

# 7600054 — Sistemas Complejos

**Gonzalo Travieso**

2020-04-27

# Outline

---

- 1 Sistemas não-lineares (continuação)
- 2 Estabilidade estrutural
- 3 Bifurcação
- 4 Exemplo

## Exemplo: Oscilador harmônico amortecido

- O oscilador harmônico amortecido pode ser descrito por:

$$\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

com  $a > 0$  e  $\omega^2 = g/\ell$ .

- Usando  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , ficamos com o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega^2 \sin x_1 - 2ax_2. \end{aligned}$$

- Os pontos fixos são  $[n\pi, 0]$

## Exemplo (cont)

---

- O jacobiano é

$$\mathbf{Df}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x_1 & -2a \end{bmatrix}.$$

- Nos pontos fixos:

$$\mathbf{Df}(n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos n\pi & -2a \end{bmatrix}.$$

- Para  $n$  par,  $\cos n\pi = 1$ .
- Para  $n$  ímpar,  $\cos n\pi = -1$ .

## Exemplo (cont)

- Para  $n$  par:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2a) + \omega^2 = 0,$$

e os autovalores são  $\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2}$ .

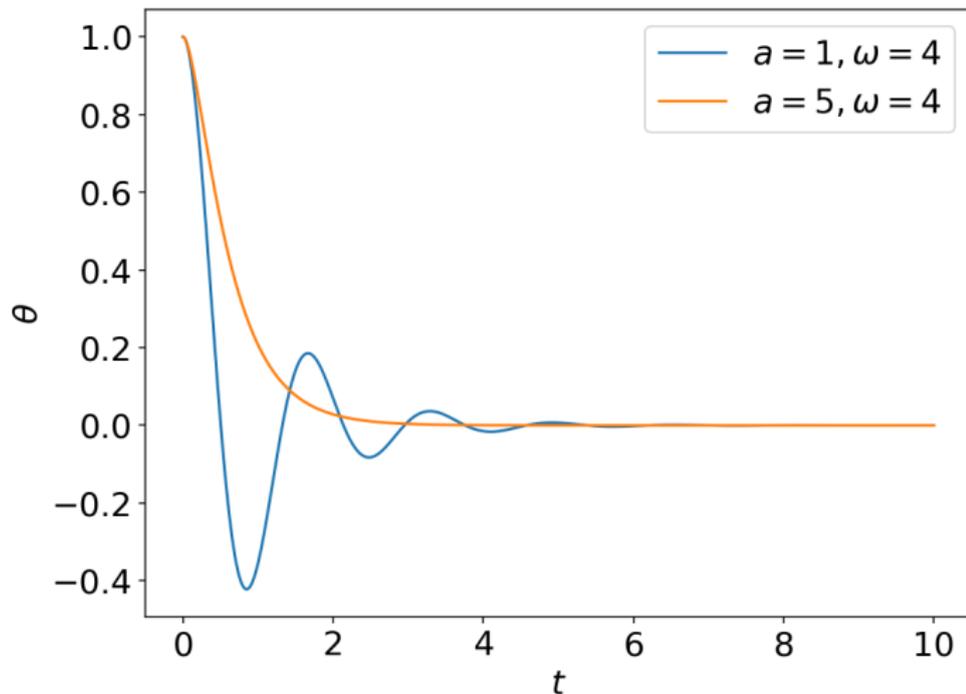
- Para  $n$  ímpar:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & -2a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2a) - \omega^2 = 0,$$

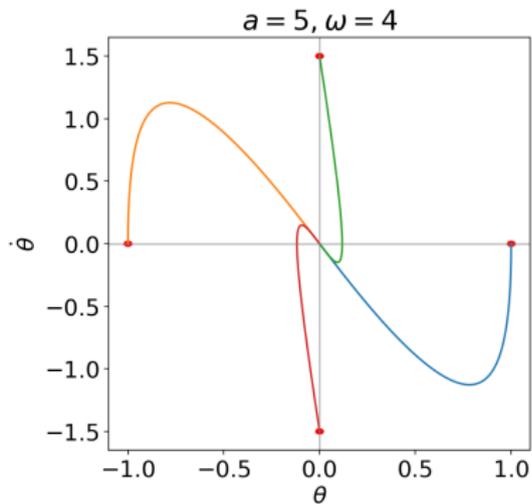
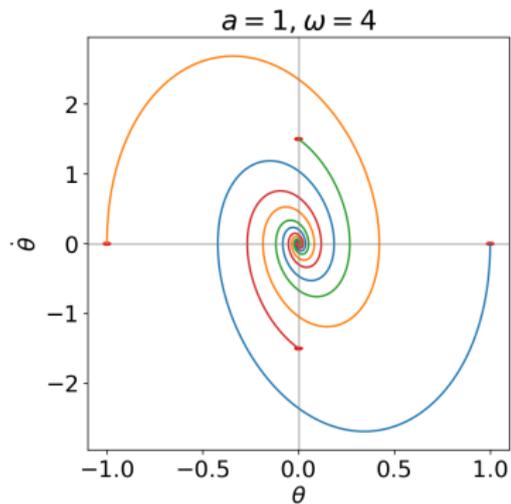
e os autovalores são  $\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 + \omega^2}$ .

- Os pontos fixos com  $n$  ímpar são sempre instáveis.
- Os pontos fixos com  $n$  par são sempre estáveis e dependem da relação entre  $a$  e  $\omega$ :
  - Se  $\omega \leq a$  temos dois autovalores reais negativos.
  - Se  $\omega > a$  temos dois autovalores complexos conjugados com parte real negativa.

# Exemplo (cont)



# Exemplo (cont)



# Classificação

---

- Quando a parte real de todos os autovalores do jacobiano em um ponto é **negativa**, o ponto fixo é chamado um **dreno** (*sink*).
- Quando a parte real de todos os autovalores do jacobiano em um ponto é **positiva**, o ponto fixo é chamado um **fonte** (*source*).
- Se pelo menos um dos autovalores tem parte real positiva e pelo menos um tem parte real negativa, o ponto fixo é denominado uma **sela** (*saddle*).

## Nota

Essa classificação se aplica a pontos fixos hiperbólicos, como fica claro.

## Exemplo: Oscilador harmônico perturbado

- Considere o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \lambda x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \lambda x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

- A origem  $(0, 0)$  é um ponto fixo.
- O jacobiano na origem é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Portanto os autovalores são:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i.$$

## Exemplo (cont)

---

- Como a parte real dos dois autovalores é zero, o ponto fixo é não-hiperbólico.
- Portanto, a verificação dos autovalores do jacobiano **não é suficiente para determinar estabilidade**.
- A distância até a origem é dada por  $x_1^2 + x_2^2$  e ela varia com

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2\lambda(x_1^2 + x_2^2).$$

- Então, se  $\lambda < 0$  a distância até a origem decresce com o tempo e ela é estável. Se  $\lambda > 0$ , a distância até a origem cresce com o tempo, e ela é instável.

# Órbitas fechadas e ciclos limite

- Um conjunto de pontos é uma **órbita fechada**  $\gamma$  do fluxo  $\varphi_t$  se, dados quaisquer dois pontos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \gamma$  temos que

$$\mathbf{y} = \varphi_\tau(\mathbf{x}),$$

para algum  $\tau > 0$ .

- Definindo a distância de um ponto  $\mathbf{x}$  a uma órbita  $\gamma$ ,  $d(\mathbf{x}, \gamma)$  como a menor distância entre  $\mathbf{x}$  e qualquer ponto  $\mathbf{y} \in \gamma$ , uma órbita fechada  $\gamma$  é um **ciclo limite** se a trajetória por um ponto  $\mathbf{x} \notin \gamma$  tende no limite a  $\gamma$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(\mathbf{x}), \gamma) = 0.$$

- Na vizinhança de um ciclo limite não pode existir nenhuma outra órbita fechada.

# Exercício

Considerando o oscilador harmônico perturbado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \lambda x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \lambda x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}$$

## Exercício

- 1 Plote os gráficos de  $x_1$  e  $x_2$  com  $t$ , partindo do estado inicial  $(1, 1)$  para um valor de  $\lambda$  menor que zero e outro maior que zero. [Você vai precisar ajustar valores de  $\lambda$ , tempo total simulado e número de passos para conseguir ver os resultados e evitar problemas numéricos.]
- 2 Desenhe o diagrama de fase desse sistema para os dois valores de  $\lambda$  que você usou acima.

# Estabilidade estrutural

- Vamos agora verificar a estabilidade a pequenas variações de um fluxo próximo a um ponto fixo.
- Para isso precisamos definir proximidade entre fluxos.
- Seja  $\mathcal{V}(\mathcal{U})$  o espaço de todos os campos vetoriais  $\mathbf{f} : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- Se  $\mathbf{f} \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$  então podemos definir

$$\|\mathbf{f}\|_0 = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}} \{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|\},$$

como sendo a norma  $C^0$  de  $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ .

- A distância  $C^0$  entre os campos vetoriais  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , ambos em  $\mathcal{V}(\mathcal{U})$  será então:

$$d_0(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_0.$$

# Estabilidade estrutural (cont)

- O problema é que a definição anterior usa apenas os valores da função, e portanto não garante que dois fluxos próximos de acordo com ela tenham o mesmo número de pontos fixos hiperbólicos.
- Para resolver esse problema, devemos incluir a derivada nas distâncias.
- Por exemplo, o distância  $C^1$  fica:

$$d_1(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{U}} \{ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\|, \|\mathbf{Df}(\mathbf{x}) - \mathbf{Dg}(\mathbf{x})\| \}.$$

- Dado  $\mathbf{f} \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$ , definimos

$$N_\epsilon(\mathbf{f}) = \{ \mathbf{y} \in \mathcal{V}(\mathcal{U}) \mid d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) < \epsilon \},$$

chamada a vizinhança- $\epsilon$  de  $\mathbf{f}$ .

- Uma  $\mathbf{g} \in N_\epsilon(\mathbf{f})$  é dita  $\epsilon - C^1$  próxima de  $\mathbf{f}$ , ou também uma perturbação  $\epsilon - C^1$  de  $\mathbf{f}$ .

# Estabilidade estrutural (cont)

---

- Seja  $\mathbf{x}^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico do fluxo  $\varphi_t$  gerado pelo campo vetorial  $\mathbf{f} \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$ .
- Seja  $\nu \subset \mathcal{U}$  uma vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ .
- Se existe uma vizinhança  $N_\epsilon(\mathbf{f})$  tal que  $\mathbf{g} \in N_\epsilon(\mathbf{f})$  gera um fluxo com um único ponto fixo  $\mathbf{y}^* \in \nu$  tal que  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$  e  $\mathbf{Dg}(\mathbf{y}^*)$  têm o mesmo número de autovalores com partes real positivas e negativas, dizemos que o fluxo  $\varphi_t$  é **localmente assintoticamente estável**.

# Estabilidade de pontos fixos hiperbólicos

- Seja uma **família** de campos vetoriais  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$  com  $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  com  $r$  parâmetros  $\mu \in \mathbb{R}^r$ .
- Se  $\mathbf{x}^*$  é um ponto fixo hiperbólico de  $\mathbf{f}$  para  $\mu^*$ , então os autovalores de  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*, \mu^*)$  têm todos parte real diferente de zero.
- Do teorema da função implícita, existe  $\mathbf{x}(\mu)$  tal que, para  $\mu \approx \mu^*$  temos

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \mu) = 0,$$

com  $\mathbf{x}(\mu^*) = \mathbf{x}^*$ .

- Como os autovalores de  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}(\mu), \mu)$  são contínuos em  $\mu$ , eles também têm parte real diferente de zero com mesmo sinal que os de  $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*, \mu^*)$ , e portanto a mesma estabilidade.
- Portanto, pontos fixos hiperbólicos são localmente estruturalmente estáveis.

## Bifurcação de nó de sela (*saddle node*)

- Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2.$$

- Para  $\mu^* = 0$ ,  $x^* = 0$  é um ponto fixo.
- A derivada será:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0, \mu=0} = (-2x)_{x=0} = 0,$$

e portanto o ponto fixo  $x^* = 0$  é não-hiperbólico.

- Os pontos fixos são:

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\mu},$$

para  $\mu \geq 0$ .

- Temos

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\pm\sqrt{\mu}, \mu} = (-2x)_{x=\pm\sqrt{\mu}} = \mp 2\sqrt{\mu}.$$

## Bifurcação de nó de sela (cont)

---

- Para  $\mu < 0$  não há nenhum ponto fixo.
- Para  $\mu = 0$  surge um ponto fixo não-hiperbólico.
- Para  $\mu > 0$  temos dois pontos fixos,  $+\sqrt{\mu}$  e  $-\sqrt{\mu}$ , sendo que o primeiro é estável e o segundo instável.
- Portanto ocorre uma **bifurcação de nó de sela** em  $\mu^* = 0$ .

# Bifurcação de nó de sela: condições

Para que ocorra uma bifurcação de nó de sela no ponto  $x^*$  com parâmetro  $\mu^*$  são necessárias as seguintes condições:

- $x^*$  é um ponto fixo:  $f(x^*, \mu^*) = 0$ .
- Ele é não-hiperbólico:  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*, \mu^*} = 0$ .
- A derivada em relação a  $\mu$  é não-nula:  $\left. \frac{df}{d\mu} \right|_{x^*, \mu^*} \neq 0$ .
- A derivada segunda em relação a  $x$  é não-nula:  $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x^*, \mu^*} \neq 0$ .

# Bifurcação transcritical

- Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2.$$

- Para  $\mu^* = 0$ ,  $x^* = 0$  é um ponto fixo.
- A derivada será

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0, \mu=0} = (\mu - 2x)_{x=0, \mu=0} = 0,$$

e portanto o ponto fixo  $x^* = 0$  é não-hiperbólico.

- Os pontos fixos  $f(x, \mu) = x(\mu - x) = 0$  são  $x = 0$  e  $x = \mu$ .

# Bifurcação transcritical (cont)

---

- Temos

$$(\mu - 2x)_{x=0} = \mu,$$

e

$$(\mu - 2x)_{x=\mu} = -\mu.$$

- Para:  $\mu < 0$   $x = 0$  é estável e  $x = \mu$  é instável.
- Para:  $\mu = 0$   $x = 0$  é um ponto fixo não-hiperbólico.
- Para:  $\mu > 0$   $x = 0$  é instável e  $x = \mu$  é estável.
- Ocorre uma **bifurcação transcritical** no ponto  $x^* = 0$  em  $\mu^* = 0$ .

# Bifurcação transcritical: condições

Para que ocorra uma bifurcação transcritical no ponto  $x^*$  com parâmetro  $\mu^*$  são necessárias as seguintes condições:

- $x^*$  é um ponto fixo:  $f(x^*, \mu^*) = 0$ .
- Ele é não-hiperbólico:  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*, \mu^*} = 0$ .
- A derivada em relação a  $\mu$  é nula:  $\left. \frac{df}{d\mu} \right|_{x^*, \mu^*} = 0$ .
- A derivada segunda em relação a  $x$  é não-nula:  $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x^*, \mu^*} \neq 0$ .
- A derivada em relação a  $x$  e  $\mu$  é não-nula:  $\left. \frac{d^2f}{dx d\mu} \right|_{x^*, \mu^*} \neq 0$ .

# Bifurcação de forcado (*pitchfork*)

- Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3.$$

- Para  $\mu^* = 0$ ,  $x^* = 0$  é um ponto fixo.
- A derivada será

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0, \mu=0} = (\mu - 3x^2)_{x=0, \mu=0} = 0,$$

e portanto o ponto fixo  $x^* = 0$  é não-hiperbólico.

- Os pontos fixos  $f(x, \mu) = x(\mu - x^2) = 0$  são  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{\mu}$  (para  $\mu \geq 0$ ).

# Bifurcação de forçado (cont)

- Temos

$$(\mu - 3x^2)_{x=0} = \mu,$$

e

$$(\mu - 3x^2)_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu.$$

- Para:  $\mu < 0$   $x = 0$  é estável e o único ponto fixo.
- Para:  $\mu = 0$   $x = 0$  é um ponto fixo não-hiperbólico.
- Para:  $\mu > 0$   $x = 0$  é instável e  $x = \pm\sqrt{\mu}$  são estáveis.
- Ocorre uma **bifurcação de forçado** no ponto  $x^* = 0$  em  $\mu^* = 0$ .

# Bifurcação de forçado: condições

Para que ocorra uma bifurcação de forçado no ponto  $x^*$  com parâmetro  $\mu^*$  são necessárias as seguintes condições:

- $x^*$  é um ponto fixo:  $f(x^*, \mu^*) = 0$ .
- Ele é não-hiperbólico:  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*, \mu^*} = 0$ .
- A derivada em relação a  $\mu$  é nula:  $\left. \frac{df}{d\mu} \right|_{x^*, \mu^*} = 0$ .
- A derivada segunda em relação a  $x$  é nula:  $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x^*, \mu^*} = 0$ .
- A derivada em relação a  $x$  e  $\mu$  é não-nula:  $\left. \frac{d^2f}{dx d\mu} \right|_{x^*, \mu^*} \neq 0$ .
- A derivada terceira em relação a  $x$  é não-nula:  $\left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x^*, \mu^*} \neq 0$ .

# Tabela resumo das condições de bifurcação

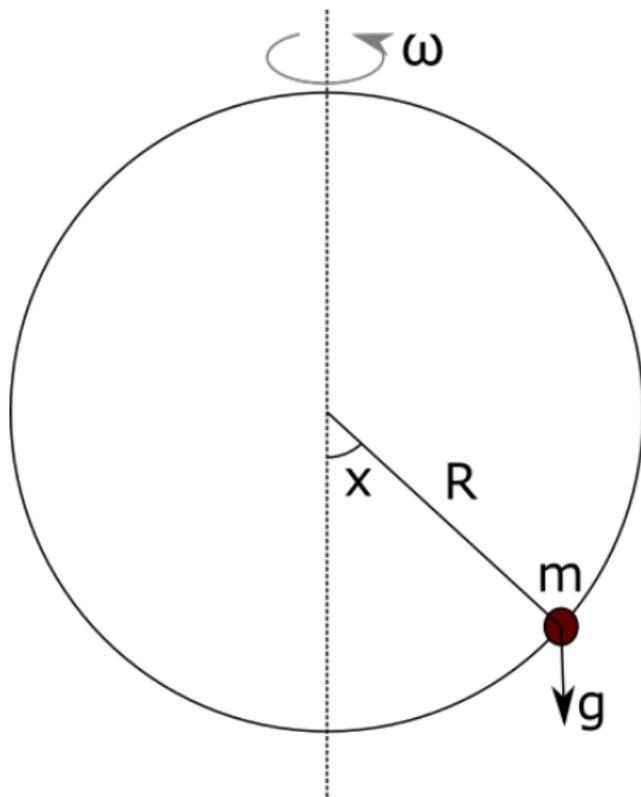
	$f$	$df/dx$	$df/d\mu$	$d^2f/dx^2$	$d^2f/dxd\mu$	$d^3f/dx^3$
nó de sela	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	—	—
transcrítica	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	—
forcado	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

# Conta deslizando em um anel rotatório

---

- Considere um anel de raio  $R$  rodando em torno de um de seus diâmetros com velocidade angular  $\omega$ .
- O eixo de rotação é vertical, e a aceleração da gravidade é  $g$ .
- Nesse anel está presa uma conta de massa  $m$  que desliza sem atrito pelo anel.
- Designamos por  $x$  o ângulo em radianos entre a parte inferior do eixo de rotação e o raio que liga o centro do anel até a conta.

## Figura



# Modelo

- O laplaciano do sistema é:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 \sin^2 x + mgR \cos x.$$

- Usando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

encontramos a equação de movimento

$$\ddot{x} = \omega^2 \sin x \cos x - \frac{g}{R} \sin x.$$

- Usando  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$  ficamos com o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \left( \omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{R} \right) \sin x_1. \end{aligned}$$

# Pontos fixos

- Os pontos fixos são dados pelas equações

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$$

e

$$\dot{x}_2 = \left( \omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{R} \right) \sin x_1 = 0.$$

- Esta última equação é válida quando

$$\sin x_1 = 0$$

ou quando

$$\omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{R} = 0.$$

- No sistema atual,  $\sin x_1 = 0$  para  $x_1 = 0$  e  $x_1 = \pi$ .
- Já  $\omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{R} = 0$  tem como solução

$$x_1 = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}.$$

# Jacobiano

- Para o cálculo do jacobiano, notamos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) &= x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) &= \left( \omega^2 \cos x_1 - \frac{g}{R} \right) \sin x_1\end{aligned}$$

- Calculamos:

$$\frac{df_1}{dx_1} = 0$$

$$\frac{df_1}{dx_2} = 1$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = \omega^2 (2 \cos^2 x_1 - 1) - \frac{g}{R} \cos x_1$$

$$\frac{df_2}{dx_2} = 0$$

# Jacobiano (cont)

- No ponto fixo  $(0, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 - \frac{g}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

- Os autovalores são

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 - \frac{g}{R} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right) = 0,$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g}{R}}.$$

- Portanto:
  - Se  $\omega^2 < \frac{g}{R}$  o ponto fixo  $(0, 0)$  é um centro (estável, mas não assintoticamente estável).
  - Se  $\omega^2 > \frac{g}{R}$  o ponto fixo  $(0, 0)$  é instável.

## Jacobiano (cont)

- Nos ponto fixo  $(\pi, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 + \frac{g}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

- Os autovalores são

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 + \frac{g}{R} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left(\omega^2 + \frac{g}{R}\right) = 0,$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\omega^2 + \frac{g}{R}}.$$

- Portanto  $(\pi, 0)$  é sempre instável (um dos autovalores é maior que zero).

# Jacobiano (cont)

- Nos pontos fixos  $(\pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g^2}{\omega^2 R^2} - \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Os autovalores são

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g^2}{\omega^2 R^2} - \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left( \frac{g^2}{\omega^2 R^2} - \omega^2 \right) = 0,$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 R^2} - \omega^2}.$$

- Portanto:
  - Se  $\omega^2 < \frac{g}{R}$  ( $\pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}, 0$ ) são instáveis.
  - Se  $\omega^2 > \frac{g}{R}$  ( $\pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}, 0$ ) são centros (estável, mas não assintoticamente estável).

# Bifurcação

---

Na passagem por  $\omega^2 = \frac{g}{R}$ :

- O ponto fixo  $(\pi, 0)$  é sempre instável.
- O ponto fixo  $(0, 0)$  passa de estável para instável.
- Os pontos fixos  $(\pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}, 0)$  passam de instáveis para estáveis.
- Temos portanto uma **bifurcação de forçado**: O ponto fixo estável que era em  $x = 0$  vira instável e surgem dois pontos fixos estáveis em  $x = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$

# Exercício

---

## Exercício

Confirme o resultado anterior realizando a simulação do sistema com conta deslizando em anel rotatório para  $\omega^2 < g/R$  e para  $\omega^2 > g/R$  e comparando os resultados.

Use  $g = 10$  e  $R = 1$ .