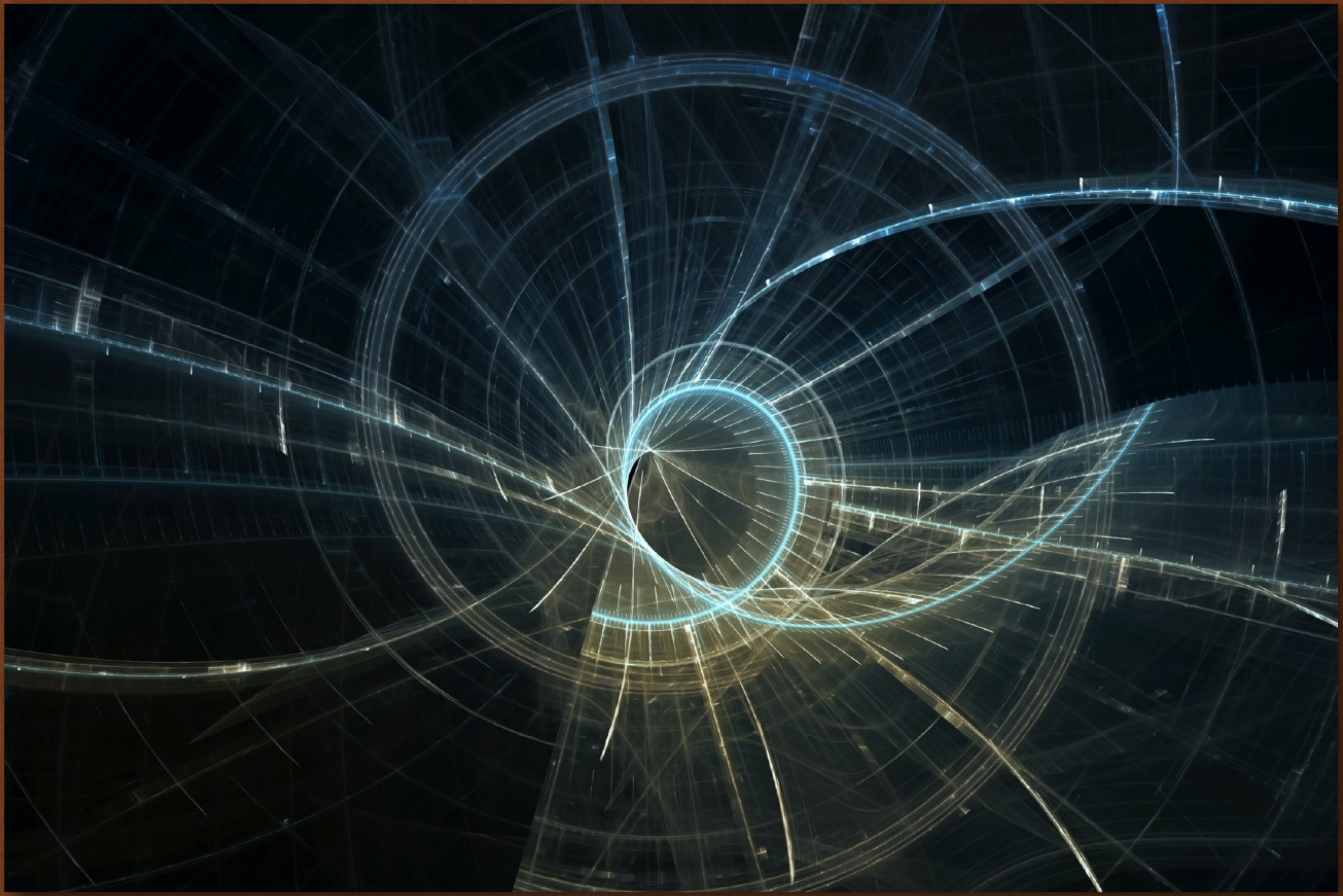
INTRODUÇÃO À

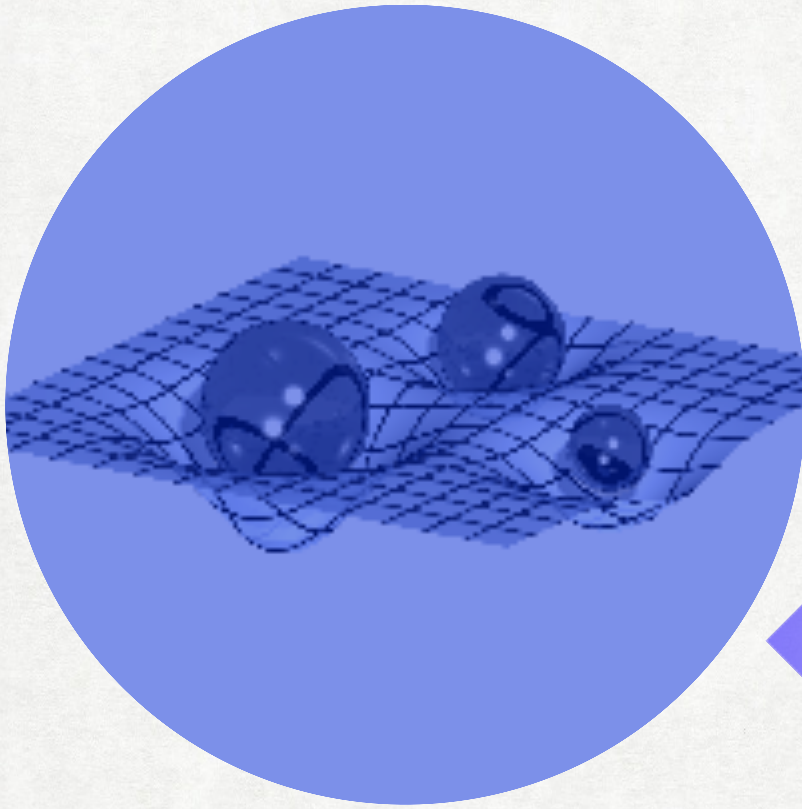


RELATIVIDADE

AULA 14 - 27/04/2020

- As Equações de Campo de Einstein (ECE)
- Conservação do tensor de energia e momento
- Tensor de energia e momento: interpretação física
- Exemplos de tensores de energia e momento
- **Leitura: Até o capítulo 4 do Carroll**

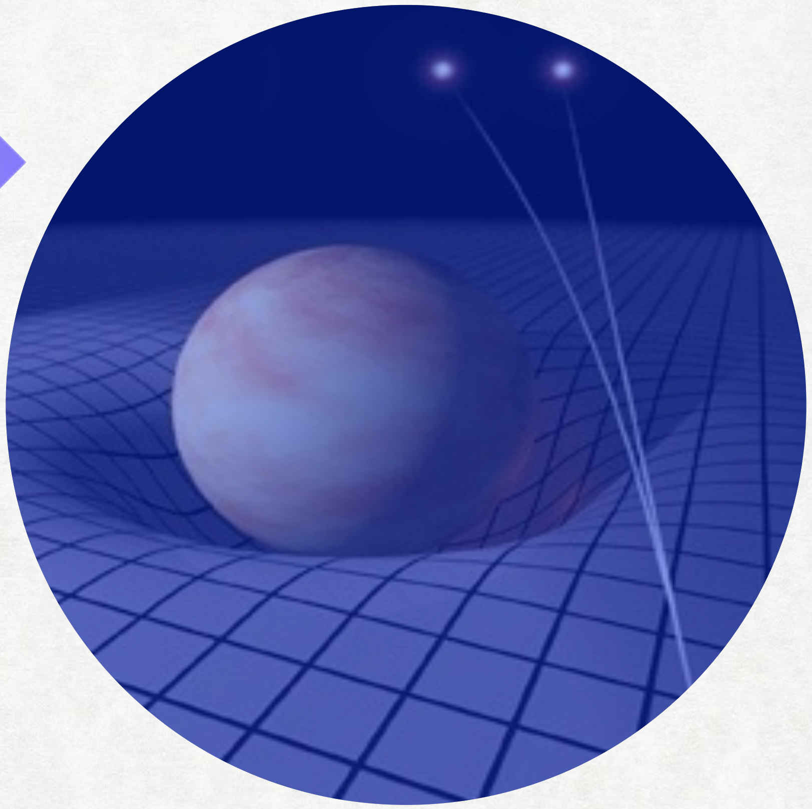
AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN



A matéria curva o espaço-tempo,
e determina a métrica…

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

… enquanto a métrica determina
como a matéria se move.



Matéria e curvatura, juntas, determinam a **dinâmica**

Matéria e curvatura estão amarradas numa

dinâmica auto-consistente,

determinada pelas Equações de Einstein

NATUREZA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

- Vamos começar por uma ***análise dimensional*** simples. Primeiramente, considere que a ***Constante de Newton*** é:

$$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$$

- Também é útil expressar a ***constante gravitacional*** κ, definida como:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2{,}07 \times 10^{-43}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{s}^2$$

- Agora, vamos lembrar que o lado esquerdo das equações de Einstein, é dado por uma ***curvatura***:

$$G_{\mu\nu} \leftrightarrow R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \leftrightarrow \partial\Gamma + \Gamma^2 \qquad \Rightarrow \left[G_{\mu\nu}\right] = \mathrm{m}^{-2}$$

- O lado direito das equações, por outro lado, contém:

$$T_{\mu\nu} \leftrightarrow \frac{E}{V} \qquad \Rightarrow \left[T_{\mu\nu}\right] = \frac{\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{\mathrm{m^3}} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$$

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu}}$$

NATUREZA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

- Vamos olhar para a parte "dinâmica" das equações:

$$G_{\mu\nu} \longleftrightarrow R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \longleftrightarrow \partial\Gamma + \Gamma^2 \longleftrightarrow \partial^2 g$$

- Portanto, as equações de Einstein nos dizem que:

$\partial^2 g \sim \kappa \times \{\rho, \ldots\}$, ou equivalentemente , $\text{curvatura} \sim \kappa \times (\text{densidade})$

- Portanto, a relação entre os ***campos (métrica)*** e as ***fontes (matéria)*** se dão em termos de ***equações de 2ª ordem*** (no tempo e no espaço), tal como no Eletromagnetismo! Por exemplo:

$\Box A_\mu \sim J_\mu$, onde o D'Alembertiano (operador da Eq. Onda) é $\Box = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = D^\mu D_\mu$

- Em outras palavras: as Equações de Einstein são **equações hiperbólicas**, ou seja, equações diferenciais a derivadas parciais, de 2ª ordem ($\partial^2 g$). (Porém, ao contrário das Equações de Maxwell, as Equações de Einstein ***não são lineares*** nos campos!)

- Matematicamente, isso significa que essas equações têm soluções unívocas que podem ser obtidas por meio de soluções de um problema "normais", determinados através de ***condições iniciais***.

- De um modo mais formal: para equações hiperbólicas o ***problema de Cauchy*** pode ser resolvido ***localmente***, dado um conjunto de condições iniciais que contém apenas os valores dos campos (g) e suas primeiras derivadas (∂g) numa determinada região.

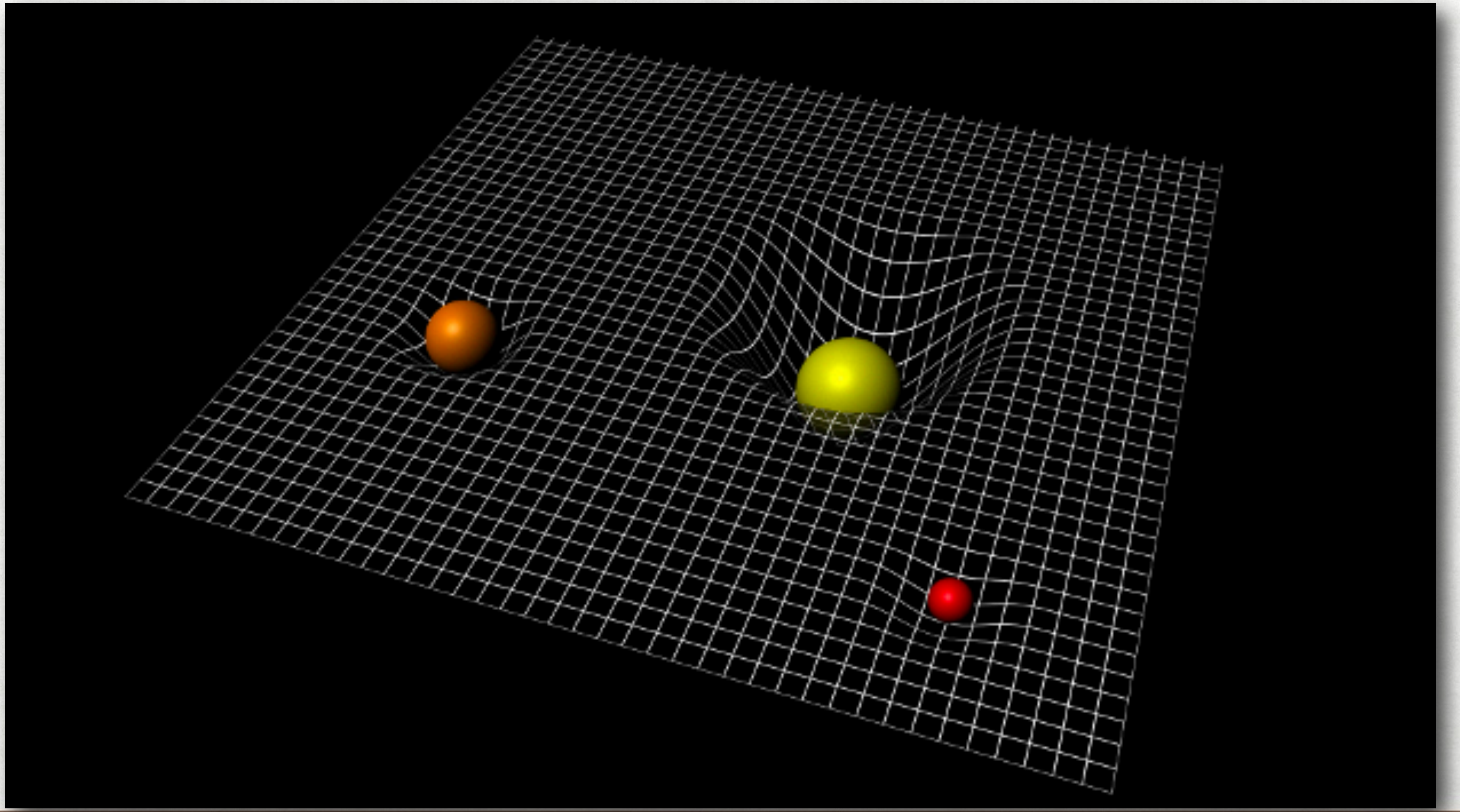
NATUREZA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

- Mas como a matéria afeta a métrica? Muito, ou pouco?...

$$\partial^2 g \sim \kappa \times \{\rho, \ldots\}$$

- Note que $\kappa = 2{,}07 \times 10^{-43}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{s}^2$, ou seja: κ é ***muito pequena***!

- Isso significa que é necessário **muita matéria** (e/ou matéria ***muito concentrada***) para alterar ("curvar") um ***pouquinho*** a métrica. Lembre-se que, mesmo na superfície de um planeta ou estrela, $g_{00} \simeq -1 - 2\Phi/c^2 \simeq -1 - \mathcal{O}\left(10^{-10} - 10^{-15}\right)$!



NATUREZA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

- Em particular, suponha que não temos nenhuma matéria, ou seja, vácuo, $T_{\mu\nu} \to 0$. Nesse caso as Equações de Campo de Einstein nos dizem que:

$$G_{\mu\nu} = 0$$

- Isso é equivalente a dizer que:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad R^{\alpha}_{\ \mu\alpha\nu} = 0$$

- Mas se todas as componentes do tensor de Riemann se anulam, então uma solução dessas equações (em coordenadas cartesianas) é simplesmente a métrica de… Minkowski !

- Digamos que, num referencial y obtemos a métrica de Minkowski como solução das Equações de Einstein. Note que, mesmo se efetuarmos uma ***transformação de coordenadas*** para um referencial arbitrário (que pode até ser acelerado!), ***ainda assim*** o tensor de Riemann vai se anular. Ou seja, existem muitas (infinitas!) métricas relacionadas com a métrica de Minkowski, ***globalmente*** (em todo o espaço-tempo), por meio de uma transformação:

$$y \to x \quad : \quad g_{\mu\nu}[x] = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}[y]$$

$$\Longrightarrow \quad R^{\lambda}_{\ \mu\sigma\nu}[x] = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\eta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} R^{\gamma}_{\ \alpha\eta\beta}[y] = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\eta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \times 0 = 0 \quad !!!$$

NATUREZA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

- A métrica de Minkowski é "única" enquanto solução das Equações de Maxwell no vácuo?
- Não (num sentido mais "ingênuo").
- Digamos que, num referencial y obtemos a métrica de Minkowski como solução das Equações de Einstein. Note que, mesmo se efetuarmos uma ***transformação de coordenadas*** para um referencial arbitrário (que pode até ser acelerado!), ***ainda assim*** o tensor de Riemann vai se anular.
- Ou seja, existem muitas (infinitas!) métricas que são soluções de vácuo das Equações de Einstein.
- Mas essas métricas são, no fundo, a métrica de Minkowski, escrita num outro referencial, através das transformações ***globais***:

$$y \to x \quad : \quad g_{\mu\nu}[x] = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}[y] \quad ,$$

$$\Longrightarrow \quad R^{\lambda}_{\ \mu\sigma\nu}[x] = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\eta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}R^{\gamma}_{\ \alpha\eta\beta}[y] = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\eta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\times 0 = 0 \quad !!!$$

NATUREZA DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

- Finalmente, vamos voltar às equações de Einstein e considerar a consistência (ou "integrabilidade") dessas equações. Como comparação, vamos novamente nos recordar do Eletromagnetismo:

$$D_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad \Longleftrightarrow \quad D_\mu D_\alpha F^{\alpha\mu} = 0 \quad , \quad D_\mu J^\mu = 0$$

- Na Relatividade Geral, temos que, pela Identidade de Bianchi:

$$G^{\alpha\mu} = \kappa T^{\alpha\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad D_\mu G^{\alpha\mu} = 0 \quad , \quad \boxed{D_\mu T^{\alpha\mu} = 0}$$

- Mas de onde veio essa última condição?

$$D_\mu T^{\alpha\mu} = 0 \qquad \text{"}\textit{Conservação de energia-momento}\text{"}$$

- Nesta aula vamos ver como o Tensor de Energia-momento surge naturalmente quando promovemos a ***invariância por transformações de coordenadas*** a uma ***simetria fundamental*** — a ***simetria de Gauge*** das teorias covariantes da gravitação (dentro as quais se inclui a Relatividade Geral).

LEIS DE CONSERVAÇÃO

- Um dos conceitos mais profundos de toda a Física é a relação entre

Simetrias $\Longleftrightarrow$ Leis de Conservação

conhecida como ***Teorema de Noether***.

- Na Física "clássica" (incl. Relatividade Restrita), temos, por exemplo:

Invariância por translações temporais $\Longleftrightarrow$ Conservação de Energia

Invariância por translações espaciais $\Longleftrightarrow$ Conservação de Momento

Invariância por rotações $\Longleftrightarrow$ Conservação de Momento Angular

LEIS DE CONSERVAÇÃO

- Conservação de energia de uma partícula (não-relativística). Vamos começar com a ação:

$$S = \int dt\, L(q, \dot{q}) \qquad , \qquad L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$$

- Translação temporal:

$$t \to t + \delta t(t)$$

$$q(t) \to q(t + \delta t) = q(t) + \underbrace{\boxed{\dot{q}\,\delta t}}_{\delta q} + \dots$$

$$\dot{q}(t) \to \dot{q}(t + \delta t) = \frac{d}{dt}\left(q(t) + \dot{q}\,\delta t + \dots\right) = \dot{q}(t) + \underbrace{\boxed{\ddot{q}\,\delta t + \dot{q}\,\delta\dot{t}}}_{\delta\dot{q}} + \dots$$

- Inserindo isso na ação e calculando a sua variação, temos:

$$\delta S = \int dt\, \delta L(q, \dot{q}) = \int dt\, \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)$$

$$= \int dt\, \left[-\frac{dV}{dq}\dot{q}\delta t + \dot{q}\left(\ddot{q}\delta t + \dot{q}\delta\dot{t}\right)\right]$$

$$= \int dt\, \left[-\frac{dV}{dq}\dot{q}\delta t + \dot{q}\ddot{q}\delta t + \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^2\delta t\right) - 2\dot{q}\ddot{q}\delta t\right] = -\int dt\, \dot{q}\delta t\left[\frac{dV}{dq} + \ddot{q}\right] + \left(\dot{q}^2\delta t\right)_i^f$$

LEIS DE CONSERVAÇÃO

- Portanto, pelo ***princípio variacional*** temos que, na trajetória física:

$$0 = \delta S = -\int dt \, \frac{d}{dt}\left[V + \frac{1}{2}\dot{q}^2\right] \delta t$$

- Definindo a ***energia*** $E = \dfrac{1}{2}\dot{q}^2 + V$, essa quantidade é ***conservada*** se o sistema for ***invariante*** por uma ***translação temporal*** δt.

- O mesmo cálculo pode ser feito para a ação de um ***sistema de partículas em Minkowski***, e o resultado é que:

  invariância por $x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu$

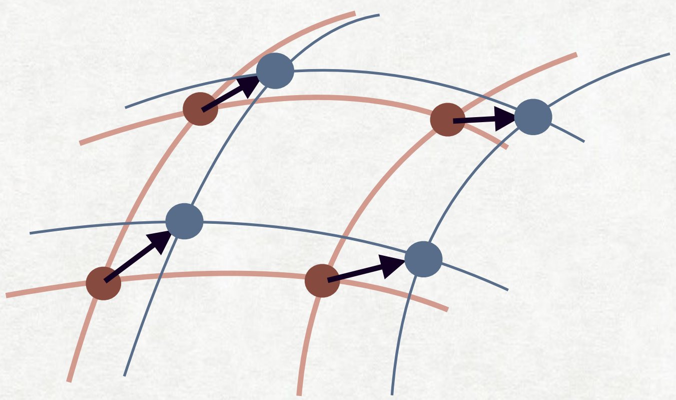
  ➟ invariância do 4-momento, $P^\mu_{Tot} = \sum_i P^\mu_i = \sum_i m_i \, U^\mu_i$

LEIS DE CONSERVAÇÃO

- Vamos agora ver no que resulta essa mesma invariância, mas agora num espaço-tempo ("variedade") qualquer.

- O que caracteriza uma variedade é a sua ***métrica***, $g_{\mu\nu}$. Sob uma ***translação geral***, $x \to x' = x + \xi$:

$$x^\sigma \to x'^\sigma = x^\sigma + \epsilon\xi^\sigma \quad , \quad \xi^\sigma = \xi^\sigma[x]$$



a métrica se transforma como:

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, g_{\alpha\beta}$$

- Equivalentemente, a métrica em componentes contravariantes se transforma como:

$$g^{\mu\nu} \to g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\, g^{\alpha\beta}$$

- Agora, lembre-se que ξ^σ é uma **translação**, portanto $g'^{\mu\nu} = g'^{\mu\nu}(x'^\sigma) = g'^{\mu\nu}(x^\sigma + \epsilon\xi^\sigma)$, e que:

$$\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\alpha} = \ \delta^\sigma_\mu + \epsilon\xi^\sigma{}_{,\mu}$$

$$\Rightarrow \ g'^{\mu\nu}(x^\sigma) + \epsilon g'^{\mu\nu}{}_{,\sigma}\,\xi^\sigma + \ldots \ = \ \left(\delta^\mu_\alpha + \epsilon\xi^\mu{}_{,\alpha}\right)\left(\delta^\nu_\beta + \epsilon\xi^\nu{}_{,\beta}\right) g^{\alpha\beta} \ = \ \left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta + \delta^\mu_\alpha\epsilon\xi^\nu{}_{,\beta} + \delta^\nu_\beta\epsilon\xi^\mu{}_{,\alpha} + \ldots\right) g^{\alpha\beta}$$

LEIS DE CONSERVAÇÃO

- Portanto, obtivemos que:

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x^\sigma) + \epsilon g'^{\mu\nu}{}_{,\sigma}\,\xi^\sigma + \ldots \; &= \; \left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + \delta^\mu_\alpha \epsilon \xi^\nu{}_{,\beta} + \delta^\nu_\beta \epsilon \xi^\mu{}_{,\alpha} + \ldots\right) g^{\alpha\beta} \\ &= \; g^{\mu\nu} + \epsilon \left(g^{\mu\beta}\xi^\nu{}_{,\beta} + g^{\alpha\nu}\xi^\mu{}_{,\alpha}\right) + \ldots \end{aligned}$$

- Mas como $\epsilon g'^{\mu\nu}{}_{,\sigma} = \epsilon g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, até ordem primeira ordem em ϵ temos que:

$$\Rightarrow \quad g'^{\mu\nu}[x] \; = \; g^{\mu\nu} + \epsilon \left(g^{\mu\beta}\xi^\nu{}_{,\beta} + g^{\alpha\nu}\xi^\mu{}_{,\alpha} - g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}\xi^\sigma\right) + \ldots$$

- Agora, use a relação entre as derivadas da métrica e as conexões, é fácil mostrar que a expressão acima pode ser expressa como:

$$\Rightarrow \quad g'^{\mu\nu}[x] \; = \; g^{\mu\nu} + \epsilon \left(\xi^{\nu\,;\mu} + \xi^{\mu\,;\nu}\right) + \ldots$$

- [Por sinal, note que, como $g'^{\mu\alpha} g'_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \quad \Rightarrow \quad g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon(\xi_{\mu\;\nu} + \xi_{\nu\;\mu}) + \ldots$]

- Portanto, o resultado obtido acima mostra que, ***sob uma translação*** espaço-temporal a métrica se transforma como:

$$g^{\mu\nu} \to g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \epsilon\, \delta_\xi g^{\mu\nu} \qquad , \qquad \text{onde} \qquad \delta_\xi g^{\mu\nu} = \xi^{\nu\,;\mu} + \xi^{\mu\,;\nu}$$

LEIS DE CONSERVAÇÃO

- Agora podemos fazer a pergunta-chave neste contexto:

Pergunta:

Qual a **quantidade ("corrente") conservada** devido à simetria $g^{\mu\nu} \to g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \epsilon\, \delta_\xi g^{\mu\nu}$?

Resposta:

O **tensor de energia e momento** da matéria!

O TENSOR DE ENERGIA E MOMENTO

- Vamos agora **provar** essa Lei de Conservação, e encontrar esse objeto. Começamos com uma Lagrangeana e uma ação para a matéria:

$$0 = \delta_\xi S_{Mat} = \int d^4x \, \delta_\xi \left(\sqrt{-\det g} \, \mathscr{L}_{Mat} \right)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{\partial \left(\sqrt{-\det g} \, \mathscr{L}_{Mat} \right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \cancel{\frac{\partial \left(\sqrt{-\det g} \, \mathscr{L}_{Mat} \right)}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})}} \right] \delta_\xi g^{\mu\nu}$$

- Mas pela definição que fizemos na última aula, temos:

$$\frac{\partial \left(\sqrt{-\det g} \, \mathscr{L}_{Mat} \right)}{\partial g^{\mu\nu}} \equiv -\frac{\sqrt{-\det g}}{2} T_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \delta_\xi S_{Mat} = \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-\det g}}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta_\xi g^{\mu\nu}$$

O TENSOR DE ENERGIA E MOMENTO

- Portanto, usando o ***princípio variacional*** e a definição da variação da métrica induzida pela translação, $\delta_\xi g^{\mu\nu} = \xi^{\nu\,;\mu} + \xi^{\mu\,;\nu}$, temos que:

$$0 = -\frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-\det g}\, T_{\mu\nu}\left(\xi^{\nu\,;\mu} + \xi^{\mu\,;\nu}\right)$$

- Como o tensor $T_{\mu\nu}$ é ***simétrico***, a expressão acima é idêntica a:

$$0 = -\frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-\det g}\; 2\, T_{\mu\nu}\, \xi^{\mu\,;\nu} = -\frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-\det g}\; 2\, T^{\mu\nu}\, \xi_{\mu\,;\nu}$$

- Mas agora note que:

$$T^{\mu\nu}\,\xi_{\mu\,;\nu} = T^{\mu\nu} D_\nu \xi_\mu = D_\nu \left(T^{\mu\nu}\,\xi_\mu\right) - \left(D_\nu T^{\mu\nu}\right)\,\xi_\mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\det g}}\partial_\nu \left(\sqrt{-\det g}\, T^{\mu\nu}\,\xi_\mu\right) - T^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}\,\xi_\mu$$

O TENSOR DE ENERGIA E MOMENTO

- Portanto, obtemos pelo princípio da invariância da ação sob uma translação resulta em:

$$0 = -\int d^4x \sqrt{-\det g}\; T^{\mu\nu}\, \xi_{\mu\,;\nu}$$

$$= -\int d^4x \sqrt{-\det g}\; \left[\frac{1}{\sqrt{-\det g}}\partial_\nu \left(\sqrt{-\det g}\, T^{\mu\nu}\, \xi_\mu\right) - T^{\mu\nu}_{\;\;\;;\nu}\, \xi_\mu\right]$$

- Mas o primeiro termo acima é uma derivada total, logo:

$$0 = -\int d^4x\, \partial_\nu \cancel{\left(\sqrt{-\det g}\, T^{\mu\nu}\, \xi_\mu\right)} + \int d^4x \sqrt{-\det g}\; T^{\mu\nu}_{\;\;\;;\nu}\, \xi_\mu$$

- Portanto, chegamos a um resultado central: a ***conservação do tensor de energia e momento***:

$$D_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\;\;\;;\nu} = 0$$

O TENSOR DE ENERGIA E MOMENTO

- Portanto, voltando à nossa analogia com o Eletromagnetismo:

$$D_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu D_\alpha F^{\alpha\mu} = 0 \quad , \quad D_\mu J^\mu = 0$$

Identidade matemática

Conservação da 4-corrente: Equação da continuidade (1 equação

- Na Relatividade Geral, temos:

$$G^{\alpha\mu} = \kappa T^{\alpha\nu}$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu G^{\alpha\mu} = 0 \quad , \quad D_\mu T^{\alpha\mu} = 0$$

Identidade matemática (identidade de Bianchi)

Conservação do tensor de energia e momento (4 equações)

TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- Assim como a métrica e a curvatura são **campos**, a matéria é descrita não apenas por partículas mas também por campos.

- Toda forma de energia "gravita": 4-momentos de partículas pontuais, campos e interações eletromagnéticas, interações nucleares fracas e fortes etc.:

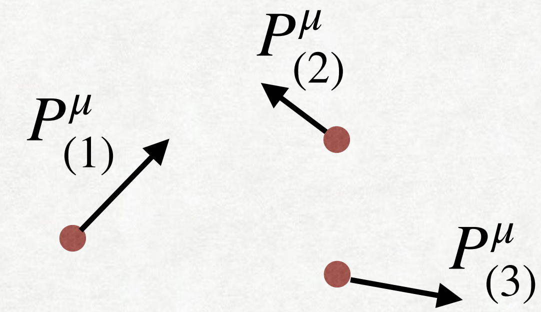
$$\rho_{Tot} = \rho_{part.} + \rho_{campos} + \rho_{inter.}$$

- Ou seja, pelas Equações de Campo de Einstein, as ***fontes*** da curvatura do espaço-tempo se parecem mais com um ***fluido***.

- Mas como descrever de um modo completo esse fluido?

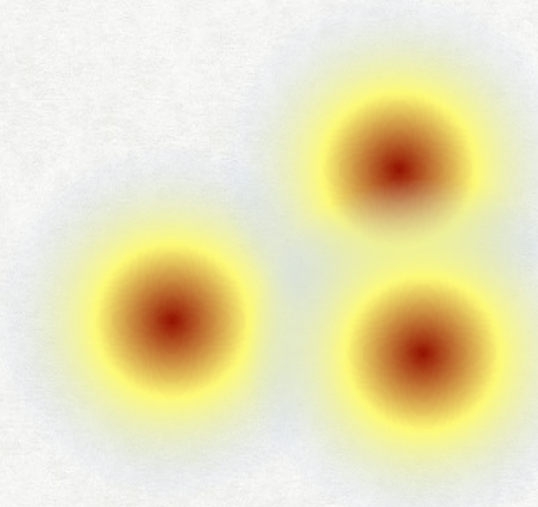
TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- Uma partícula (pontual) pode ser descrita completamente por seu ***4-momento***

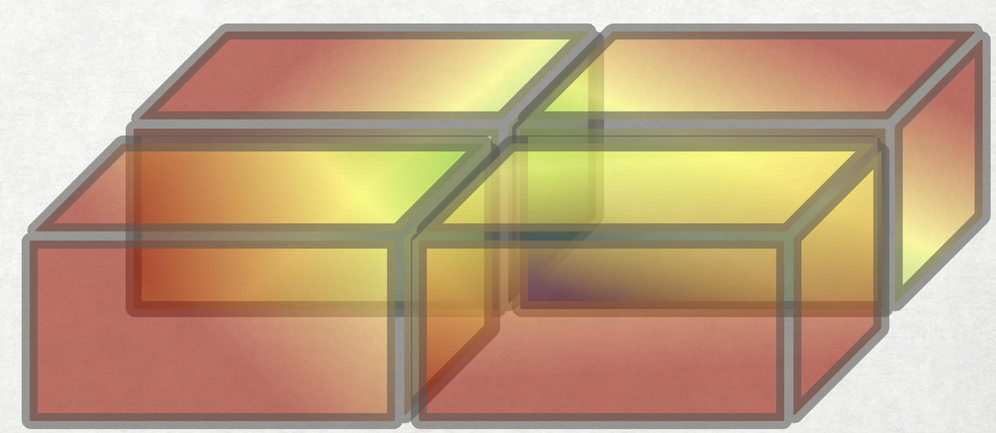


- Um ***conjunto*** de partículas sem interações também tem apenas um 4-momento:

$$P^{\mu} = \sum_{i} P^{\mu}_{(i)}$$



- Quando temos ***interações, energias potenciais*** etc., a energia e o momento não estão localizados, eles são **campos**.



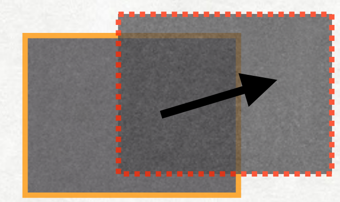
- Então, novamente a pergunta se coloca: como podemos descrever todos os **graus de liberdade** de um ***fluido***?

TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

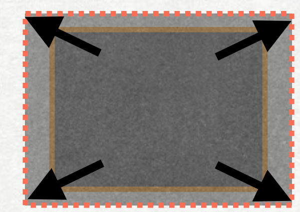
- Vamos considerar as propriedades de um ***elemento de fluido***, e como ele pode ser ***deformado***.

- Translações temporais: energia

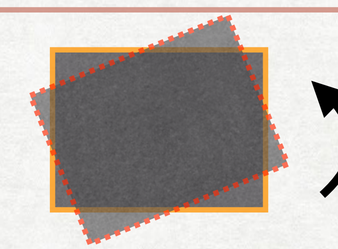
- Translações espaciais: momento/fluxo de energia



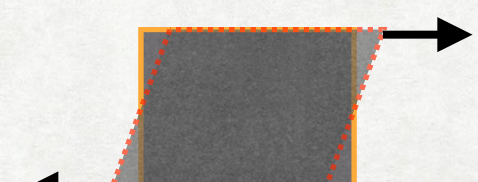
- Expansão: pressão



- Rotação: momento angular

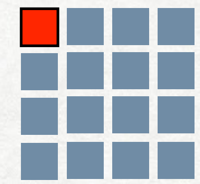
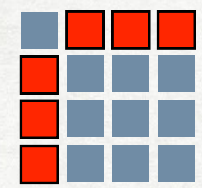
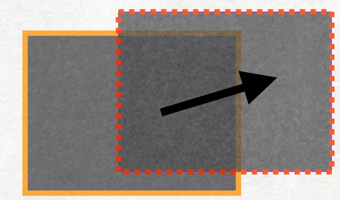
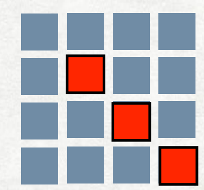
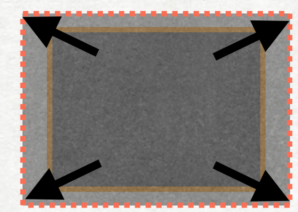
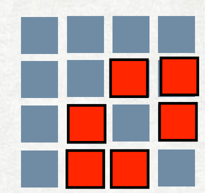
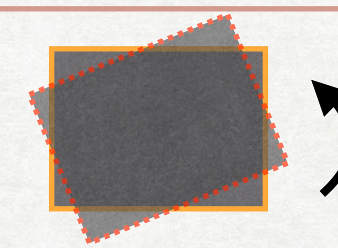
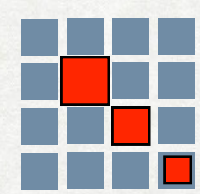
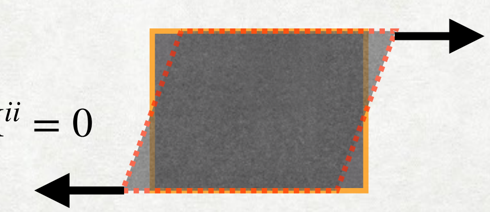


- Cisalhamento: estresse anisotrópico



TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- Todos esses graus de liberdade encontram uma expressão nas várias ***componentes*** do tensor de energia-momento:

• Energia	1	T^{00}		
• Momento/fluxo de energia	3	$T^{0i} = T^{i0}$		
• Pressão	1	T^{ii}		
• Momento angular	3	$T^{ij} \to \omega^{ij}$		
• Estresse anisotrópico	2	$T^{ij} \to \Pi^{ij}$	 $\sum_i \Pi^{ii} = 0$	

Total das componentes: 10 ✓ $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- No espaço-tempo de Minkowski, um fluido sem rotações, vorticidades nem estresses pode ser descrito da maneira mais simples possível pelas quantidades:

densidade de energia: ρ

pressão (isotrópica): p

4-velocidade do elemento de fluido: $U^\mu = \{c,0,0,0\}$

- O tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ pode ser expresso simplesmente como:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p\right) \frac{U^\mu U^\nu}{c^2} + p\,\eta^{\mu\nu}$$

- Por simetria, um fluido em movimento pode ser expresso da mesma maneira que acima, bastando substituir $U^\mu \to \gamma(v)\,\{c, \overrightarrow{v}\}$. Portanto temos:

$$T^{00} = (\rho + p)\,\gamma^2(v) + p\,(-1) = \frac{\rho + p}{1 - v^2/c^2} - p = \frac{\rho + p v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

$$T^{i0} = \frac{\rho + p}{1 - v^2/c^2}\,\frac{v^i}{c}$$

$$T^{ij} = \frac{\rho + p}{1 - v^2/c^2}\,\frac{v^i\,v^j}{c^2} + p\,\delta^{ij}$$

TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- Agora podemos nos perguntar como fica a equação para a ***conservação do tensor de energia e momento*** (ainda no espaço-tempo de Minkowski):

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \;\rightarrow\; \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

- Vamos então escrever todas as componentes da equação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$:

$$\Rightarrow\; 0 = \partial_\mu T^{\mu\,0} = \frac{\partial}{\partial(ct)} T^{0\,0} + \frac{\partial}{\partial x^j} T^{j\,0}$$

$$\Rightarrow\; 0 = \partial_\mu T^{\mu\,i} = \frac{\partial}{\partial(ct)} T^{0\,i} + \frac{\partial}{\partial x^j} T^{j\,i}$$

- Da primeira equação tiramos que:

$$0 = \partial_\mu T^{\mu\,0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho + p\cancel{v^2}/c^2}{1 - \cancel{v^2}/c^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\rho + p}{1 - \cancel{v^2}/c^2}\,\frac{v^i}{c}\right)$$

- Essa equação, em toda a sua glória, pode ser difícil de reconhecer. Mas vamos tomar o limite não-relativístico, em que $v/c \ll 1$. Nesse caso vários termos cancelam e obtemos:

$$\Rightarrow \quad 0 \simeq \frac{\partial}{\partial t}\rho + \overrightarrow{\nabla} \cdot \left[(\rho + p)\overrightarrow{v}\right]$$

Equação da continuidade! (Para fluidos)

TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- A Equação da Continuidade pode ser mais simplificada, notando que geralmente $\vec{\nabla}\rho \sim \vec{\nabla}p \sim \vec{v}$. Como no limite não-relativístico termos $\sim v^2$ podem ser desprezados, temos:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \left[(\rho + p)\vec{v}\right] \to \boxed{\dot{\rho} + (\rho + p)\,\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0}$$

- Mas essa equação tem uma contrapartida termodinâmica conhecida:

$$dE = -\,p\,dV$$

$$d(\rho\,V) + p\,dV = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho\,dV + V\,d\rho + p\,dV = 0 \quad \Longrightarrow \quad d\rho + (\rho + p)\frac{dV}{V} = 0$$

- Tomando a diferenciação com relação ao tempo, obtemos:

$$\boxed{\dot{\rho} + (\rho + p)\frac{\dot{V}}{V} = 0}$$

- Mas note que o ***elemento de volume*** de um fluido, V, aumenta ou diminui somente se parte da matéria fluir para dentro, ou para fora. Em outras palavras:

$$\frac{\dot{V}}{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dot{\rho} + (\rho + p)\,\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0}$$

TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: INTERPRETAÇÃO FÍSICA

- OK, então a componente temporal ($\nu = 0$) da equação de conservação do tensor de energia-momento nos dá:

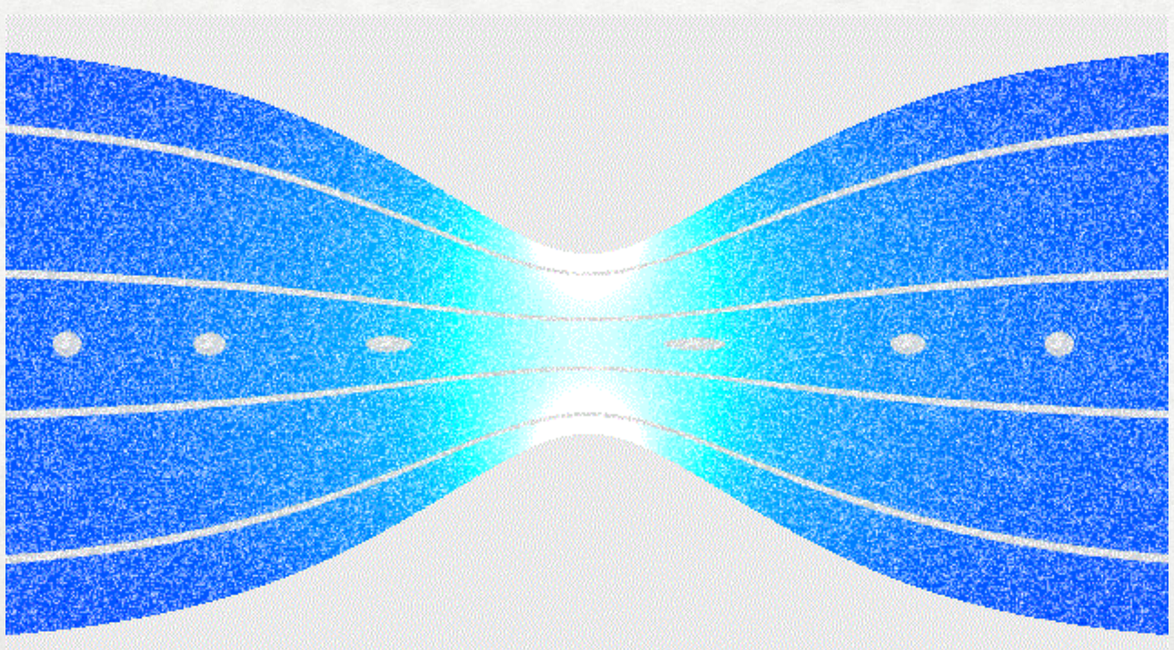
$D_\mu T^{\mu\,0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Equação da Continuidade/conservação de energia

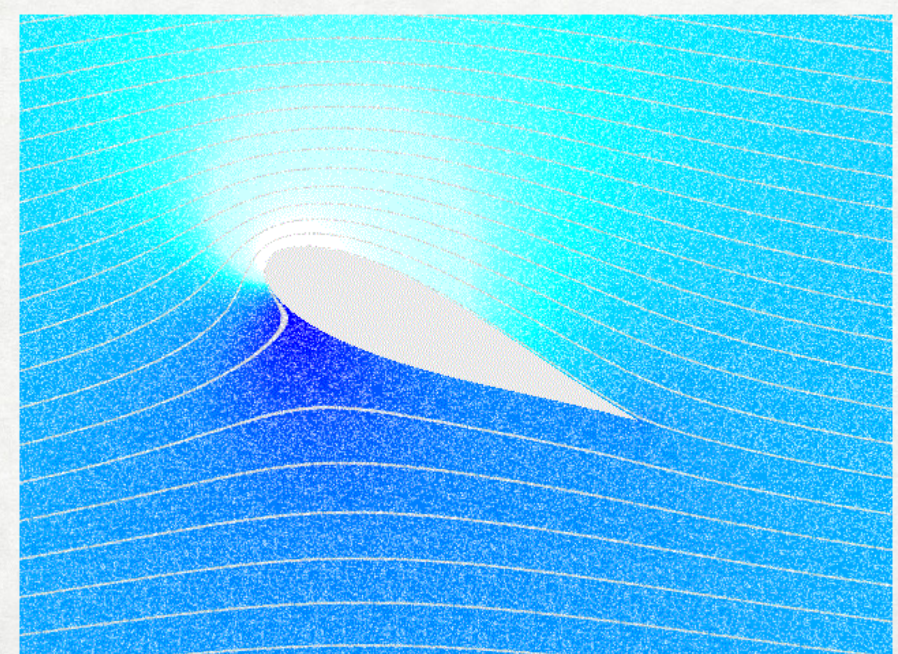
- Mas e as ***componentes espaciais*** da conservação do tensor de energia-momento?

$D_\mu T^{\mu\,i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad$???

- Vou deixar como exercício para vocês verificarem que, no limite não-relativístico, essas equações são equivalentes à ***Equação de Euler*** para a ***velocidade*** de um fluido!

$$\dot{v} \sim -\, c_s^2 \vec{\nabla} p + \ldots$$





TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO: EXEMPLOS

- Na relatividade especial vimos que o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ de um ***fluido*** irrotacional, sem vorticidade ou estresses anisotrópicos, é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + p\right) \frac{U^\mu U^\nu}{c^2} + p\, \eta^{\mu\nu}$$

- Na Relatividade Geral (ou melhor, em teorias covariantes da gravitação), a expressão é a mesma, bastando substituir $\eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$:

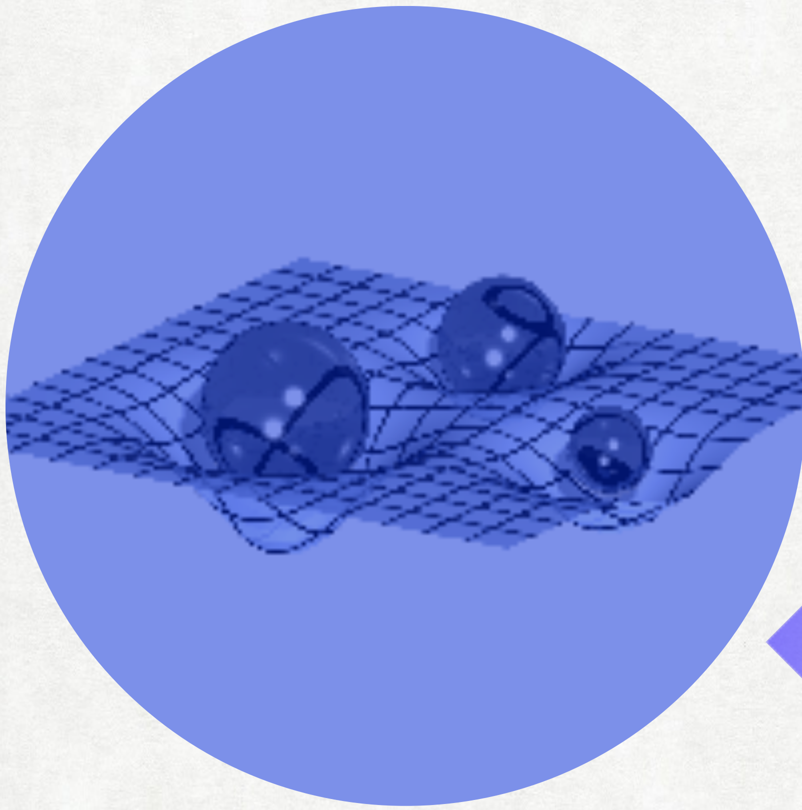
$$T^{\mu\nu}_{Fluido} = \left(\rho + p\right) \frac{U^\mu U^\nu}{c^2} + p\, g^{\mu\nu}$$

- No caso do ***Eletromagnetismo***, a expressão pode ser obtida diretamente da Lagrangeana. Para campos livres (ou seja, na ausência de matéria), o tensor é dado por:

$$T^{\mu\nu}_{EM} = g_{\alpha\beta}\, F^{\mu\alpha}\, F^{\beta\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu}\, F^{\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta}$$

<u>Exercício</u>: Verifique que $T^{00}_{EM} = \rho_{EM} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$, e que $T^{i0} = \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i$

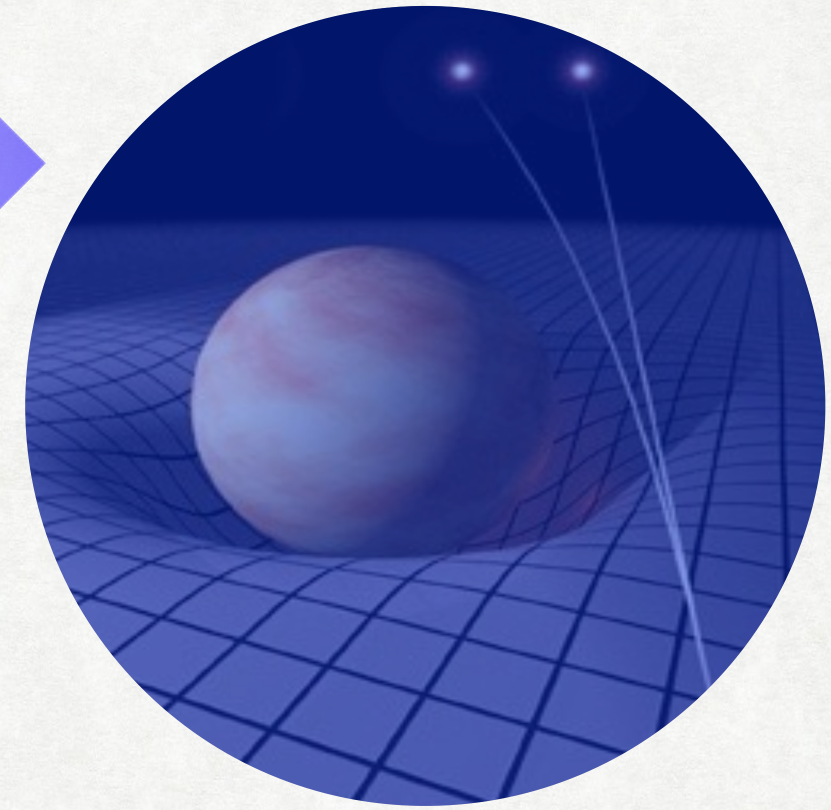
ASSIM, RETORNAMOS ÀS EQUAÇÕES DE EINSTEIN



A matéria curva o espaço-tempo, e determina a métrica...

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

... enquanto a métrica determina como a matéria se move.



No restante do curso vamos explorar as **soluções** das Equações de Campo de Einstein e suas consequências: dinâmica da matéria, observações, etc.

$$T^{\mu\nu} \xrightarrow{ECE} g_{\alpha\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} \longrightarrow x^{\mu}\,,\ U^{\mu}\,,\ \ldots$$

PARA A AULA QUE VEM:

- **Terminem a 3a lista de exercícios !**
- Leitura: S. Carroll, Capítulo 5, Seções 5.1-5.4