (\$)
- Suponha que $f(120) = 9.000$ pares do tênis e que $f'(120) = -60$ pares de tênis por \$
 - **Encontre $R'(120)$...**
 - **Qual é o impacto de um pequeno aumento no preço sobre a receita?**
 - **Suponha $f(120) = 9.000$ e $f'(120) = -80$**

Regras de Diferenciação

- Considere a função $f(x) = 10,72(0,9t + 10)^{0,3}$ ($0 \leq t \leq 20$)
- Qual regra vista até aqui nos permitiria verificar como a proporção idosa da população no momento t ?
 - Constante?
 - Potência?
 - Soma?
 - Produto?
 - Quociente?
- Realmente... Nenhuma delas. Mas por que não?

Regras de Diferenciação

- Exemplo: $h(x) = (x^2 + 1)^2$... dá pra usar a regra do produto?
- Mas se $h(x) = (x^2 + 1)^{100}$?
- E se $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$?

A peculiaridade de $h(x)$

- $f(x) = x^2 + 1$
- $g(x) = x^2$
- $h = g(f(x)) = (x^2 + 1)^2$

De forma similar...

- $f(x) = x^2 + 1$
- $g(x) = \sqrt{x}$
- $h = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$

Regras de Diferenciação

Derivada de uma função composta

- Individualmente sabemos derivar f e g , mas como derivar a combinação das duas?
- Precisamos ter em mente que a derivada representa uma taxa de variação
- **Quando combinamos duas (ou mais) funções temos na derivada da combinação o produto das variações individuais de cada uma delas**
- Assim, se $f(x) = y = (x^2 + 1)^2$

Regras de Diferenciação

$y = (x^2 + 1)^2$

u

$y = u^2$

$u = x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2u \times 2x$$
$$= 2(x^2 + 1) \times 2x$$
$$= 4x(x^2 + 1)$$

Regra da Cadeia

- $(f \circ g)' = f'(g(x))g'(x)$
- Uma maneira conveniente de lembrar essa fórmula
 - Chamar f a “função de fora” e g a “função de dentro” na composição $f(g(x))$
 - $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$

Derivada da função de fora calculada na função de dentro

Derivada da função de dentro

Regras de Diferenciação

- Regra da Cadeia – Alguns exemplos

- $f(x) = (2x - 1)^3$

- $f(x) = (x^2 + 2)^5$

- $f(x) = (2x - x^2)^3$

- $f(t) = 2(t^3 - 1)^5$

- $f(x) = \sqrt{3x - 2}$

- $f(r) = (r^2 - 4)^{\frac{5}{2}}$

Regras de Diferenciação

- $f(x) = 2x^2(3 - 4x)^4$

- $h(t) = t^2(3t + 4)^3$

- $f(x) = (x - 1)^2(2x + 1)^4$

- $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^3$

- $g(s) = \left(s^2 + \frac{1}{s}\right)^{\frac{3}{2}}$

- $g(u) = \sqrt{\frac{u+1}{3u+2}}$

- $g(u) = \frac{2u^2}{(u^2+u)^3}$

- $h(x) = \frac{(3x^2+1)^3}{(x^2-1)^4}$

- $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Regras de Diferenciação

- Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico no ponto dado

- $f(x) = (1 - x)(x^2 - 1)^2$ (2, -9)

- $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ (3, 4)

- $f(x) = x\sqrt{2x^2 + 7}$ (3, 15)