Radiação de carga pontual

Vimos, a partir dos potenciais de Liénard - Wiechert, que o campo eletromagnético gerado por uma carga q pontual de velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$ é

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathscr{r}}{(\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{u})^3} \left[(c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{\mathscr{r}} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right]$$

$$= \vec{E}_v + \vec{E}_a$$

campo de velocidade

campo de aceleração

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \hat{\mathscr{r}} \times \vec{E}(\vec{r},t) \quad \text{com} \quad \vec{u} = c\hat{\mathscr{r}} - \vec{v}$$

Já o fluxo de energia associado a este campo é dado pelo vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\hat{\mathscr{r}} \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} \left[E^2 \hat{\mathscr{r}} - (\hat{\mathscr{r}} \cdot \vec{E})\vec{E} \right]$$

É preciso notar, entretanto, que nem toda a energia associada a $\vec{S}$ está na forma de radiação para uma carga móvel. À medida que q se desloca, parte do campo eletromagnético é carregado com a carga e não contribui para a radiação.

Já vimos anteriormente que os campos $\vec{E}_v$ e $\vec{E}_a$ têm diferentes comportamentos longe da carga q

$$E_v \sim \frac{1}{r^2} \qquad E_a \sim \frac{1}{r} \qquad \text{para } r \rightarrow \infty$$

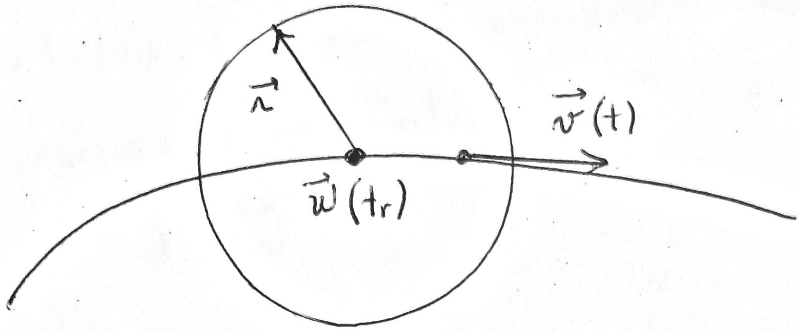
Então, apenas $\vec{E}_a$ contribui para o campo de radiação

$$\vec{E}_{rad} = \vec{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\vec{r}\cdot\vec{u})^3} \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \Rightarrow \vec{E}_a \perp \vec{r}$$

Dessa forma

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{rad}^2 \hat{r}$$

Tomemos agora a situação particular em que a carga está momentaneamente em repouso no instante retardado tr



Então

$$\vec{u} = c\hat{r} - \vec{v} = c\hat{r} \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{u} = cr$$

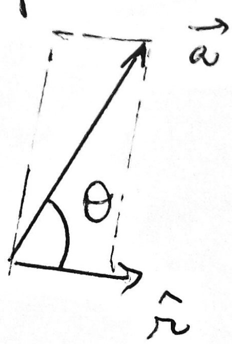
$$\Downarrow$$

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2 c}{r^3 c^3}\left[\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{a})\right] \qquad \frac{1}{c^2} = \mu_0\epsilon_0$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2 r}\left[(\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r} - \vec{a}\right] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r}\left[(\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r} - \vec{a}\right]$$

$$\vec{a} - (\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r} = \vec{a}_\perp$$ componente de $\vec{a} \perp$ a $\hat{r}$

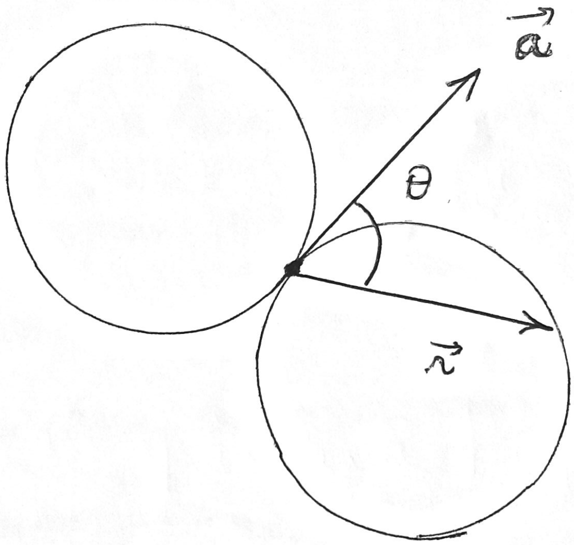
$$|\vec{a}_\perp| = |\vec{a}|\sin\theta$$



Portanto

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{rad}^2 \, \hat{r} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \, \hat{r}$$

Ou seja, nenhuma energia é irradiada na direção paralela à aceleração instântanea $\vec{a}$. Potência máxima é irradiada $\perp$ a $\vec{a}$.



Potência total irradiada

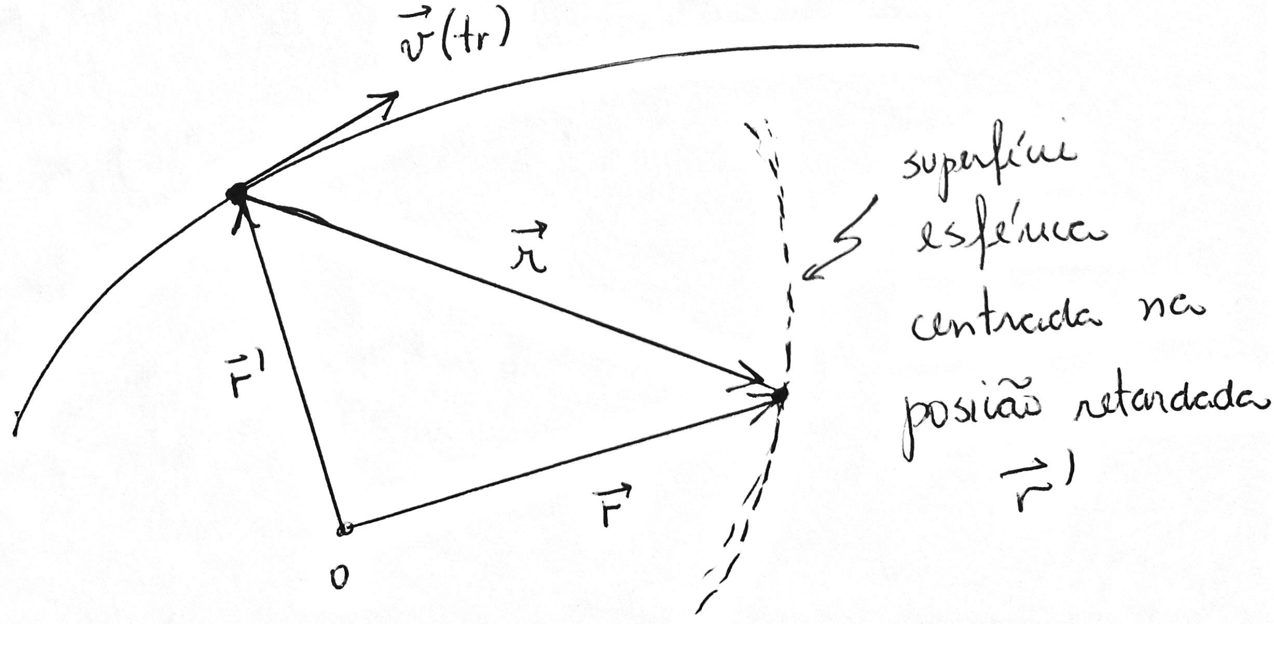
$$P = \oint_{\Sigma} \vec{S}_{rad} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \, \frac{\sin^2\theta}{r^2} \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$ (Fórmula de Larmor)

A expressão anterior (Larmor) é válida para o caso em que a carga está instantaneamente em repouso.

Ela equivale à potência P que cruza a superfície de uma esfera distante da carga num determinado instante t, tendo essa potência sido emitida num instante retardado $t_r = t - r/c$ quando a carga encontra-se momentaneamente parada.

Quando $\vec{v} \neq \vec{0}$, a taxa com que a energia cruza a superfície da esfera passa a ser diferente da taxa de emissão, devido ao efeito Doppler. A diferença entre essas taxas deve depender da velocidade da carga com respeito à superfície da esfera



Calculemos então a relação entre a potência por unidade de área emitida pela carga

$$\frac{dW}{dt_r\, dA}$$

e aquela recebida por um observador distante

$$\frac{dW}{dt\, dA}$$

Da regra da cadeia temos

$$\frac{dW}{dt_r\, dA} = \frac{\partial t}{\partial t_r} \frac{dW}{dt\, dA} \qquad \text{com} \quad t_r = t - \tfrac{\imath}{c}$$

Então

$$\frac{\partial t}{\partial t_r} = \frac{\partial}{\partial t_r}\left(t_r + \frac{\imath}{c} \right) = 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \imath}{\partial t_r}$$

$$\text{com} \quad \imath = \left(r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,' \right)^{1/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \imath}{\partial t_r} = \frac{1}{2\imath}\frac{\partial}{\partial t_r}\left(r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,' \right)$$

$$\frac{\partial \mathscr{r}}{\partial t_r} = \frac{1}{2\mathscr{r}} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(\vec{r}' \cdot \vec{r}' - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \right)$$

$$= \frac{1}{2\mathscr{r}} \left\{ 2\vec{r}' \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}'}{dt_r}}_{= \vec{v}(t_r)} - 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt_r} \right\}$$

$$= - \frac{\vec{v}}{\mathscr{r}} \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}' \right) = - \vec{v} \cdot \hat{\mathscr{r}}$$

Portanto

$$\frac{\partial t}{\partial t_r} = 1 - \frac{\vec{v} \cdot \hat{\mathscr{r}}}{c} = \frac{\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{u}}{\mathscr{r} c}$$

Logo

$$\frac{dW}{dt_r \, dA} = \left(\frac{\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{u}}{\mathscr{r} c} \right) \frac{dW}{dt \, dA}$$

Mas $dA = \mathscr{r}^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \mathscr{r}^2 d\Omega$, então

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \left(\frac{\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{u}}{\mathscr{r} c} \right) \frac{dP_r}{d\Omega} \mathscr{r}^2 = \left(\frac{\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{u}}{\mathscr{r} c} \right) \frac{1}{\mu_0 c} E_{rad}^2 \, \mathscr{r}^2$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\left| \hat{\mathscr{r}} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right|^2}{(\hat{\mathscr{r}} \cdot \vec{u})^5}$$

Integrando em ângulo sólido

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c}\left[a^2 - \left|\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{c}\right|^2\right]$$

generalização de Liénard para
a fórmula de Larmor

—— // ——

Caso particular: $\vec{v}$ e $\vec{a}$ instantaneamente colineares

$$\vec{u}\times\vec{a} = (c\hat{r} - \vec{v})\times\vec{a} = c(\hat{r}\times\vec{a})$$

$$\hat{r}\times(\vec{u}\times\vec{a}) = c\,\hat{r}\times(\hat{r}\times\vec{a}) = c\left[(\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r} - \vec{a}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$|\hat{r}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2 = c^2\left|(\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r} - \vec{a}\right|^2$$

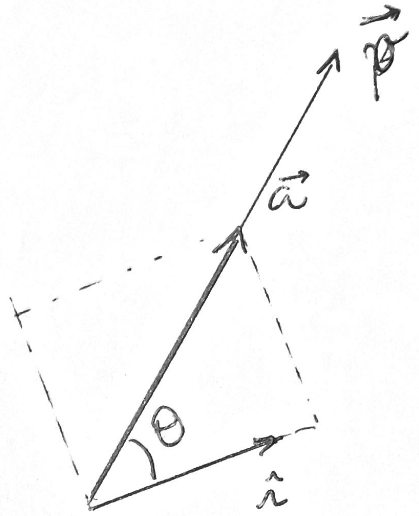
$$= c^2\left[(\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r} - \vec{a}\right]\cdot\left[(\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r} - \vec{a}\right]$$

$$= c^2\left[(\hat{r}\cdot\vec{a})^2 - 2(\hat{r}\cdot\vec{a})^2 + a^2\right]$$

$$= c^2\left[a^2 - (\hat{r}\cdot\vec{a})^2\right]$$

$$\vec{r}\cdot\vec{u} = \vec{r}\cdot\left(c\hat{r}-\vec{v}\right) = rc - \vec{r}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{\vec{r}\cdot\vec{u}}{r} = \hat{r}\cdot\vec{u} = c - \hat{r}\cdot\vec{v}$$



Então

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{\left[a^2-(\hat{r}\cdot\vec{a})^2\right]}{(c-\hat{r}\cdot\vec{v})^5}$$

com

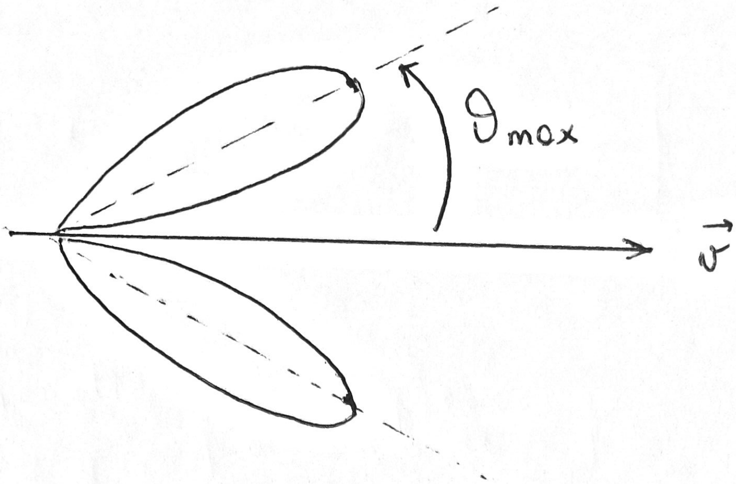
$$a^2-(\hat{r}\cdot\vec{a})^2 = |\underbrace{(\hat{r}\cdot\vec{a})\hat{r}-\vec{a}}_{\vec{a}_\perp}|^2 = |a_\perp|^2 = a^2\sin^2\theta$$

$$\hat{r}\cdot\vec{v} = v\cos\theta = \beta c\cos\theta$$

Portanto

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\sin^2\theta$$



Perceba que independente de β

$$\frac{dP_e}{d\Omega}(\theta=0) = 0$$

Já para partículas ultra-relativísticas, você deve mostrar que

$$\theta_{max} \simeq \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^{1/2} \quad p/ \quad \beta \simeq 1$$

A potência emitida independe do sinal da aceleração

Quando a partícula está desacelerando, a radiação é conhecida como radiação de bremsstrahlung