1. Coeficientes não necessariamente constantes

1.1. **Equações homogêneas, uso de uma solução para encontrar outra.** No caso das equa cões com coeficientes não necessariamente constantes e homogêna.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

sendo p, q funções reais e contínuas definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, não dispomos de um método geral para determinar as soluções. Entetanto, se *uma solução* y_1 for conhecida, podemos usar o *método da variação das constantes* para determinar *outra solução* na forma $y_2 = vy_1$.

Calculando, obtemos:

$$\begin{aligned} y_2 &= vy_1 \\ y_2' &= v'y_1 + vy_1' \\ y_2'' &= v'' + 2v'y_1' + vy_1'' \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial e lembrando que y_1 é solução, obtemos:

Date: April 27, 2020.

$$
\begin{aligned}
& v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + +py_1' + +qy_1)v = 0 \Leftrightarrow \\
& v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0 \Leftrightarrow \\
& \frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - p \Leftrightarrow \\
& \frac{d}{d\,x}\log|v'| = -2\log|y_1| - \int p \Leftrightarrow \\
& \log|v'| = \log\frac{1}{y_1^2} - \int p \Leftrightarrow \\
& |v'| = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p}.
\end{aligned}
$$

Precisamos de apenas uma solução, portanto basta tomar $v' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p}$, sendo $\int p$ uma primitiva qualquer de p.

Exemplo 1. $x^2y'' + xy' - y = 0.$

É fácil verificar que $y = x$ é solução.
Outra solução é dada então por $y = v(x)x$, sendo
$v' = \frac{1}{x^2}e^{-\int \frac{1}{x}\,d\,x} = \frac{1}{x^2}e^{-\log|x|+C} = C\frac{1}{|x|}\frac{1}{x^2}$, e podemos escolher
$v' = \frac{1}{x^3}$, $v = \frac{1}{x^2}$ obtendo uma segunda solução:

$$y_2 = v = \frac{1}{x^2}\cdot x = \frac{1}{x}.$$

[
A solução geral da equação é dada por :

$$y(x) = C_1x + C_1 \cdot \frac{1}{x}.$$

1.2. **Equação não homogênea, método da variação dos parâmetros.** Consideremos agora a equação não homogêna.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{2}$$

Supondo conhecidas duas soluções y_1 e y_2 da equação homogênea associada (1) podemos, em princípio encontrar uma solução particular da equação (2) da forma:

$$y_p = v_1(x) \cdot y_1 + v_2(x) \cdot y_2$$

. Derivando, obtemos

$$y_p' = v_1'y_1 + v_1y_1\prime + v_2' \cdot y_2 + v_2 \cdot y_2'.$$

Agora, observando que precisamos encontar apenas um par de funções v_1, v_2, adicionamos uma condição suplementar para evitar derivadas segundas em v_1 e v_2:

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0, \tag{3}$$

de onde:

$$y_p' = v_1y_1\prime + +v_2 \cdot y_2'.$$

Derivando novamente:

$$y_p'' = v_1'y_1' + v_1y_1'' + +v_2' \cdot y_2' + v_2 \cdot y_2''.$$

Da equação (2) obtemos, lembrando que y_1 e y_2 são soluções:

$$y_p\prime\prime + p(x)y_p' + q(x)y_p = v_1'y_1\prime + v_2' \cdot y_2' = g(x). \tag{4}$$

De (3) e (4), temos os sistema de equações para v_1' e v_2'.

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' &= 0 \\ y_1\prime v_1' + y_2'v_2' &= g(x). \end{cases}$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-gy_2}{W}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & 0 \\ y_2' & g \end{vmatrix}}{W} = \frac{gy_1}{W},$$

sendo

$$W = W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

o Wronskiano do par de soluções y_1, y_2.

Exemplo 2. *Encontrar uma solução particular da equação :* $y\prime\prime - 2y\prime + y = 2x$.

Este o mesmo problema resolvido anteriormente usando exemplo do método dos coeficientes a determinar. Como vimos lá, um par de soluções da equação homogênea associada é:

$y_1 = e^x$ e $y_2 = xe^x$.

$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ (e^x)\prime & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$.

Portanto, obtemos:

$v_1' = \frac{-2x \cdot xe^x}{e^{2x}} = -2x^2e^{-x}$,

$v_2' = \frac{2x \cdot e^x}{e^{2x}} = 2xe^{-x}$.

Integrando (por partes),

$v_1 = 2x^2e^{-x} + 4xe^{-x} + 4e^{-x}$,

$v_2 = -2xe^{-x} - 2e^{-x}$.

Portanto

$$y_p = (2x^2e^{-x} + 4xe^{-x} + 4e^{-x})e^x - (2xe^{-x} + 2e^{-x}) = 2x + 4.$$

O método pode ser estendido para equações de ordem maior.

(5)
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots a_2(x)y'' + a_1(x)y' = g(x).$$

Procedendo como antes, se $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$, são n soluções L.I da equação homogênea associada, obtemos um sistema do tipo:

$$\begin{cases} y_1v_1' + y_2v_2' + \cdots + y_{n-1}v_{n-1}' + y_nv_n' & = & 0 \\ y_1'v_1' + y_2'v_2' + \cdots + y_{n-1}'v_{n-1}' + y_n'v_n' & = & 0 \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}v_1' + y_2^{(n-2)}v_2' + \cdots + y_{n-1}^{(n-2)}v_{n-1}' + y_n^{(n-2)}v_n' & = & 0 \\ y_1^{(n-1)}v_1' + y_2^{(n-1)}v_2' + \cdots + y_{n-1}^{(n-1)}v_{n-1}' + y_n^{(n-1)}v_n' & = & g(x) \end{cases}$$

para as n funções $v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x)$

Exemplo 3. *Encontrar uma solução particular da equação :* $y''' + y' = \sec x$.