

MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Seção 2.7: A DFT bidimensional

Definição da DFT bidimensional

A transformada de Fourier de uma imagem $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ segue bem de perto o exemplo 1.24, e corresponde aos coeficientes não-normalizados da mudança de base da representação usual (base canônica) para a base das formas básicas de onda bidimensionais dadas pelas matrizes $\mathcal{E}_{k,l}$, definidas na seção 1.7.2 como

$$(\mathcal{E}_{k,l})_{r,s} = e^{i2\pi(kr/m + ls/n)}, \quad r = 0, \dots, m-1, \quad s = 0, \dots, n-1,$$

onde escrevemos $A = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} c_{k,l} \mathcal{E}_{k,l}$ e obtemos os coeficientes $c_{k,l}$ pelo teorema 1.8.3 como $c_{k,l} = \frac{(A, \mathcal{E}_{k,l})}{mn}$.

Definição 2.7.1 (DFT bidimensional)

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, definimos sua DFT $\hat{A} = DFT(A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ como a matriz cujas componentes são

$$\hat{A}_{k,l} = (A, \mathcal{E}_{k,l}) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} A_{r,s} e^{-i2\pi(kr/m + ls/n)}, \quad \begin{array}{l} k = 0, \dots, m-1, \\ l = 0, \dots, n-1 \end{array}.$$

Observe que nessa definição k e l são índices associados às *frequências de varredura por linhas e por colunas*, respectivamente, enquanto r e s são os índices de linhas e colunas dentro das matrizes A e $\mathcal{E}_{k,l}$.

Observe também que a única diferença entre os coeficientes da DFT $\hat{A}_{k,l}$ e os coeficientes $c_{k,l}$ da combinação linear que expressa A em função das formas básicas de onda é a ausência da constante $\frac{1}{mn}$ nos coeficientes da DFT. Isso é análogo à definição usada no caso unidimensional, sendo que necessariamente essa constante aparecerá na equação da IDFT.

Observação 2.5

Note que a expressão

$$\hat{A}_{k,l} = (A, \mathcal{E}_{k,l}) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} A_{r,s} e^{-i2\pi(kr/m + ls/n)}$$

é periódica em relação a k e l , com períodos m e n respectivamente, ou seja

$$\hat{A}_{k+pm, l+qn} = \hat{A}_{k,l}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

Em função disso, é possível visualizar a DFT bidimensional em outras faixas de frequência além de $k = 0, \dots, m-1$, $l = 0, \dots, n-1$. Uma escolha comum, análoga ao caso unidimensional, consiste em utilizar a faixa

$$-\frac{m}{2} < k \leq \frac{m}{2}, \quad -\frac{n}{2} < l \leq \frac{n}{2}.$$

Definição 2.7.2 (IDFT bidimensional)

Dada uma matriz $\hat{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ definimos sua IDFT $A = IDFT(\hat{A}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ pela expressão

$$A = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{A}_{k,l} \mathcal{E}_{k,l},$$

sendo que as componentes de A podem ser expressas em função de \hat{A} como

$$A_{r,s} = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{A}_{k,l} e^{i2\pi(kr/m + ls/n)}, \quad r = 0, \dots, m-1, \quad s = 0, \dots, n-1.$$

Observe que mais uma vez nessa definição k e l são índices associados às *frequências de varredura por linhas e por colunas*, respectivamente, enquanto r e s são os índices de linhas e colunas dentro das matrizes A e $\mathcal{E}_{k,l}$.

Formulação matricial da DFT 2D

Uma relação muito importante entre a DFT unidimensional e a DFT bidimensional é a seguinte:

Proposição 2.7.1

se $\hat{A} = DFT(A)$, onde $A, \hat{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, então

$$\hat{A} = F_m A F_n^T,$$

onde $F_m \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C})$ e $F_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ são as matrizes que representam as DFTs unidimensionais nos espaços \mathbb{C}^m e \mathbb{C}^n , respectivamente.

Para ver que isso é verdade, basta calcular o produto de matrizes acima. Vamos começar calculando a matriz $F_m A$; usando a definição do produto de matrizes:

$$\begin{aligned}(F_m A)_{k,s} &= \text{"linha k de } F_m \text{"} \times \text{"coluna s de } A\text{"} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} A_{r,s} e^{-i2\pi kr/m}.\end{aligned}$$

Usando agora essa expressão no produto $F_m A F_n^T$, temos:

$$\begin{aligned}
 (F_m A F_n^T)_{k,l} &= ((F_m A) F_n^T)_{k,l} = \text{"linha } k \text{ de } F_m A" \quad \times \quad \text{"coluna } l \text{ de } F_n^T" \\
 &= \text{"linha } k \text{ de } F_m A" \quad \times \quad \text{"linha } l \text{ de } F_n" \\
 &= \sum_{s=0}^{n-1} (F_m A)_{k,s} e^{-i2\pi ls/n} \\
 &= \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^{m-1} A_{r,s} e^{-i2\pi kr/m} \right) e^{-i2\pi ls/n} \\
 &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} A_{r,s} e^{-i2\pi(kr/m + ls/n)} \\
 &= \hat{A}_{k,l}
 \end{aligned}$$

A interpretação algorítmica da identidade $DFT(A) = F_m A F_n^T$ é a seguinte:

- A parte $F_m A$ pode ser vista como uma aplicação da DFT nas **colunas** de A:

$$\begin{aligned}
 F_m A &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} F_m A^0 & F_m A^1 & \dots & F_m A^{n-1} \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} DFT(A^0) & DFT(A^1) & \dots & DFT(A^{n-1}) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

- O produto subsequente por F_n^T pode ser visto como uma aplicação da DFT nas **linhas** da matriz resultante $X = F_m A$, pois

$$XF_n^T = \left[\begin{array}{c} \hline X_0 F_n^T \\ \hline X_1 F_n^T \\ \hline \vdots \\ \hline X_{m-1} F_n^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \hline DFT(X_0)^T \\ \hline DFT(X_1)^T \\ \hline \vdots \\ \hline DFT(X_{m-1})^T \end{array} \right]$$

- Finalmente, a associatividade do produto de matrizes

$$F_m A F_n^T = (F_m A) F_n^T = F_m (A F_n^T)$$

permite ver que o mesmo resultado poderia ser atingido calculando-se primeiro a DFT das linhas de A e depois a DFT das colunas resultantes.

Seção 2.7.1: Interpretação e exemplos da DFT 2D

- Abaixo veremos uma imagem "natural" e uma imagem sintética, e observaremos como os coeficientes de Fourier se distribuem no âmbito de frequências

$$k = 0, \dots, m - 1, \quad l = 0, \dots, n - 1$$

e também

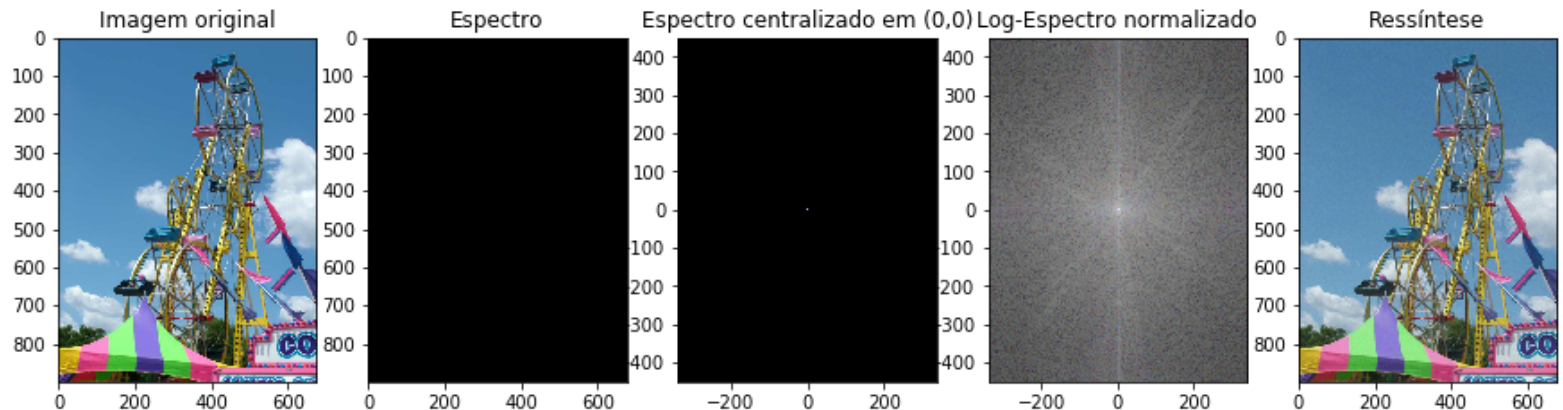
$$-\frac{m}{2} < k \leq \frac{m}{2}, \quad -\frac{n}{2} < l \leq \frac{n}{2}.$$

- Como a magnitude dos coeficientes possui grande variação, visualizaremos também as imagens correspondentes ao mapeamento $\log(1 + |\hat{A}|)$.
- Exploraremos também a ressíntese da imagem aplicando um esquema simples de compressão similar ao que usamos no caso unidimensional (som do sino): qualquer coeficiente com amplitude inferior a $\frac{\max |\hat{A}_{k,l}|}{1000}$ será eliminado. O objetivo é comparar as taxas de compressão atingidas e o resultado perceptual desse esquema simples de compressão.

In [23]:

```
# Comandos para plotar imagens
f, ax = plt.subplots(1,5,figsize=(15,4.5))
f.suptitle("Figura 2.13 - Imagem e várias apresentações da DFT")
ax[0].set_title("Imagem original"); ax[0].imshow(M)
ax[1].set_title("Espectro"); ax[1].imshow(absN / absN.max())
ax[2].set_title("Espectro centralizado em (0,0)"); ax[2].imshow(shiftN / shiftN.
max(), extent=[ -halfwidth, halfwidth,-halfheight, halfheight])
ax[3].set_title("Log-Espectro normalizado"); ax[3].imshow(Nshow, extent=[ -halfw
idth, halfwidth,-halfheight, halfheight])
ax[4].set_title("Ressíntese"); ax[4].imshow(reMshow)
plt.show()
print("Compressão na ressíntese = {0:.3f}%".format(100*Compression))
```

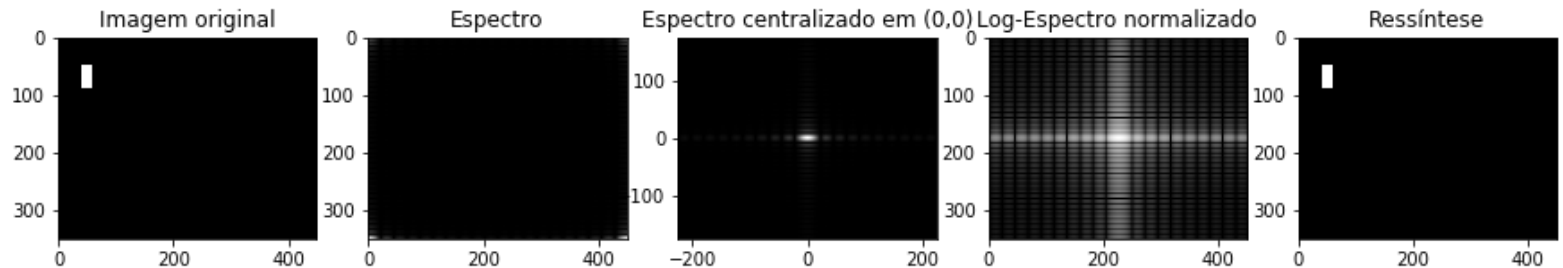
Figura 2.13 - Imagem e várias apresentações da DFT



Compressão na ressíntese = 76.136%

```
In [27]: # comandos para plotar as imagens
f, ax = plt.subplots(1,5,figsize=(15,5))
f.suptitle("Figura 2.14: Imagem artificial e visualizações da DFT")
ax[0].set_title("Imagem original"); ax[0].imshow(0)
ax[1].set_title("Espectro"); ax[1].imshow(absN/ absN.max())
ax[2].set_title("Espectro centralizado em (0,0)"); ax[2].imshow(shiftN / shiftN.
max(), extent=[-halfwidth, halfwidth, -halfheight, halfheight])
ax[3].set_title("Log-Espectro normalizado"); ax[3].imshow(Nshow)
ax[4].set_title("Ressíntese"); ax[4].imshow(reMshow)
plt.show()
print("Compressão na ressíntese = {0:.3f}%".format(100*Compression))
```

Figura 2.14: Imagem artificial e visualizações da DFT



Compressão na ressíntese = 23.130%