PMR5026
Método dos Elementos Finitos Lienar

ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

Larissa Driemeier

CRONOGRAMA TEORIA

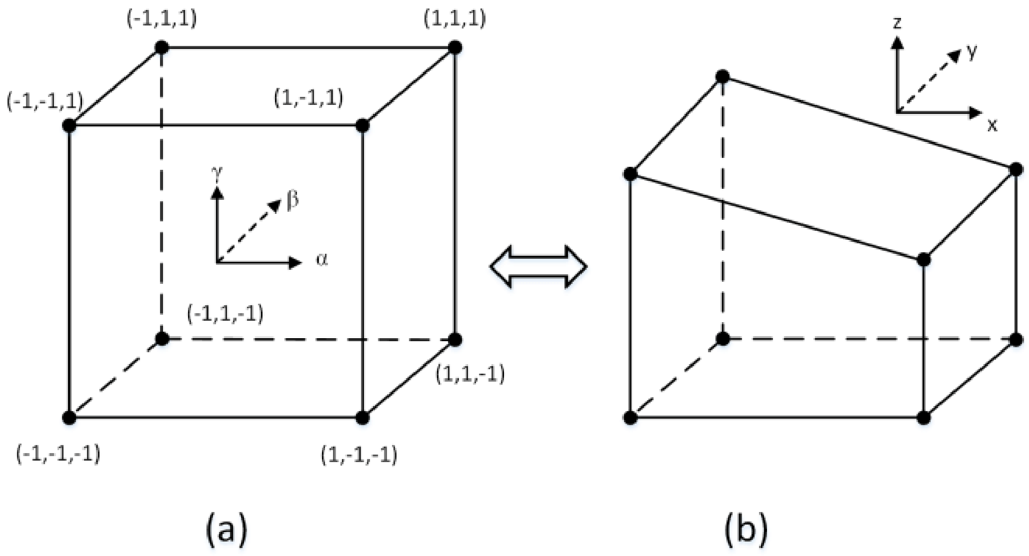
AULA	CONTEÚDO	DATA [2ª]	PROFESSOR
1	Modelagem em engenharia e Mecânica dos Sólidos Introdução ao Método dos Elementos Finitos	17/2	Rafael
2	Elementos finitos 1D – estático Ensaios experimentais e modelos de material	02/3	Rafael
3	Elementos finitos 1D - dinâmico	09/3	Marcilio
4	Elementos Finitos de viga - estático	16/3	Marcilio
5	Elementos Finitos de viga - dinâmico	23/3	Marcilio
6	Elementos Finitos de viga - análise modal	30/3	Marcilio
7	Ensaio experimental: vibrações em viga	13/4	Rafael
8	Elementos finitos isoparamétricos – estático	27/4	Larissa
9	Elementos finitos isoparamétricos – Integração numérica	04/05	Larissa
10	Elementos finitos isoparamétricos – dinâmico	11/05	Larissa
11	Ensaio experimental: vibrações em placa	18/05	Rafael

SOLUÇÃO ISOPARAMÉTRICA

- O maior avanço na implementação do MEF foi o desenvolvimento de um elemento isoparamétrico com capacidades para modelar problemas com geometrias de qualquer forma e tamanho.
- A ideia principal está no ***mapeamento***:
  - O elemento da estrutura real é *mapeado* para um elemento *imaginário* em um sistema de coordenadas ideal;
  - A solução para o problema de análise de tensão é fácil e conhecida para o elemento de *imaginário;*
  - Estas soluções são mapeados de volta para o elemento da estrutura real;
  - Todas as cargas e condições de contorno também são mapeadas a partir do real para o elemento *imaginário* nesta abordagem.

PORTANTO...

- A formulação isoparamétrica torna possível gerar elementos que não sejam retangulares e elementos curvos. A *família isoparamétrica* inclui elementos planos, sólidos, placas, cascas...
- É mais eficiente para ser implementada computacionalmente.
- Há também elementos especiais para Mecânica da Fratura.

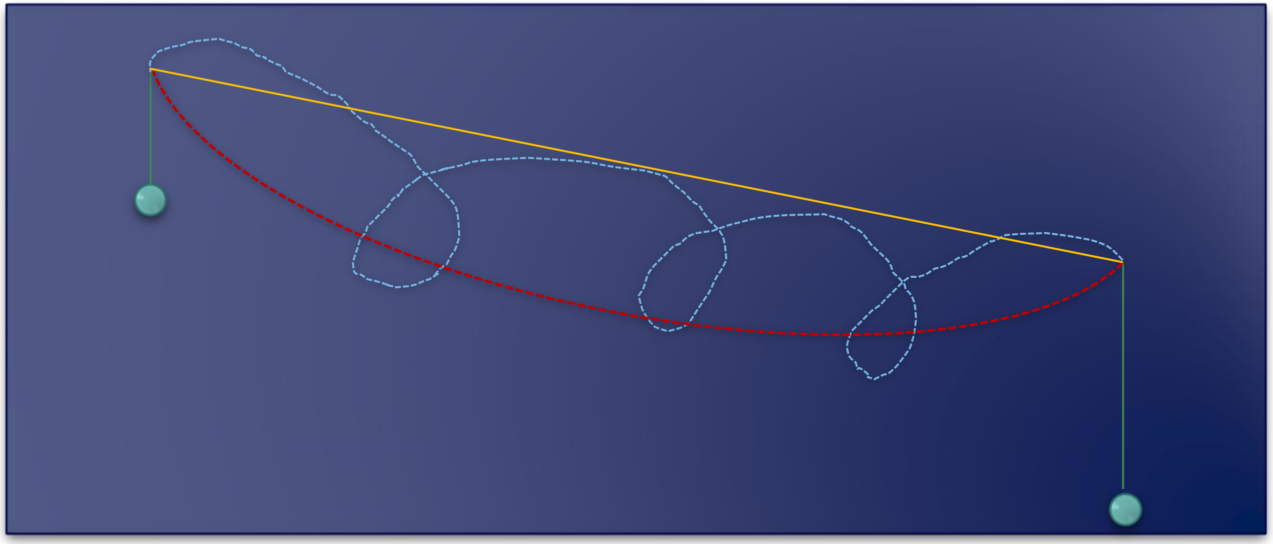


INTERPOLAÇÃO

Há duas interpolações importantes em EF

- Definição da locação dos pontos dentro do elemento, em termos de seus valores nodais (interpolação de geometria)
- Definição do deslocamento nos pontos dentro dos elementos, em termos de seus valores nodais (interpolação de resultados)

Relação entre deslocamentos/coordenadas em qualquer ponto e deslocamentos/coordenadas nos pontos nodais do elemento é obtida diretamente através das FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO OU FUNÇÕES DE FORMA, através da utilização de um ***sistema de coordenadas natural.***



PORQUE ISOPARAMÉTRICOS?

ISOPARAMÉTRICO = MESMOS PARÂMETROS

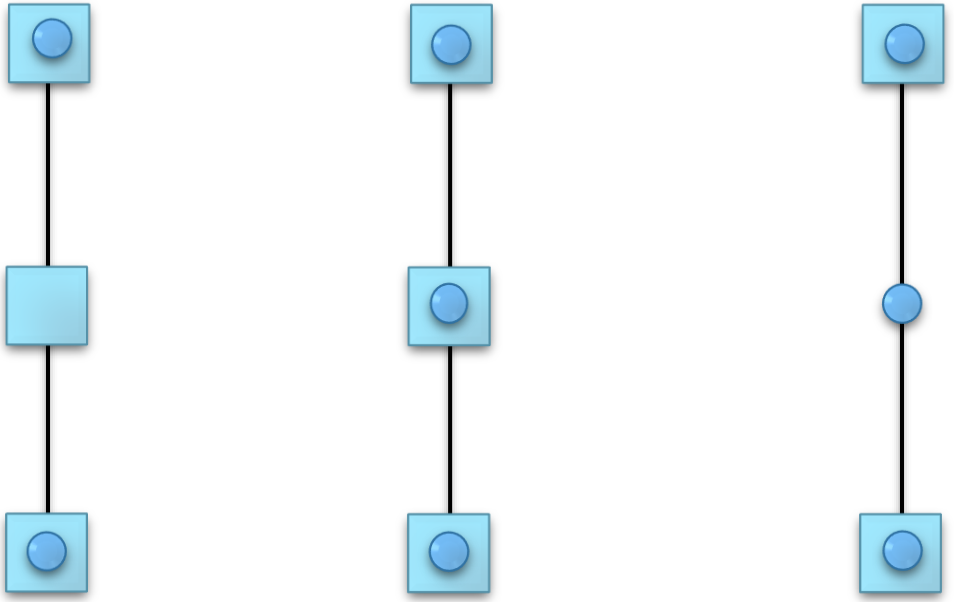
- Não há nenhuma razão fundamental para que a interpolação seja a mesma para geometria e resultados;
- Porém, para uma classe extremamente versátil de elementos, deslocamentos e Coordenadas são interpolados com as mesmas *Funções de Forma*.

$$u(x) = N(x)d$$

d: deslocamentos nodais
$\breve{x}$: coordenadas nodais

$$x = \breve{N}(x)\breve{x}$$

$N = \breve{N}$ Isoparamétrico
$N > \breve{N}$ Subparamétrico
$N < \breve{N}$ Superparamétrico



$N > \breve{N}$
subparamétrico

$N = \breve{N}$
isoparamétrico

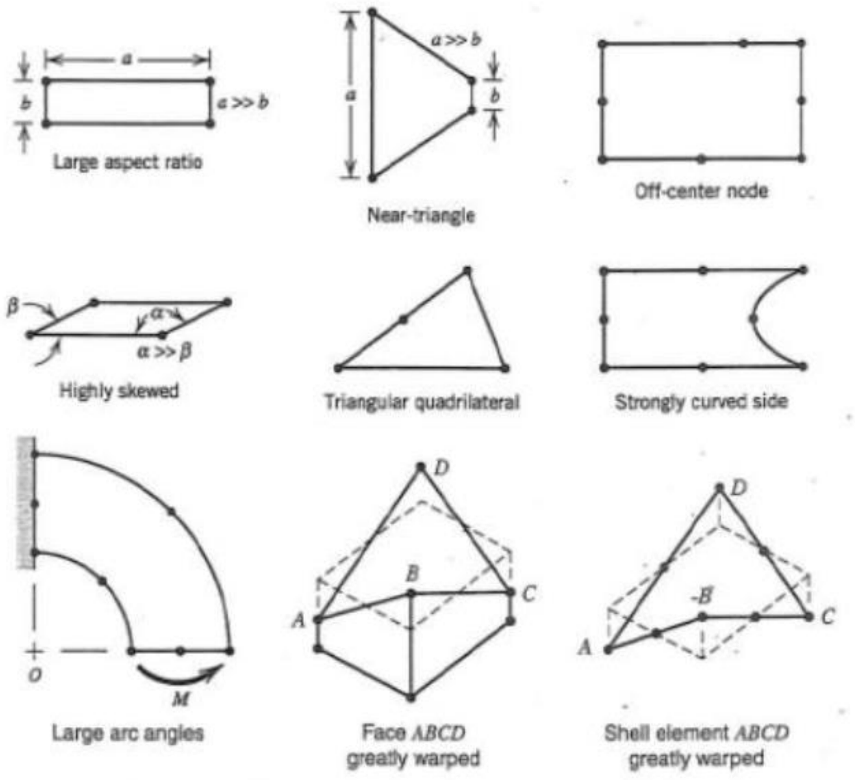
$N < \breve{N}$
superparamétrico

Ponto utilizado para aproximar geometria

Ponto utilizado para aproximar deslocamento

DILEMA

- A maior razão do MEF fazer sucesso na engenharia é a possibilidade d emodelar geometrias complexas;
- Porém, elementos dão resultados mais precisos em geometrias regulares (triângulos isósceles, quadrados);
- O software sempre terá que minimizar uma distorção quando cria a malha;
- Importante entender como as funções de forma (interpolação) são formuladas;



CONDIÇÕES

As *funções de forma* ou *interpolação* interpolam a variável em questão (coordenada/deslocamento) por meio de seus valores nos pontos nodais. Portanto, uma condição imediata que as funções de interpolação devem satisfazer é,

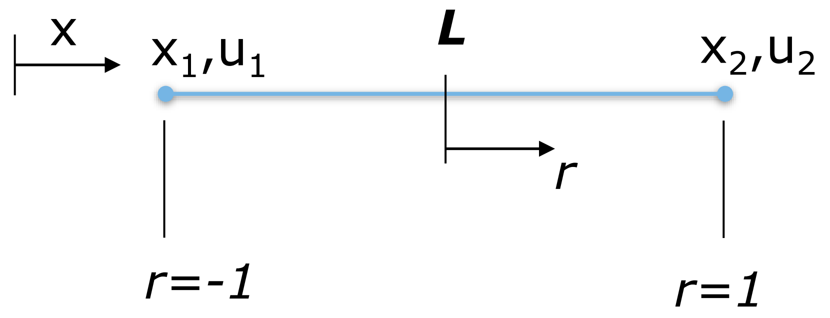
$$N_i(x) = \begin{cases} 1 & para \quad x = x_i \\ 0 & para \quad x = x_j \quad i \neq j \end{cases}$$

As *funções de deslocamento* devem garantir a existência de movimento de corpo rígido,

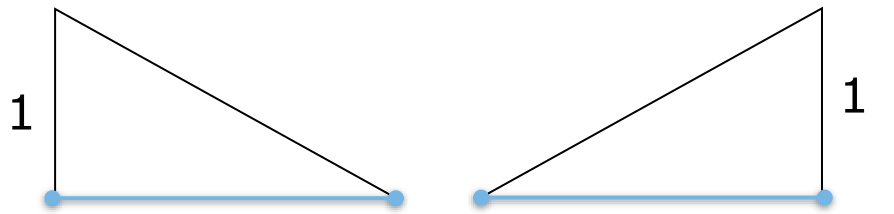
$$\mathrm{u} \cong \sum_{i=1}^{n} N_i(x) u_i = \bar{u} \sum_{i=1}^{n} N_i(x) = \bar{u} \qquad \therefore \sum_{i=1}^{n} N_i(x) = 1$$

O produto da primeira derivada das *funções de interpolação* deve ser integrável no intervalo $[xi, xj]$ do elemento para garantir que as constantes K_{ij} da matriz de rigidez possam ser obtidas da integração do produto das funções dN_i/dx e dN_j/dx.

MAPEAMENTO ISOPARAMÉTRICO 1D



r: sistema natural de coordenadas, independente do comprimento físico ***L*** da barra.



$$N_2 = \frac{1}{2}(1+r)$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-r)$$

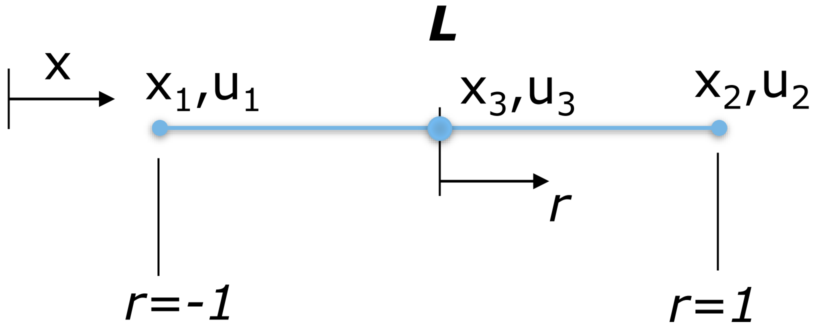
$$N = [N_1 \quad N_2]$$

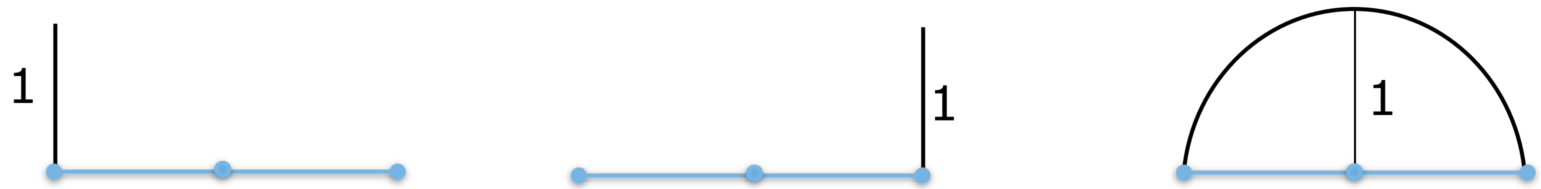
$$u(x) = \mathbf{Nd} = \sum_{i=1}^{2} N_i u_i$$

Para calcular ***u*** em um ponto qualquer da barra, substitui-se a coordenada ***r*** do ponto em ***N***.

N: funções de interpolação ou funções de forma

ELEMENTO DE 3 NÓS (QUADRÁTICO)

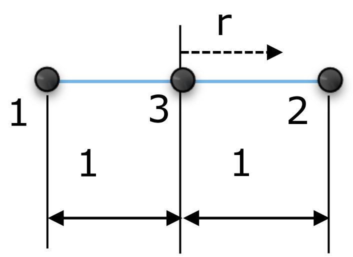


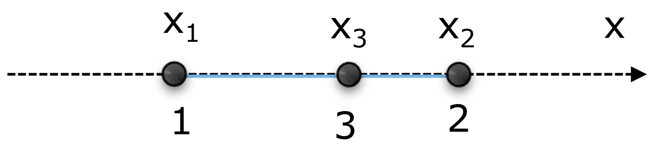


$$N_1 = r\frac{(r-1)}{2} \qquad N_2 = r\frac{(1+r)}{2} \qquad N_3 = \left(1-r^2\right)$$

$$N_1 = N_{1(2nós)} - \frac{1}{2}N_3 \qquad N_2 = N_{2(2nós)} - \frac{1}{2}N_3$$

MAPEAMENTO ISOPARAMÉTRICO 1D





Coordenadas locais (isoparamétrico)

$$N_1(r) = -\frac{r(1-r)}{2}$$

$$N_2(r) = \frac{r(1+r)}{2}$$

$$N_3(r) = 1 - r^2$$

Mapeamento isoparamétrico

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{3} N_i(r) x_i}$$

$$x = -\frac{r(1-r)}{2} x_1 + \frac{r(1+r)}{2} x_2 + \left(1 - r^2\right) x_3$$

Dado um ponto nas coordenadas isoparamétricas, posso obter o correspondente ponto traçado nas coordenadas globais usando a equação isoparamétrica de mapeamento.

$$x = -\frac{r(1-r)}{2}x_1 + \frac{r(1+r)}{2}x_2 + (1-r^2)x_3$$

$$r = -1 \rightarrow x = x_1$$

$$r = 0 \rightarrow x = x_3$$

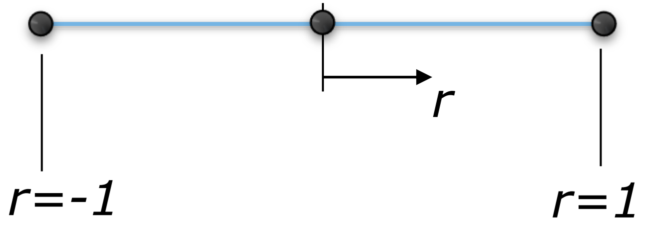
$$r = 1 \rightarrow x = x_2$$

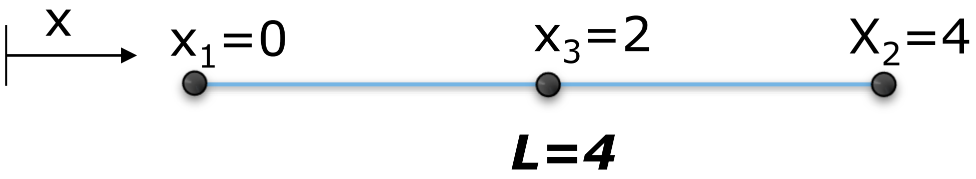
Pergunta:
x em $r = 0.5$?

$$x = -\frac{1}{8}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{7}{8}x_3$$

EXEMPLO 01 – MAPEAMENTO

- Ache o mapeamento $x(r)$ para o elemento de 3 nós abaixo:



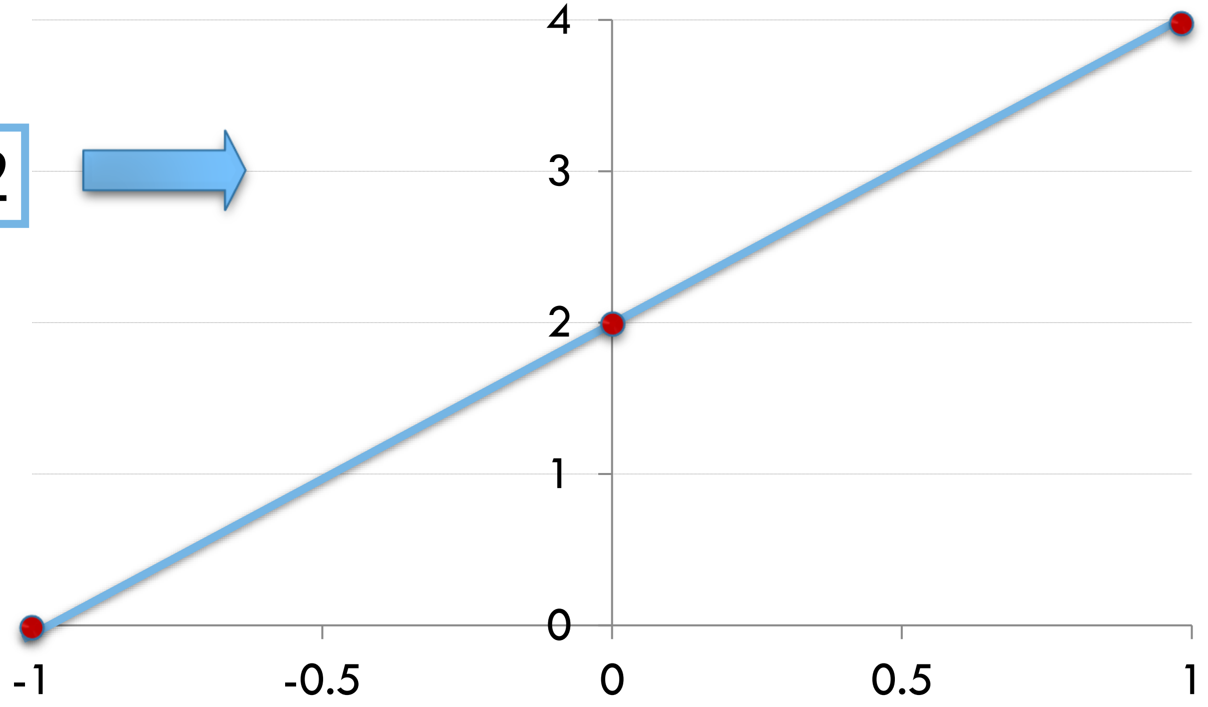


$$x = -\frac{r(1-r)}{2}x_1 + \frac{r(1+r)}{2}x_2 + (1-r^2)x_3$$

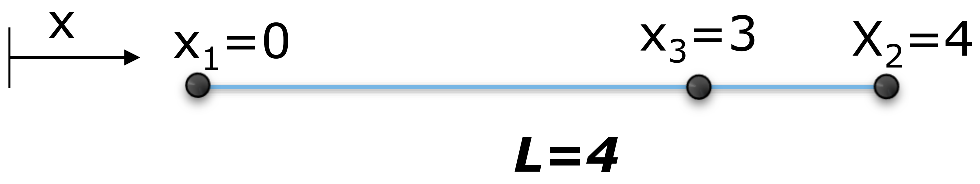
$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2$$

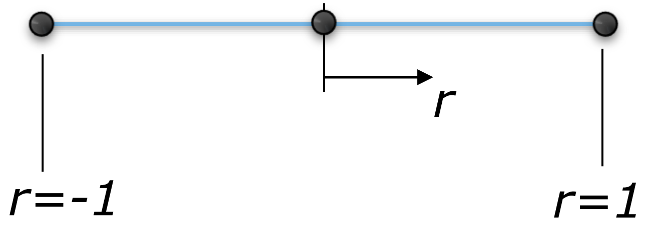
$$\boxed{x = 2r + 2}$$

r	x
-1	0
$-1/2$	1
0	2
$1/2$	3
1	4



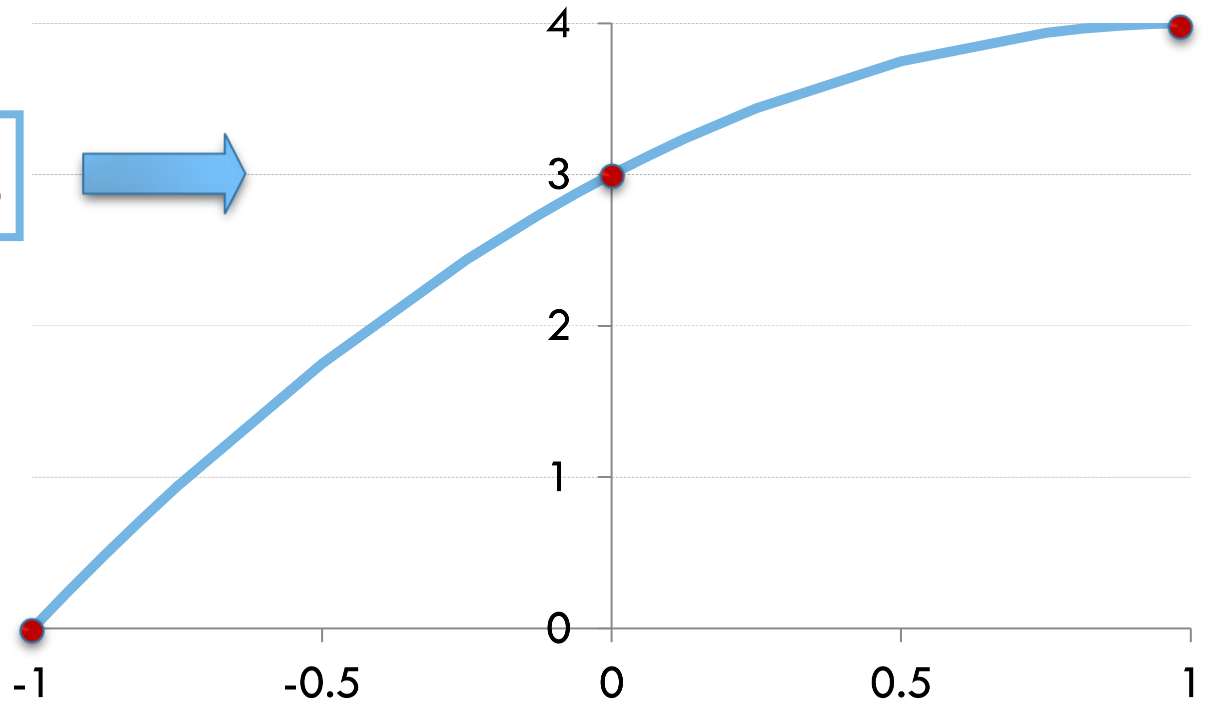
EXEMPLO 02 – MAPEAMENTO





$$x = -\frac{r(1-r)}{2}x_1 + \frac{r(1+r)}{2}x_2 + (1-r^2)x_3$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 3 \quad \boxed{x = -r^2 + 2r + 3}$$



r	x
-1	0
$-1/2$	1,75
0	3
$1/2$	3,75
1	4

ACHO QUE TEMOS UM PROBLEMA....

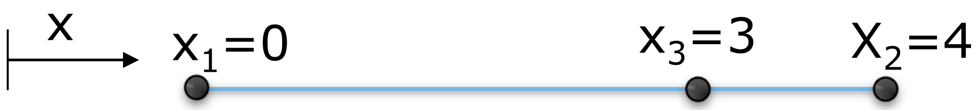
Nós conhecemos o mapeamento... $x = \sum_{i=1}^{3} N_i(r) x_i$

Porém, a matriz de rigidez é calculada como:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \; dV$$

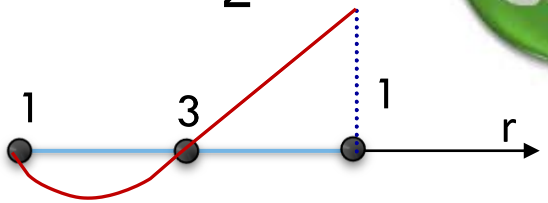
Onde: $\mathbf{B} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$

Como computar a matriz **B**???



L=4

$$N_2(r) = \frac{r(1+r)}{2}$$

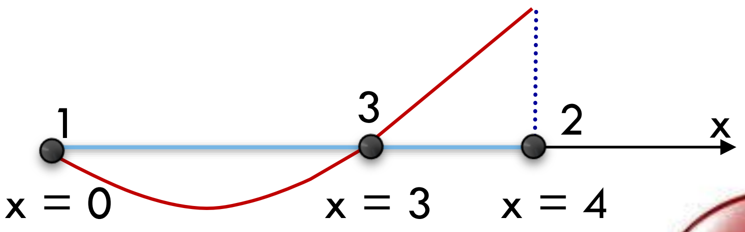


$$\boxed{x(r) = -r^2 + 2r + 3}$$

Invertendo...

$$\boxed{r = 1 - \sqrt{4-x}}$$

$N_2(x)$ é uma função complicada de x!



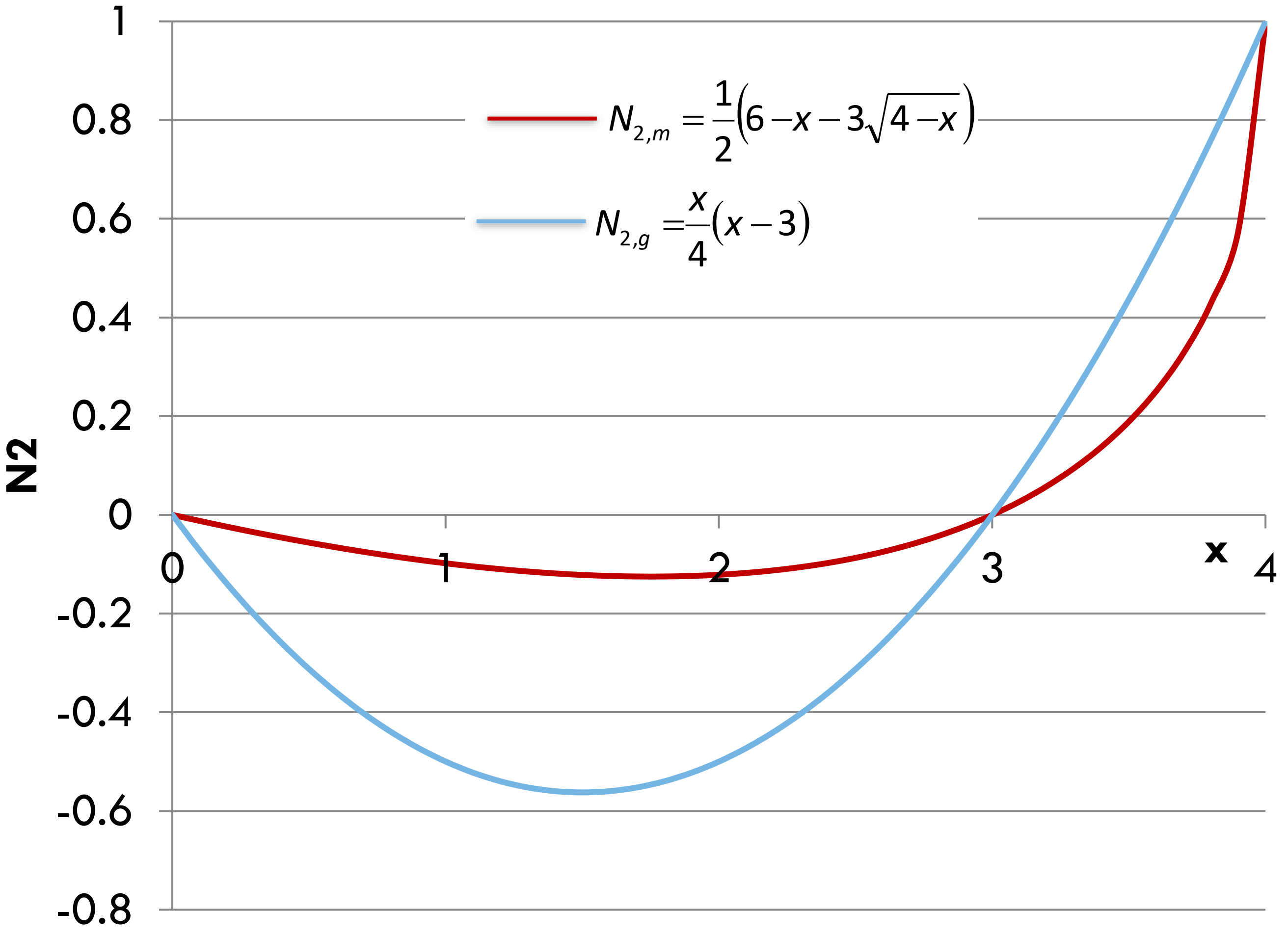
$$N_2(r) = \frac{r(1+r)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{4-x}\right)\left[1+\left(1-\sqrt{4-x}\right)\right]$$

$$N_2(x) = \frac{1}{2}\left(6 - x - 3\sqrt{4-x}\right)$$

$$\boxed{N_2(x) = \frac{1}{2}\left(6 - x - 3\sqrt{4-x}\right)}$$

FUNÇÃO DE FORMA MAPEADA X GLOBAL



RESOLVENDO O PROBLEMA!

Usando regra da cadeia

$$\frac{dN_i(r)}{dx} = \frac{dN_i(r)}{dr}\frac{dr}{dx}$$

Conheço $\frac{dN_i(r)}{dr}$?

Conheço $\frac{dr}{dx}$?

$$\frac{dN_i(r)}{dx} = \frac{dN_i(r)}{dr}\frac{dr}{dx}$$

$$\frac{dN_i(r)}{dr}\ ?$$

$$N_1 = r\frac{(r-1)}{2}$$

$$N_2 = r\frac{(1+r)}{2}$$

$$N_3 = (1-r^2)$$

Fácil...

Eu conheço: $x = \sum_{i=1}^{3} N_i(r)x_i$

$$\frac{dr}{dx}\ ?$$

Portanto:

$$\frac{dx}{dr} = \sum_{i=1}^{3}\frac{dN_i(r)}{dr}x_i = J$$

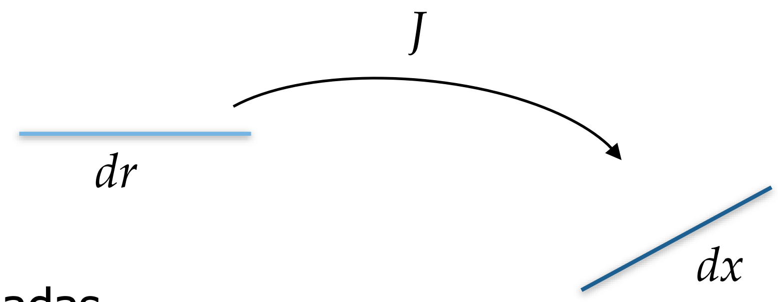
Jacobiano do mapeamento

$$\frac{dN_i(r)}{dx} = \frac{dN_i(r)}{dr}\frac{dr}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dN_i(r)}{dx} = \frac{1}{J}\frac{dN_i(r)}{dr}}$$

O que faz o Jacobiano?

$$\boxed{dx = Jdr}$$



Mapeia um elemento diferencial das coordenadas isoparamétricas para coordenadas globais

EXEMPLO: JACOBIANO

Exercício: ache a matriz B para o elemento de 3 nós:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{dN_1}{dx} & \dfrac{dN_2}{dx} & \dfrac{dN_3}{dx} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{J}\begin{bmatrix} \dfrac{dN_1}{dr} & \dfrac{dN_2}{dr} & \dfrac{dN_3}{dr} \end{bmatrix}$$

$$N_1(r) = -\frac{r(1-r)}{2}$$

$$N_2(r) = \frac{r(1+r)}{2}$$

$$N_3(r) = 1 - r^2$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

$$K = \int_{x_1}^{x_2} EAB^T B \, dx$$

$$dx = J dr$$

$$K = \int_{-1}^{1} EAB^T BJ \, dr$$

1. A integral de QUALQUER elemento nas coordenadas globais é agora uma integral de -1 to 1 nas coordenadas locais;
2. O jacobiano J entra na integral da matriz de rigidez e, geralmente, é uma função de *r*. A forma específica de J é determinada pelos valores das coordenadas x_1, x_2 e x_3 dos nós.

EXEMPLO: MATRIZ DE RIGIDEZ

Exercício: Ache a matriz de rigidez do elemento unidimensional de 2 nós:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-r) \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1+r)$$

$$K = \int_{-1}^{1} EAB^T BJ\, dr$$

J: Jacobiano relacionando o comprimento do elemento no sistema de coordenadas global com o comprimento do elemento no sistema de coordenadas natural:

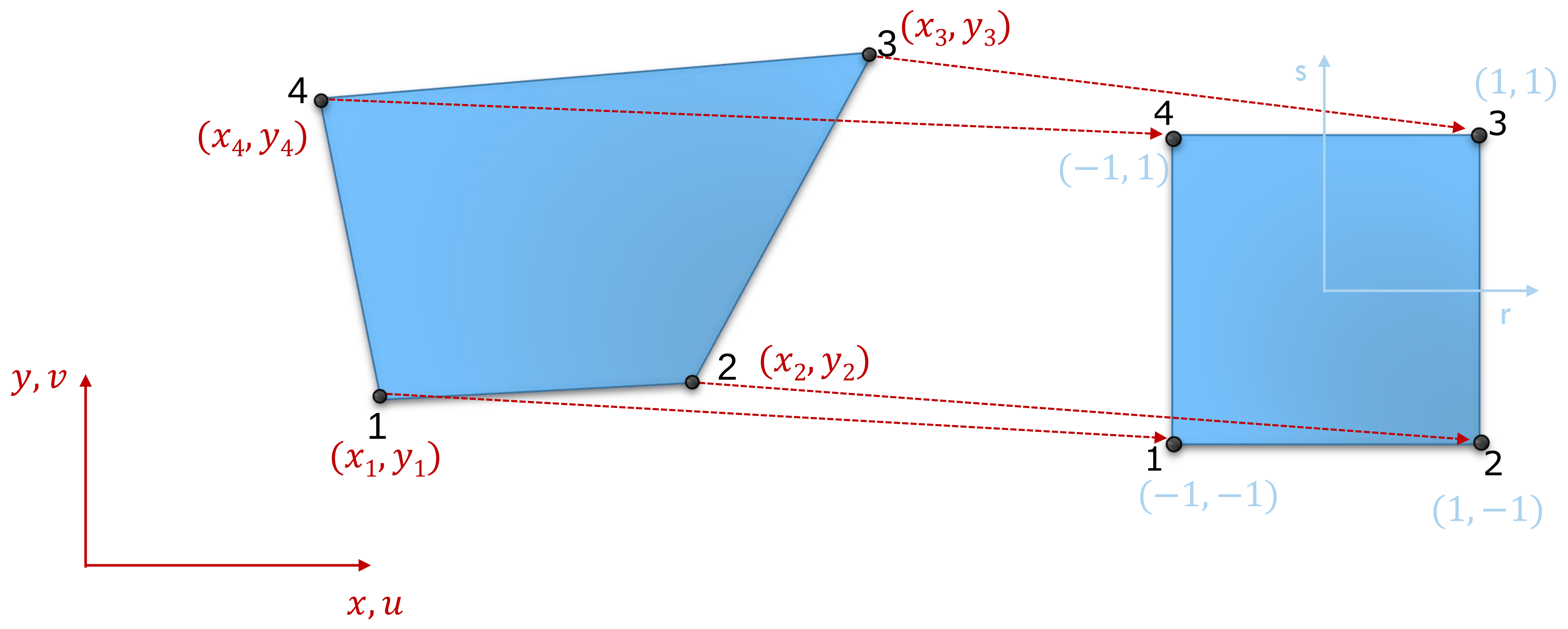
$$J = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{2}$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-r) \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1+r) \Rightarrow B = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$K = \int_{-1}^{1} EAB^T BJ\, dr \Rightarrow \boxed{K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}}$$

Veja que: $\boxed{\varepsilon = Bd = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 \\ u_2\end{bmatrix} = \frac{u_2 - u_1}{L}}$

ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO 2D
ELEMENTO RETANGULAR PLANO



PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE FORMA

- As funções de forma N_1, N_2, N_3 e N_4 são bilineares em r e s.

- Propriedade do delta de Kronecker

$$N_i(r,s) = \begin{cases} 1 & para \quad\quad x = x_i \\ 0 & para \quad x = x_j \quad i \neq j \end{cases}$$

- Completude

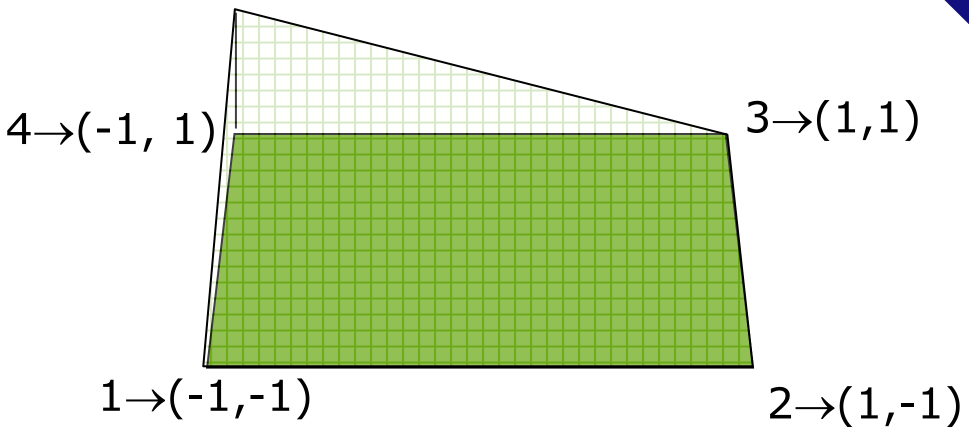
$$\sum_{i=1}^{n} N_i(r,s) = 1 \quad \sum_{i=1}^{n} N_i(r,s)x_i = x \quad \sum_{i=1}^{n} N_i(r,s)y_i = y \quad \sum_{i=1}^{n} N_i(r,s)u_i = u \quad \sum_{i=1}^{n} N_i(r,s)v_i = v$$

$$N_4 = a + br + cs + drs$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad a - b - c + d = 0 \\
&(2) \quad a + b - c - d = 0 \\
&(3) \quad a + b + c + d = 0 \\
&(4) \quad a - b + c - d = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

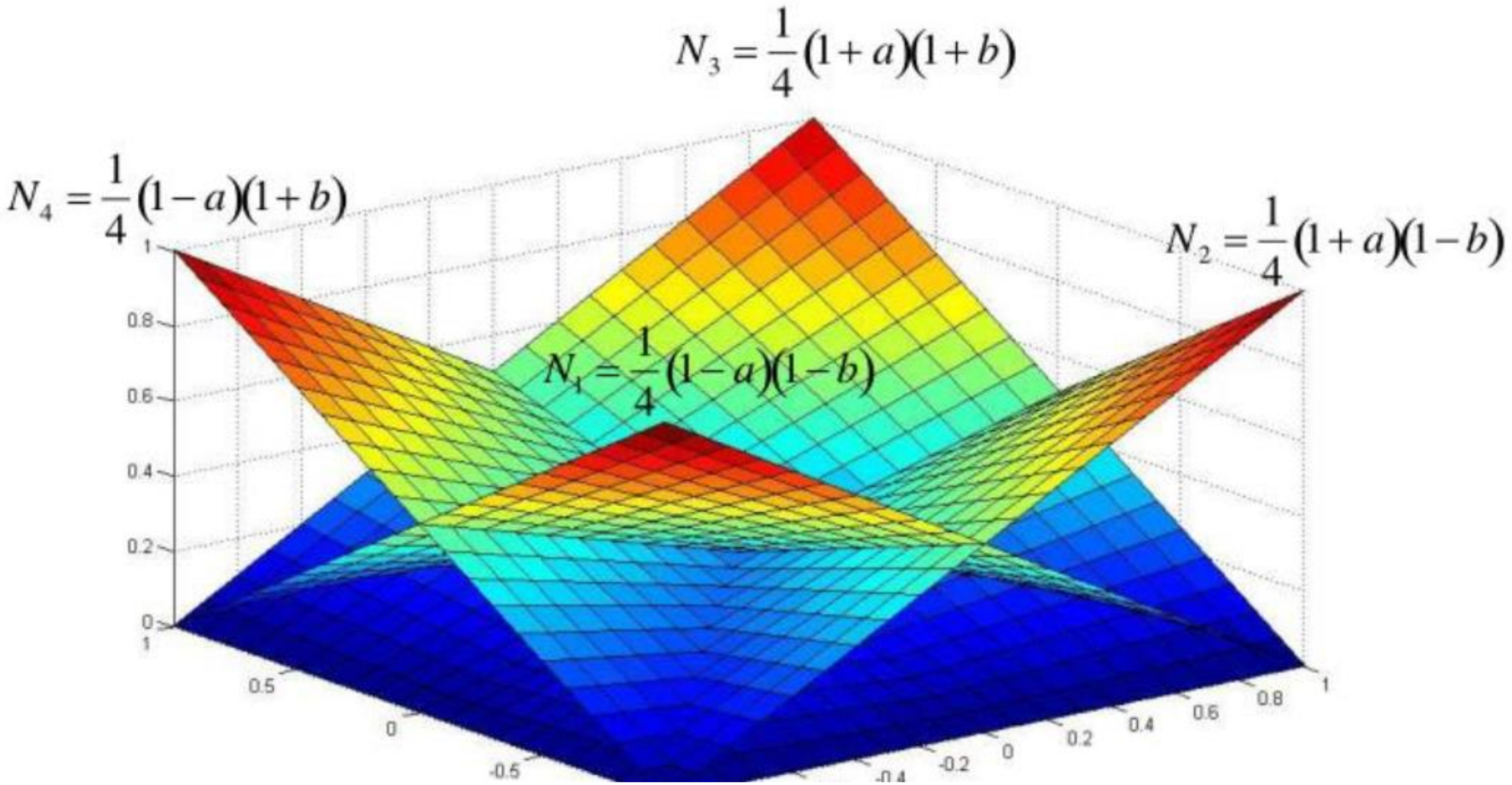
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - r + s - rs) = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)$$

Expressão geral:

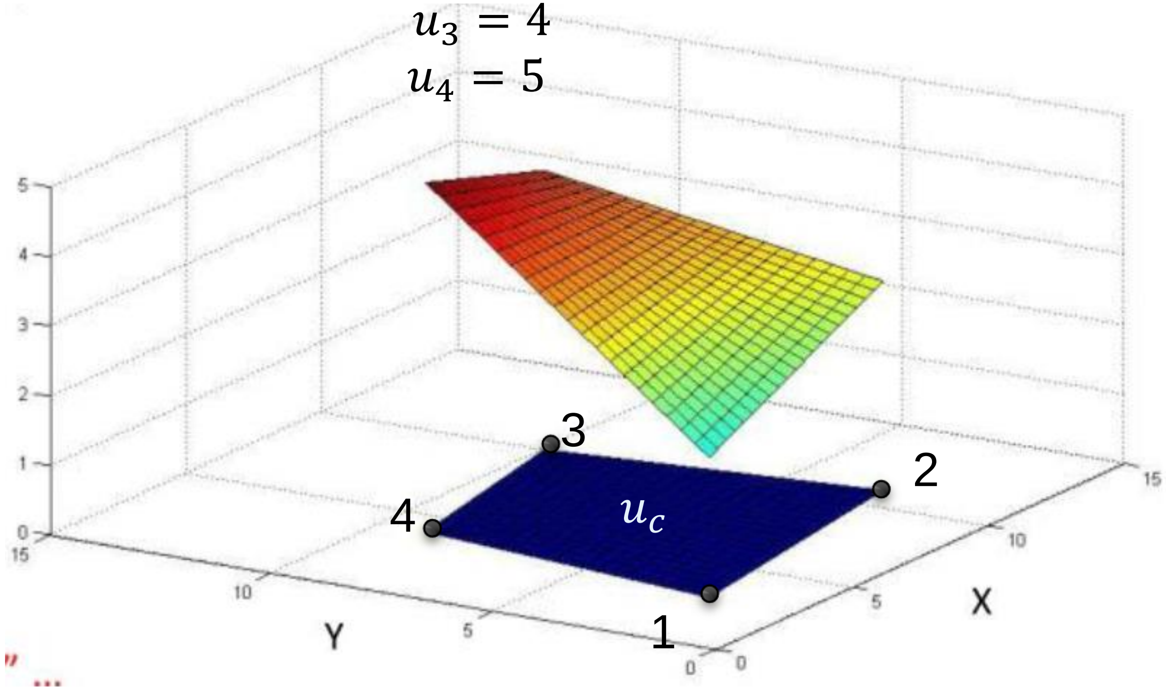
$$\boxed{N_i(r,s) = \frac{1}{4}(1 + rr_i)(1 + ss_i)}$$



$N_3 = \frac{1}{4}(1+a)(1+b)$
$N_4 = \frac{1}{4}(1-a)(1+b)$
$N_2 = \frac{1}{4}(1+a)(1-b)$
$N_1 = \frac{1}{4}(1-a)(1-b)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Valores nodais de deslocamento:

$$u_1 = 2$$
$$u_2 = 3$$
$$u_3 = 4$$
$$u_4 = 5$$



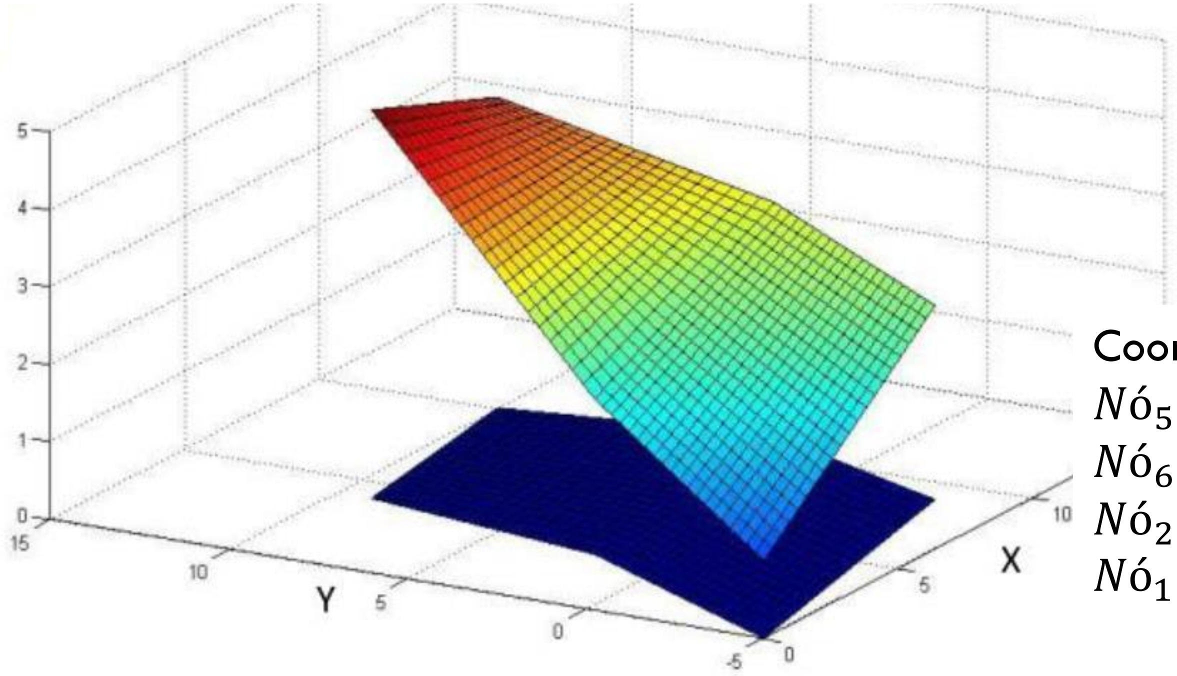
$$u_c = 2\frac{1}{4}(1-0)(1-0) + 3\frac{1}{4}(1+0)(1-0) + 4\frac{1}{4}(1+0)(1+0) + 5\frac{1}{4}(1-0)(1+0) = 3.5$$

CONTINUIDADE C^o

Coordenadas nodais element 01:

$N ó_1 = (3,2)$
$N ó_2 = (11,3)$
$N ó_3 = (10,10)$
$N ó_4 = (4,9)$

$u_1 = 2$
$u_2 = 3$
$u_3 = 4$
$u_4 = 5$
$u_5 = 1$
$u_6 = 2.5$



Coordenadas nodais element 02:

$N ó_5 = (0,-5)$
$N ó_6 = (9,-3)$
$N ó_2 = (11,3)$
$N ó_1 = (3,2)$

COORDENADAS E DESLOCAMENTOS

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

ELEMENTOS RETANGULAR DE MAIS ALTA ORDEM

- Mais nós

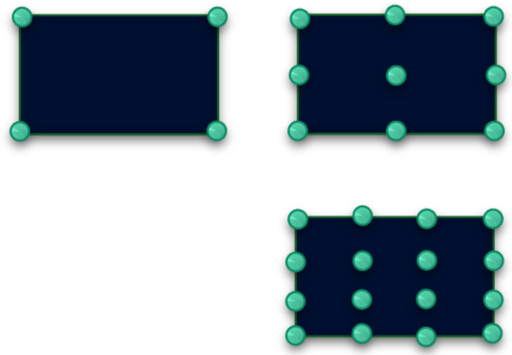
- Ainda 2 graus de liberdade por nó

- *Mais alta ordem* quer dizer mais alto grau de polinômio completo para aproximação dos deslocamentos.

- Duas famílias: Lagrangiana e Serendipity

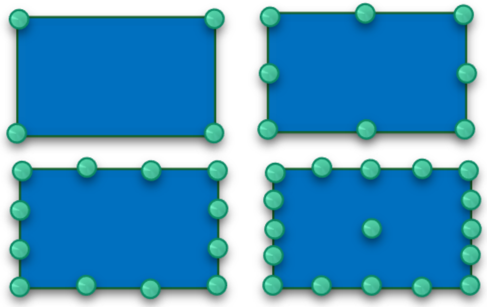
ELEMENTOS QUADRILÁTEROS QUADRÁTICOS

1. Família Lagrangiana de Elementos



Elemento de ordem n tem $(n+1)^2$ nós arranjados simétricamente – requer nós internos para no. de nós >4.

2. Elementos Serendipity



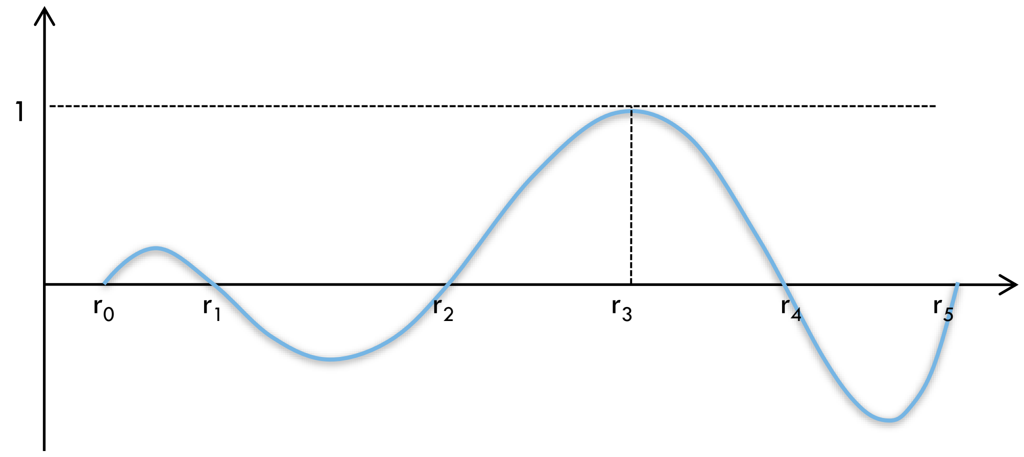
Em geral, apenas nós de contorno – evita-se nós internos.

Não é tão preciso quanto os elementos lagrangeanos, porém evita certos tipos de instabilidade.

FUNÇÕES DE FORMA LAGRANGIANAS

- Usa-se um procedimento que automaticamente satisfaz a propriedade Delta de Kronecker para funções de forma.
  - Considere o exemplo de 6 pontos, undimensional: a função vale 1 em r_3 e vale 0 em qualquer outro ponto.

$$L_3^{(5)}(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)(r-r_2)(r-r_4)(r-r_5)}{(r_3-r_0)(r_3-r_1)(r_3-r_2)(r_3-r_4)(r_3-r_5)}$$



FUNÇÕES DE FORMA LAGRANGIANAS

Pode-se resolver para qualquer número de pontos nodais em qualquer posição.

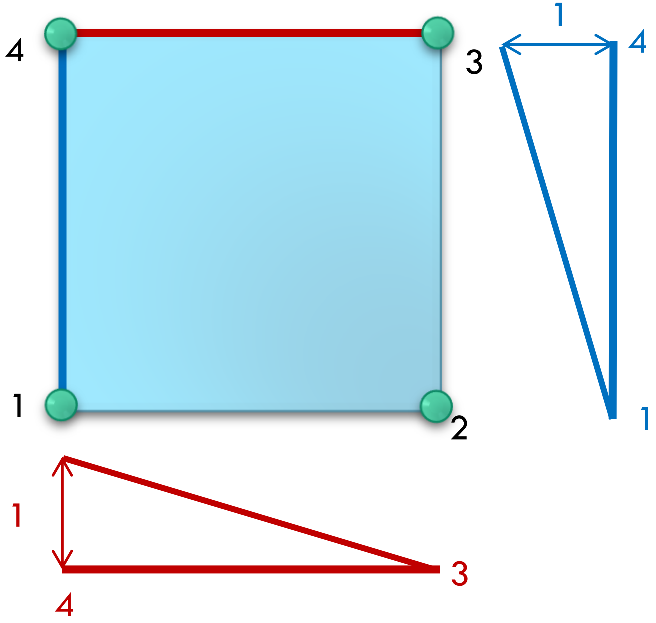
$$L_k^{(m)}(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)\ldots\boxed{(r-r_{k-1})(r-r_{k+1})}\ldots(r-r_m)}{(r_k-r_0)(r_k-r_1)\ldots\boxed{(r_k-r_{k-1})(r_k-r_{k+1})}\ldots(r_k-r_m)} = \boxed{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}} \frac{(r-r_i)}{(r_k-r_i)}}$$

Não entram termos r-r_k!

Polinômio de Lagrange de ordem *m* no nó *k*

CLARO QUE TAMBÉM FUNCIONA....

Ache a função de forma do nó 4:



$$V_4^{(1)}(r)=\frac{(s-s_1)}{(s_4-s_1)}=\frac{(s+1)}{(1+1)}=\frac{1}{2}(s+1)$$

s_1=-1
s_4=1

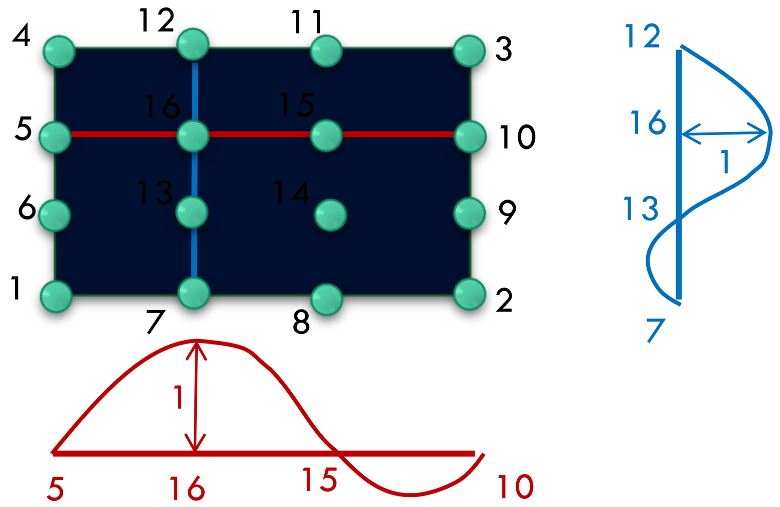
$$H_4^{(1)}(r)=\frac{(r-r_3)}{(r_4-r_3)}=\frac{(r-1)}{(-1-1)}=\frac{1}{2}(1-r)$$

r_3=1
r_4=-1

$$\boxed{\begin{aligned} N_4(r,s)&=H_4^{(1)}(r)V_4^{(1)}(s)\\ N_4(r,s)&=\frac{1}{4}(1-r)(1+s)\end{aligned}}$$

EXEMPLO: FUNÇÃO DE FORMA LAGRANGEANA

Ache a função de forma do nó 16:

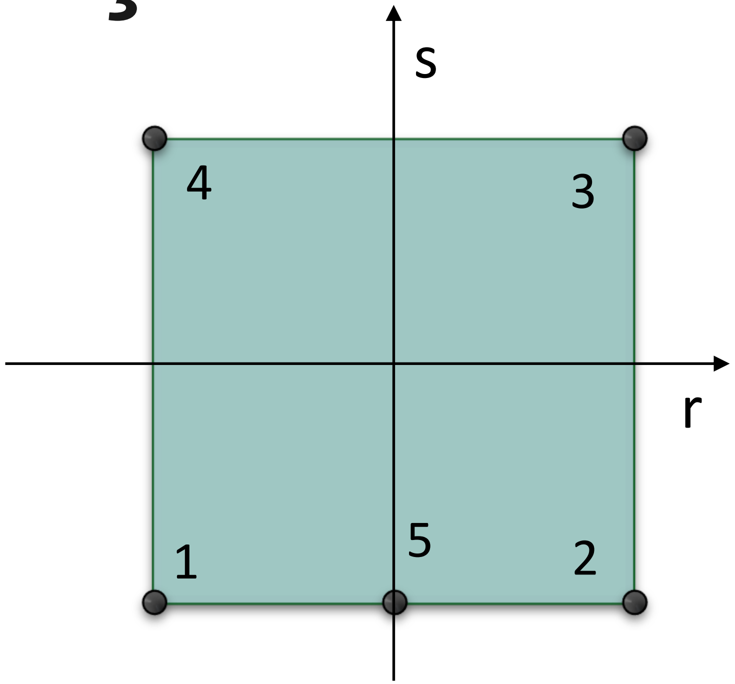


$$V_{16}^{(3)}(s)=\frac{(s-s_7)(s-s_{13})(s-s_{12})}{(s_{16}-s_7)(s_{16}-s_{13})(s_{16}-s_{12})}$$

$$H_{16}^{(3)}(r)=\frac{(r-r_5)(r-r_{15})(r-r_{10})}{(r_{16}-r_5)(r_{16}-r_{15})(r_{16}-r_{10})}$$

$$\boxed{N_{16}(r,s)=H_{16}^{(3)}(r)V_{16}^{(3)}(s)}$$

TRANSIÇÃO DO LINEAR PARA QUADRÁTICO



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \qquad -\frac{1}{2}N_5$$

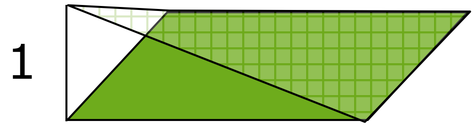
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \qquad -\frac{1}{2}N_5$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

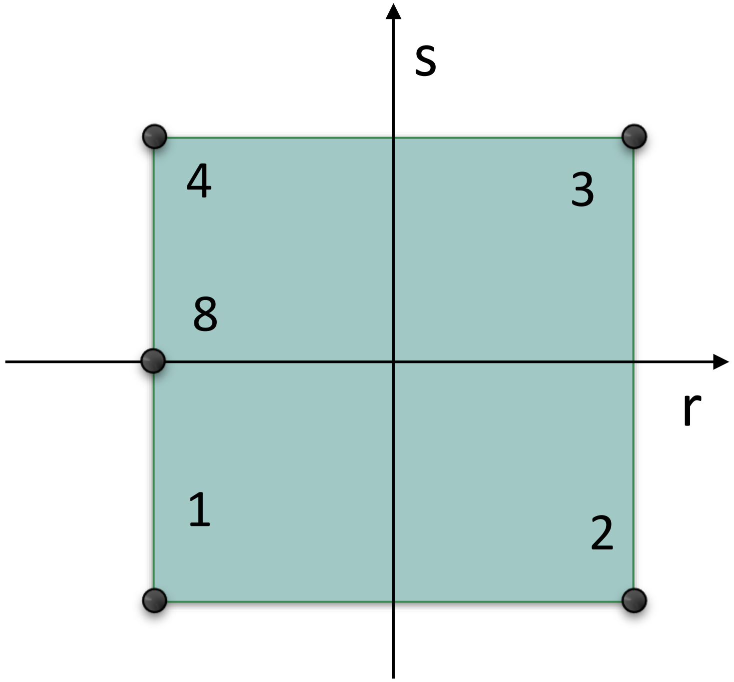
$$N_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$$

Se lembrarmos:



$$N_c = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$\therefore N_1 = N_c - \frac{1}{2}N_5$$



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \qquad -\frac{1}{2}N_8$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \qquad -\frac{1}{2}N_8$$

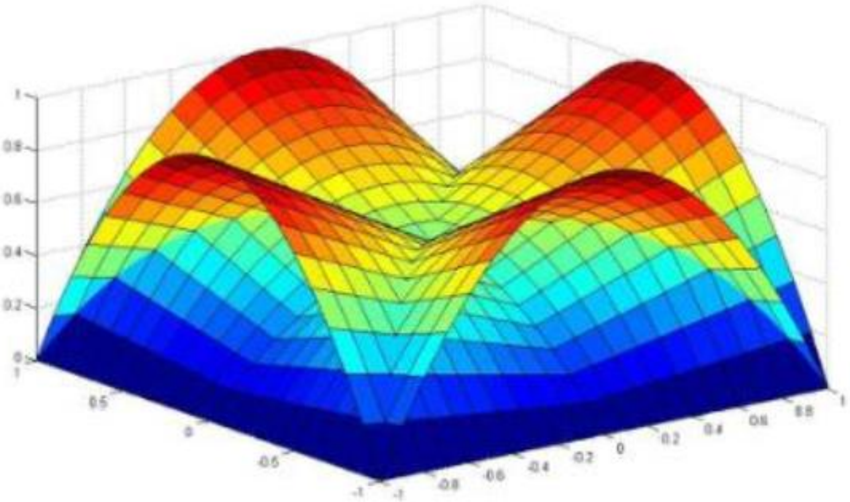
$$N_8 = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}\left(1-a^2\right)\left(1-b\right)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}\left(1+a\right)\left(1-b^2\right)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}\left(1-a^2\right)\left(1+b\right)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}\left(1-a\right)\left(1-b^2\right)$$

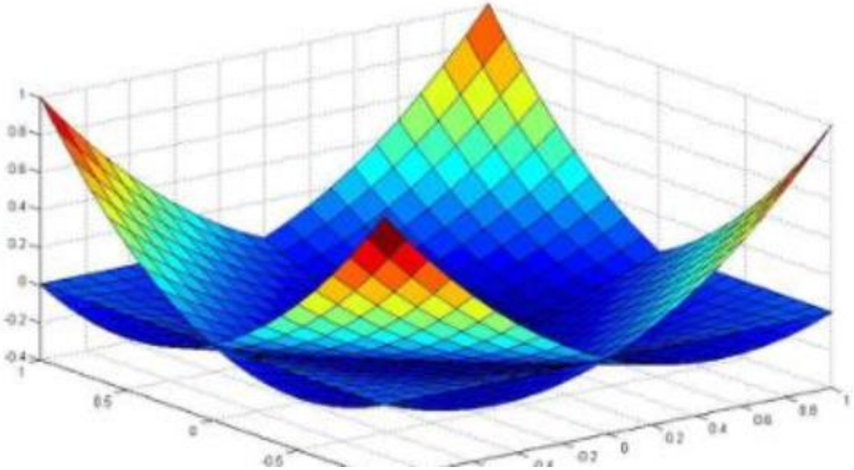


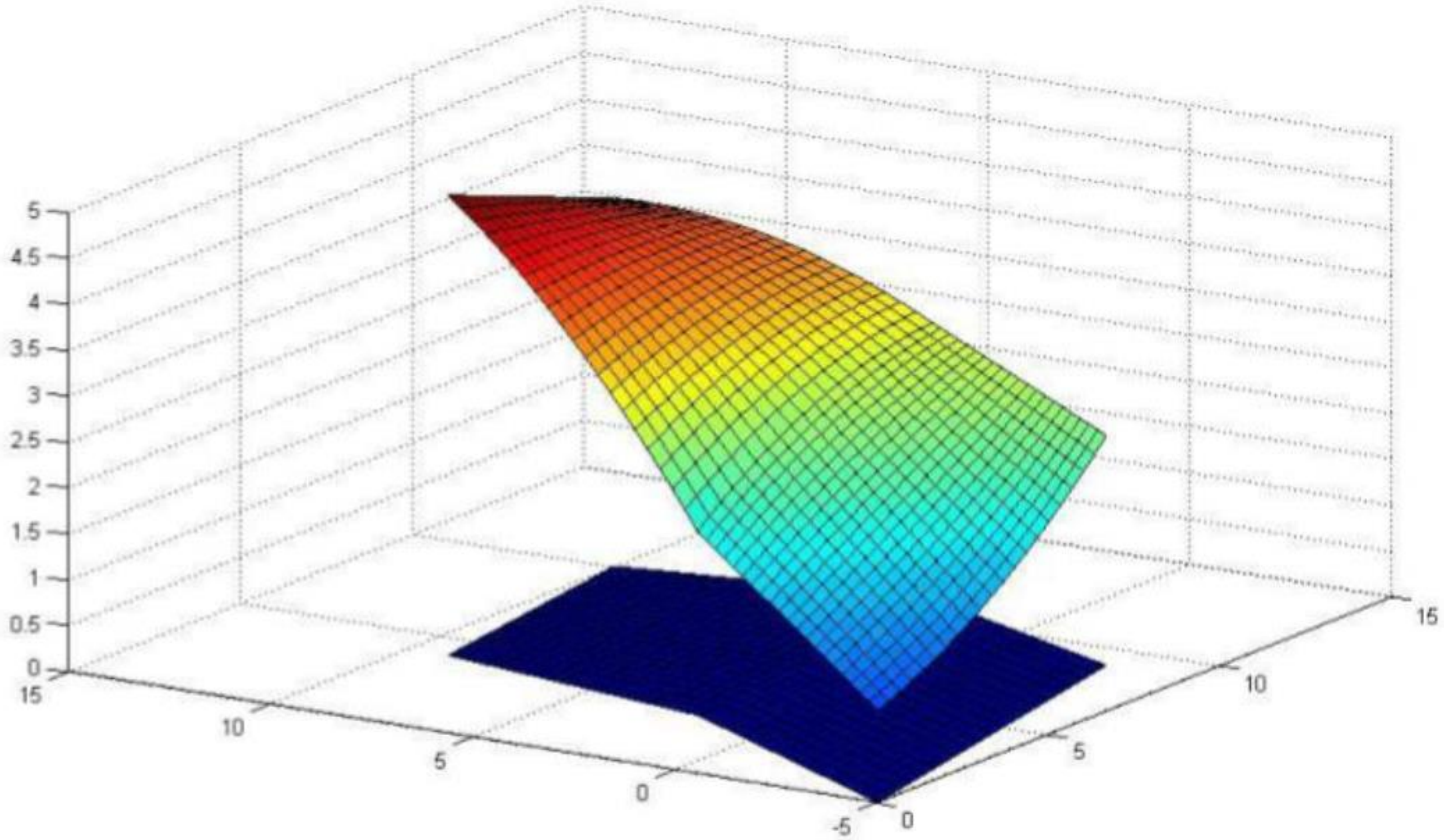
$$N_1 = \frac{1}{4}\left(1-a\right)\left(1-b\right) - \frac{1}{2}\left(N_8 + N_5\right)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}\left(1+a\right)\left(1-b\right) - \frac{1}{2}\left(N_5 + N_6\right)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\left(1+a\right)\left(1+b\right) - \frac{1}{2}\left(N_6 + N_7\right)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}\left(1-a\right)\left(1+b\right) - \frac{1}{2}\left(N_7 + N_8\right)$$




5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
15
10
5
0
-5
0
5
10
15

SERENDIPITY

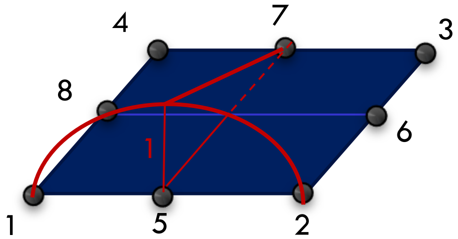
Definição do dicionário americano *Oxford* para Serendipity:

The making of pleasant discoveries by accident.

Horace Walpole (1717-1797) *inventou* a palavra 'serendipity' depois de ler o conto "**Three Princes of Serendip**". Uma história persa antiga sobre 3 príncipes iranianos que, em viagem, faziam sempre grandes descobertas, por acidente e sagacidade, sobre assuntos que não conheciam.

FUNÇÕES DE FORMA SERENDIPITY

Funções de forma para nós internos dos lados são o produto de um *polinômio de n-ésima* ordem na direção *paralela* ao lado por uma *função linear* na direção *perpendicular* ao lado.



$$N_5(r,s)=\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$$

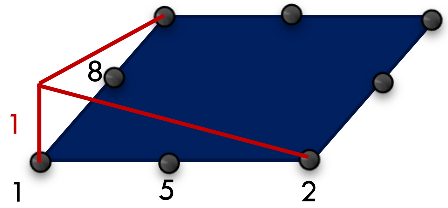
Analogamente:

$$N_7(r,s)=\frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$$

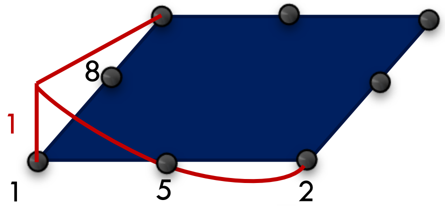
Resolva: como seriam as funções de forma N_6 e N_8???

Funções de forma para nós de canto são modificações das funções do elemento quadrangular bilinear.

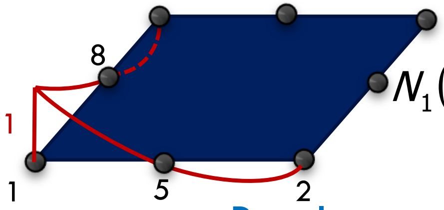
- 1: comece com a função de forma bilinear apropriada
- 2: subtraia a função de forma do nó interno, com peso apropriado
- 3: repita o passo 2 usando a função de forma e apropriado peso do nó interno do outro lado



$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$



$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}(1-r)(1-s)-\frac{1}{2}N_5$$

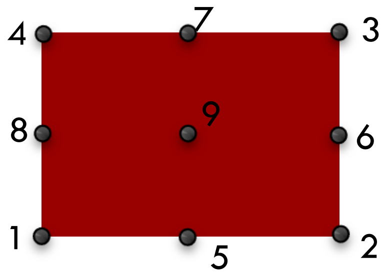


$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}(1-r)(1-s)-\frac{1}{2}N_5-\frac{1}{2}N_8$$

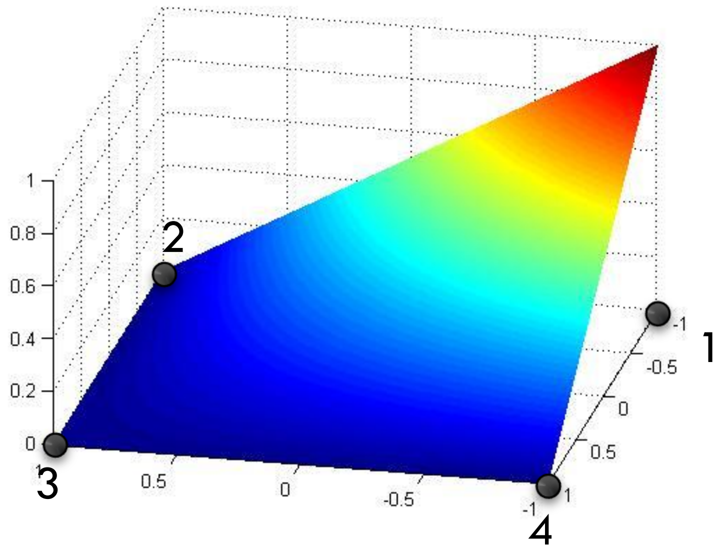
Resolva: como seriam as funções de forma N_6 e N_5???

TABELA DE FUNÇÕES DE FORMA

	Nós 1,2,3,4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8	Nó 9
N_1	$(1-r)(1-s)/4$	$-N_5/2$	0	0	$-N_8/2$	$-N_9/4$
N_2	$(1+r)(1-s)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$	0	0	$-N_9/4$
N_3	$(1+r)(1+s)/4$	0	$-N_6/2$	$-N_7/2$	0	$-N_9/4$
N_4	$(1-r)(1+s)/4$	0	0	$-N_7/2$	$-N_8/2$	$-N_9/4$
N_5	$(1-r^2)(1-s)/2$		0	0	0	$-N_9/2$
N_6	$(1+r)(1-s^2)/2$			0	0	$-N_9/2$
N_7	$(1-r^2)(1+s)/2$				0	$-N_9/2$
N_8	$(1-r)(1-s^2)/2$					$-N_9/2$
N_9	$(1-r^2)(1-s^2)$					



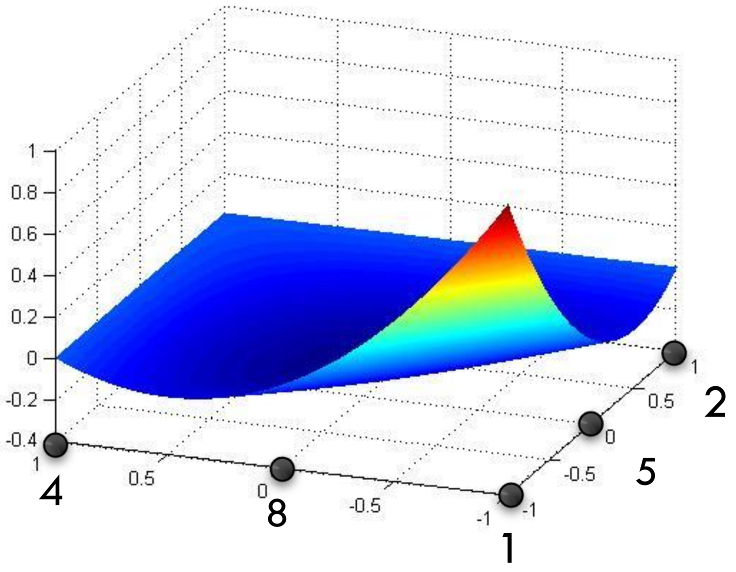
4 NÓS



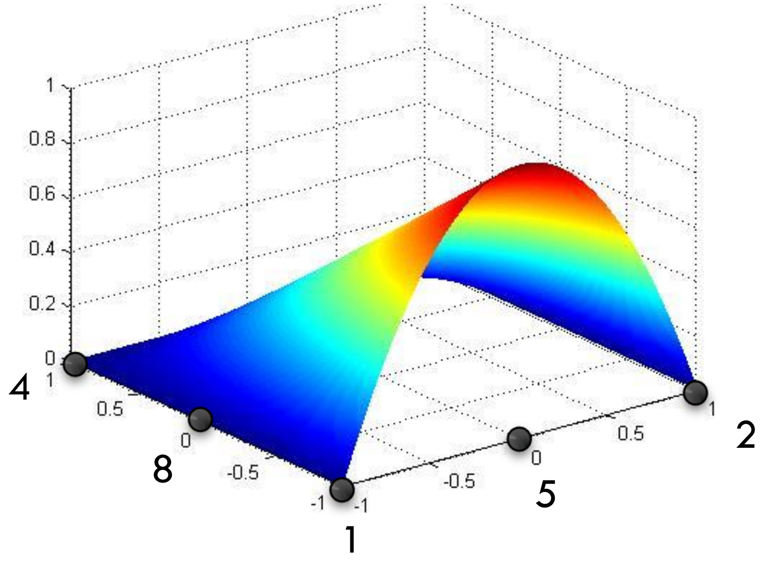
$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

8 NÓS

$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}(1-r)(1-s)-\frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)-\frac{1}{4}(1-r)(1-s^2)$$

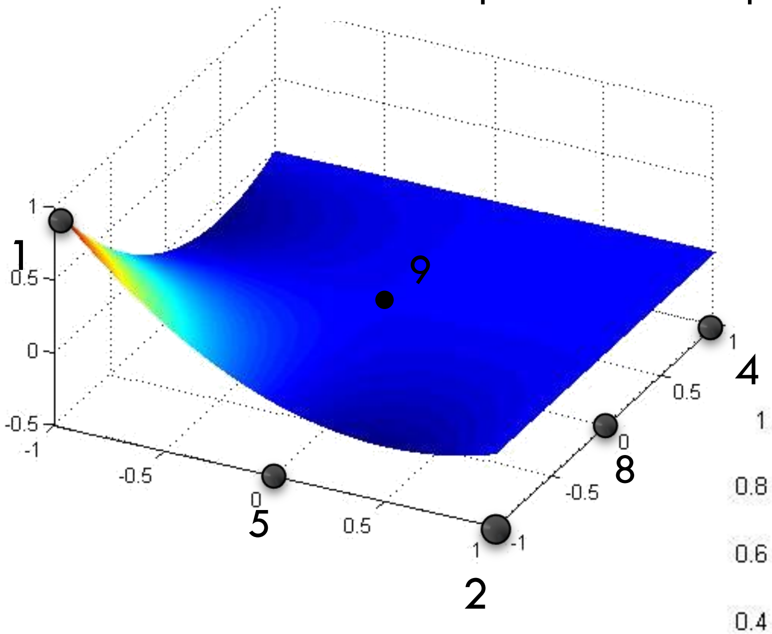


$$N_5(r,s)=\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$$

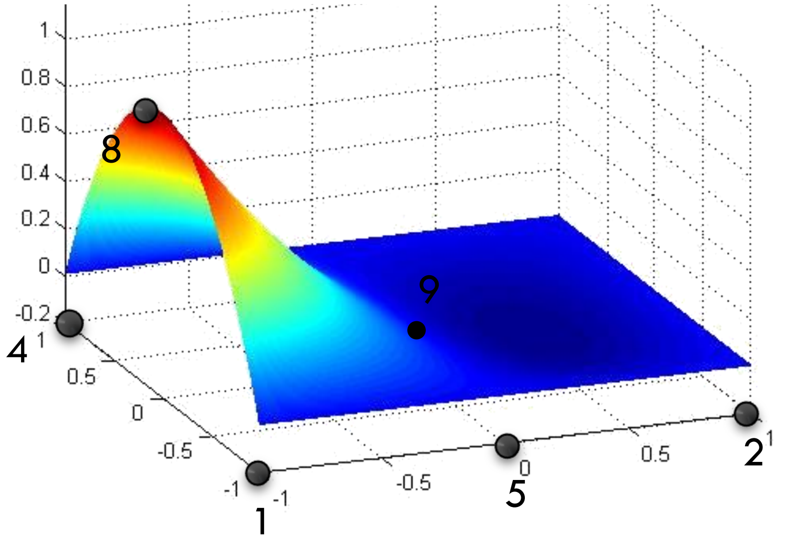


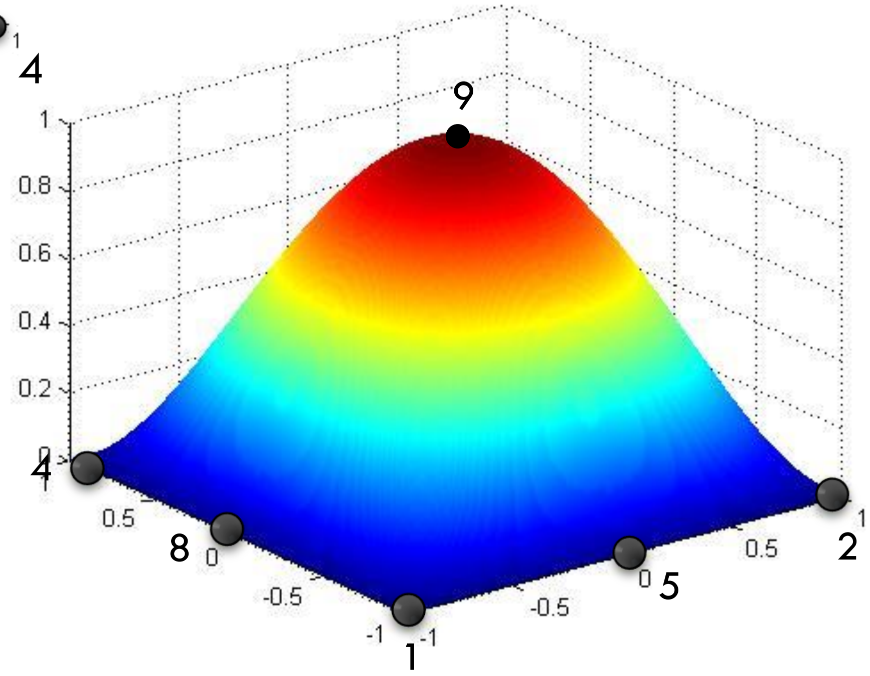
9 NÓS

$$N_1(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) - \frac{1}{4}(1-r)(1-s^2) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s^2)$$



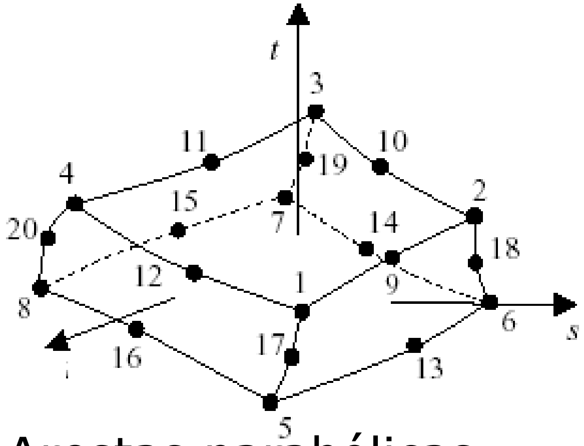
$$N8(r,s) = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2) - \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s^2)$$



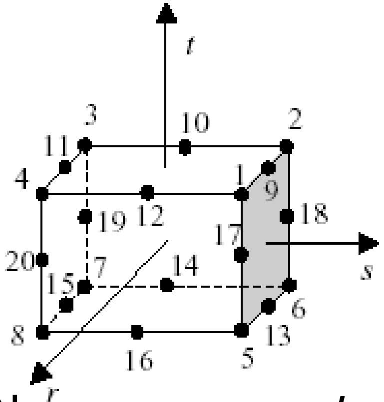


$$N_9(r,s) = (1-r^2)(1-s^2)$$

ELEMENTO TRIDIMENSIONAL DE 8 A 20 NÓS



Arestas parabólicas



No espaço *r,s,t*

Funções de forma, nó a nó, dadas por:

i) <u>nós de canto</u> ($i \leq 8$)
Estendido aos nós vizinhos de meio de aresta

$$N_i(r,s,t) = g_i(r,s,t) - \frac{1}{2}\sum_j g_j$$

Estendido aos nós vizinhos de meio de aresta

ii) <u>nós de meio de aresta</u> ($i > 8$)

$$N_i(r,s,t) = g_i(r,s,t)$$

onde,

$$g_i(r,s,t) = \begin{cases} 0, & \text{se o nó } i \text{ não é incluído } (i \geq 9) \\ G(r,i).G(s,i).G(t,i), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com

$$G(\beta,i) = \begin{cases} 1/2(1+\beta\beta_i), & para\ \beta_i = \pm 1 \\ (1-\beta^2), & para\ \beta_i = 0 \end{cases}$$

DERIVADAS

- As deformações do elemento são obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas locais.

- Para obter a matriz de rigidez de um elemento precisamos da matriz $\boldsymbol{B}$ de transformação $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\varepsilon}$.

- Uma vez que os deslocamentos do elemento são definidos nas coordenadas *naturais*, precisamos relacionar as derivadas de x, y, z com as derivadas de r, s, t.

MAPEAMENTO ISOPARAMÉTRICO

1. O mapeamento isoparamétrico fornece a relação (r, s) com (x, y), i.e., se um ponto (r, s) é dado em coordenadas isoparamétricas, pode-se computá-lo em coordenadas globais (x, y) usando as equações:

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i(r, s)x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} N_i(r, s)y_i$$

- 2. O mapeamento inverso JAMAIS será explicitamente computado…

Transformação de coordenadas é única e inversível.

$$\begin{aligned} x &= x(r,s) \\ y &= y(r,s) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} r &= r(x,y) \\ s &= s(x,y) \end{aligned}$$

REGRA DA CADEIA

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

REGRA DA CADEIA...

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\end{aligned}}$$

ou

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}}$$

Operador
Jacobiano

Pelas equações abaixo percebemos a necessidade de encontrar J^{-1}...

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Pode ser calculado, pois **N** é função das coordenadas naturais!

Esta é conhecida como matriz **Jacobiana** (J) para o mapeamento (r,s) $\longrightarrow$ (x,y)

Precisamos desta parcela para computar a matriz **B**

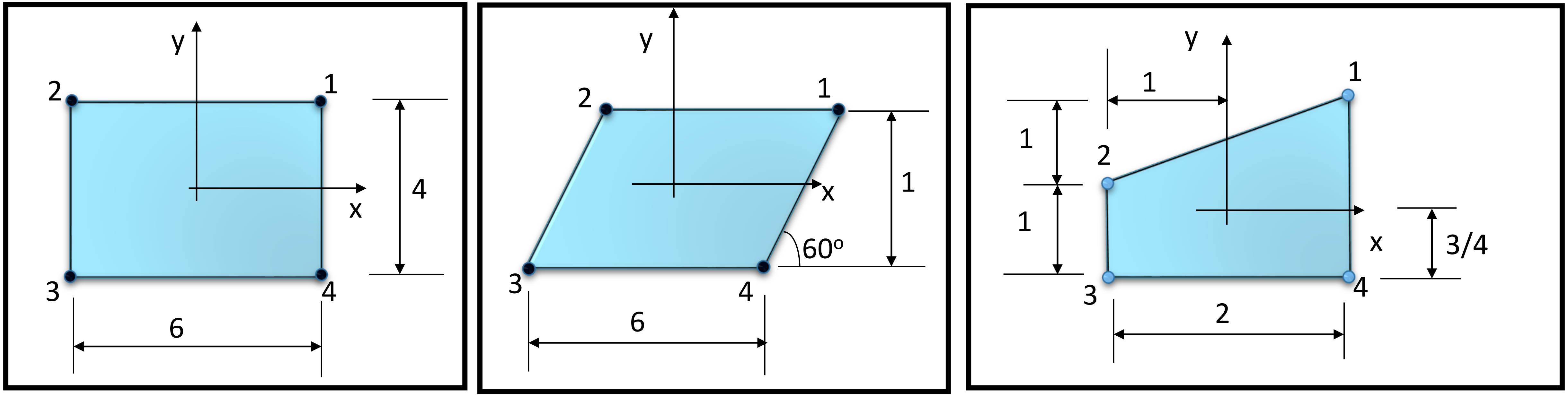
EXEMPLO: CÁLCULO DE JACOBIANO

$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4}$$

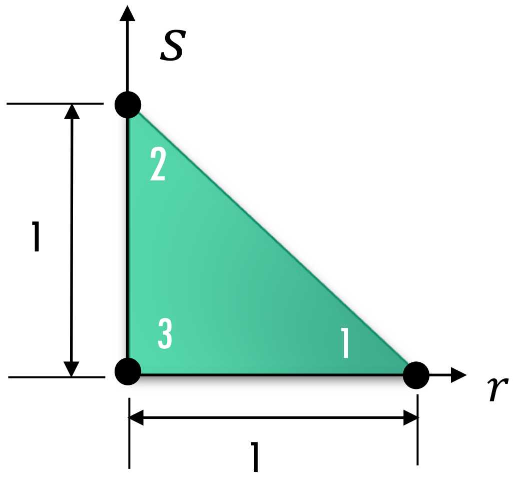
$$N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4}$$



Bathe, pág. 350

ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS TRIANGULARES



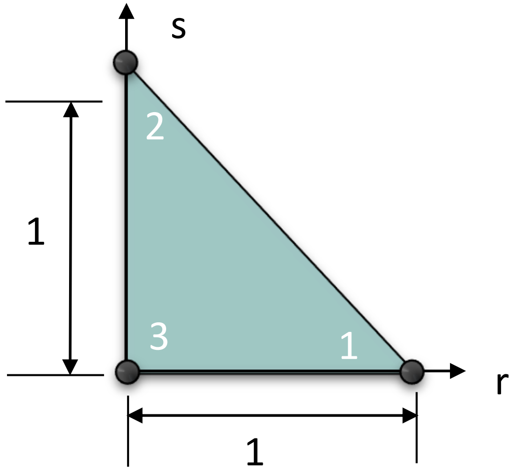
Determinar a função linear que satisfaça:

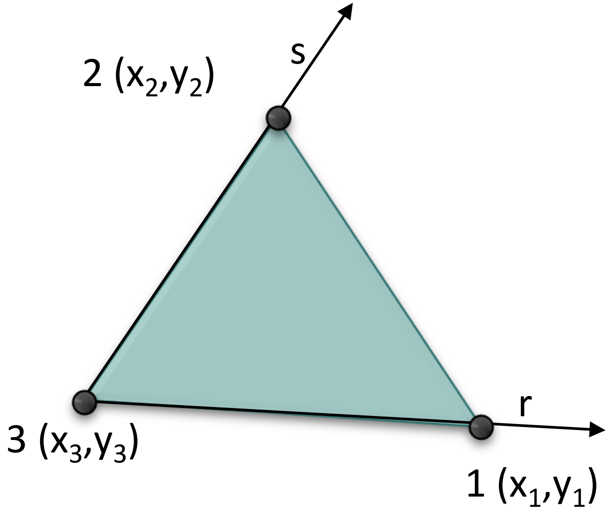
$$u(0,0)=u_1 \qquad u(1,0)=u_2 \qquad u(0,1)=u_3$$

$$N_i(r_j,s_j)=\begin{cases}1 & \text{se i=j}\\ 0 & \text{se i}\neq\text{j}\end{cases}$$

Solução:

$$u(r,s)=(1-r-s)u_1+ru_2+su_3$$





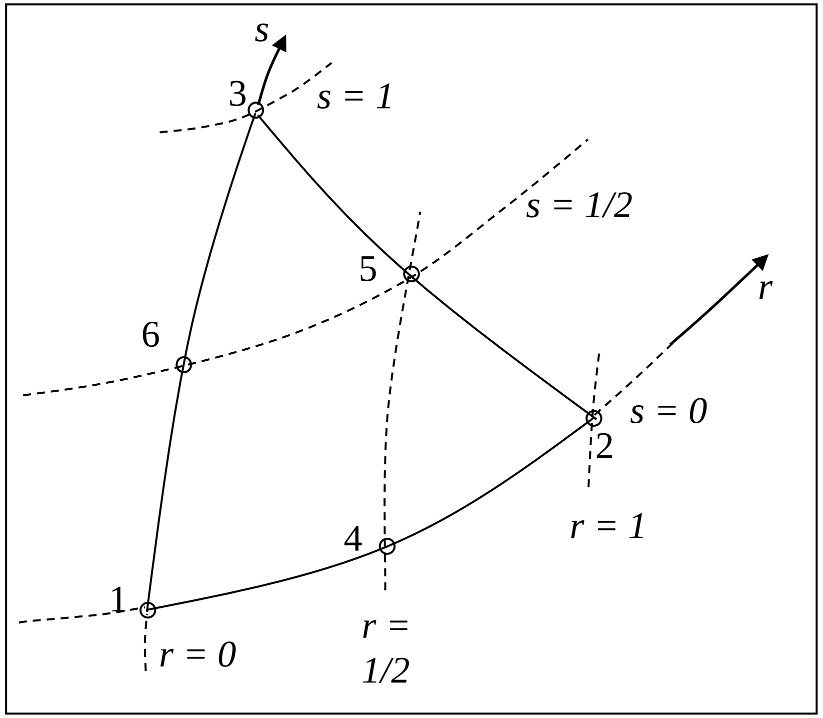
Funções de forma

$$N_1 = r$$

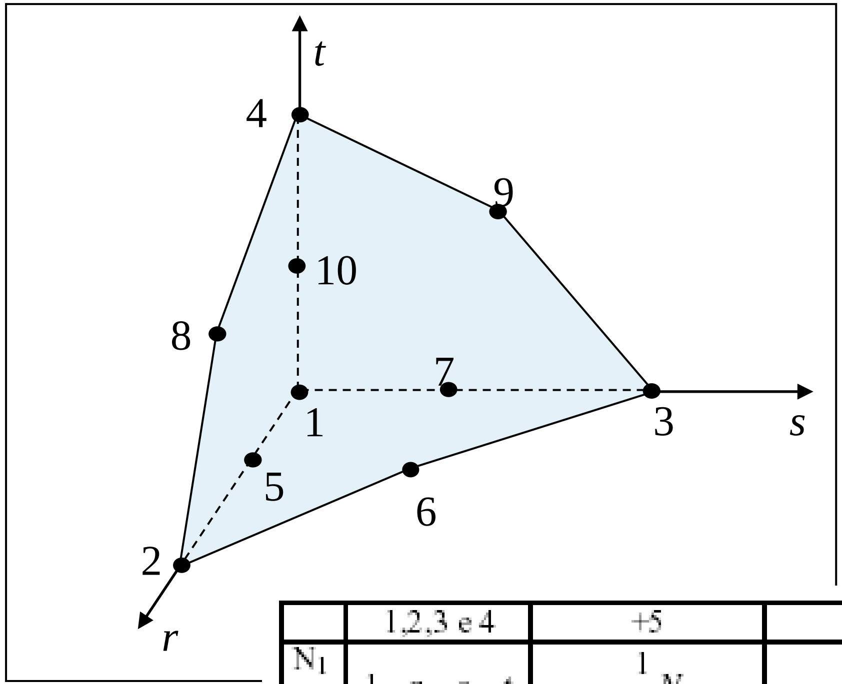
$$N_2 = s$$

$$N_3 = 1 - r - s$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= N_1(r,s)x_1 + N_2(r,s)x_2 + N_3(r,s)x_3 \\ y &= N_1(r,s)y_1 + N_2(r,s)y_2 + N_3(r,s)y_3 \end{aligned}}$$



	1,2,3	+4	+5	+6
N_1	$1-r-s$	$-\frac{1}{2}N_4$	0	$-\frac{1}{2}N_6$
N_2	r	$-\frac{1}{2}N_4$	$-\frac{1}{2}N_5$	0
N_3	s	0	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$
N_4	-----	$4r(1-r-s)$	0	0
N_5	-----	-----	$4rs$	0
N_6	-----	-----	-----	$4s(1-r-s)$



	1,2,3 e 4	+5	+6	+7	+8	+9	+10
N_1	$1-r-s-t$	$-\frac{1}{2}N_5$	0	$-\frac{1}{2}N_7$	0	0	$-\frac{1}{2}N_{10}$
N_2	r	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$	0	$-\frac{1}{2}N_8$	0	0
N_3	s	0	$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$	0	$-\frac{1}{2}N_9$	0
N_4	t	0	0	0	$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{2}N_9$	$-\frac{1}{2}N_{10}$
N_5	-----	$4r(1-r-s-t)$	0	0	0	0	0
N_6	-----	-----	$4rs$	0	0	0	0
N_7	-----	-----	-----	$4s(1-r-s-t)$	0	0	0
N_8	-----	-----	-----	-----	$4rt$	0	0
N_9	-----	-----	-----	-----	-----	$4st$	0
N_{10}	-----	-----	-----	-----	-----	-----	$4t(1-r-s-t)$

SUA LIÇÃO DE CASA

Acompanhe passo a passo as definições

DEFORMAÇÕES EM TERMOS DE UMA MATRIZ OPERADOR

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\ )}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial(\ )}{\partial y} \\ \dfrac{\partial(\ )}{\partial y} & \dfrac{\partial(\ )}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Onde:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s}\right]$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial y} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})}\left[\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r}\right]$$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial(\ )}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial(\ )}{\partial y}\\ \dfrac{\partial(\ )}{\partial y} & \dfrac{\partial(\ )}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x}=\frac{1}{\det(J)}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r}-\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s}\right]$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial y}=\frac{1}{\det(J)}\left[\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r}\right]$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial(\ )}{\partial r}-\dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial(\ )}{\partial s} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial(\ )}{\partial s}-\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial(\ )}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial(\ )}{\partial s}-\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial(\ )}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial(\ )}{\partial r}-\dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial(\ )}{\partial s}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \mathbf{N} \mathbf{d}$$

$$\partial = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial(\ )}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial(\ )}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underset{(3\times 8)}{\mathbf{B}} = \underset{(3\times 2)}{\partial} \ \underset{(2\times 8)}{\mathbf{N}}}$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

$$\mathbf{k} = \iint_A \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\, t \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\, t \det(\mathbf{J})\,\mathrm{dr}\,\mathrm{ds}$$

$$x = \frac{1}{4}\left[(1-r)(1-s)x_1 + (1+r)(1-s)x_2 + (1+r)(1+s)x_3 + (1-r)(1+s)x_4\right]$$

$$y = \frac{1}{4}\left[(1-r)(1-s)y_1 + (1+r)(1-s)y_2 + (1+r)(1+s)y_3 + (1-r)(1+s)y_4\right]$$

$$x=\frac{1}{4}\left[(1-r)(1-s)x_1+(1+s)(1-s)x_2+(1+r)(1+s)x_3+(1-r)(1+s)x_4\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=c=\frac{1}{4}\left(-(1-s)x_1+(1-s)x_2+(1+s)x_3-(1+s)x_4\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=d=\frac{1}{4}\left(-(1-r)x_1-(1+r)x_2+(1+r)x_3+(1-r)x_4\right)$$

$$y=\frac{1}{4}\left[(1-r)(1-s)y_1+(1+r)(1-s)y_2+(1+r)(1+s)y_3+(1-r)(1+s)y_4\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=b=\frac{1}{4}\left[-(1-s)y_1+(1-s)y_2+(1+s)y_3-(1+s)y_4\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}=a=\frac{1}{4}\left[-(1-r)y_1-(1+r)y_2+(1+r)y_3+(1-r)y_4\right]$$

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{1}{8}\mathbf{X}^T \begin{bmatrix} 0 & 1-s & s-r & r-1 \\ s-1 & 0 & r+1 & -r-s \\ r-s & -r-1 & 0 & s+1 \\ 1-r & r+s & -s-1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{(3\times 8)}{\mathbf{B}} = \underset{(3\times 2)}{\partial} \; \underset{(2\times 8)}{\mathbf{N}}$$

$$\partial = \frac{1}{\det(\mathbf{J})}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial(\;)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial(\;)}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial(\;)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial(\;)}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial(\;)}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial(\;)}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial(\;)}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial(\;)}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(r,s) = \frac{1}{\det(\mathbf{J})}\left[\mathbf{B}_1 \;\vdots\; \mathbf{B}_2 \;\vdots\; \mathbf{B}_3 \;\vdots\; \mathbf{B}_4\right]$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} a\left(N_{i,r}\right) - b\left(N_{i,s}\right) & 0 \\ 0 & c\left(N_{i,s}\right) - d\left(N_{i,r}\right) \\ c\left(N_{i,s}\right) - d\left(N_{i,r}\right) & a\left(N_{i,r}\right) - b\left(N_{i,s}\right) \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4}$$
$$N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4}$$
$$N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4}$$
$$N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4}$$

$$N_{1,r} = \frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{-1(1-s)}{4} = \frac{(s-1)}{4} \qquad N_{1,s} = \frac{\partial N_1}{\partial s} = \frac{(1-r)(-1)}{4} = \frac{(r-1)}{4}$$
$$N_{2,r} = \frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{(1)(1-s)}{4} = \frac{(1-s)}{4} \qquad N_{2,s} = \frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{(1+r)(-1)}{4} = \frac{-(r+1)}{4}$$
$$N_{3,r} = \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{(1)(1+s)}{4} = \frac{(1+s)}{4} \qquad N_{3,s} = \frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{(1+r)(1)}{4} = \frac{(r+1)}{4}$$
$$N_{4,r} = \frac{\partial N_4}{\partial r} = \frac{(-1)(1+s)}{4} = \frac{-(1+s)}{4} \qquad N_{4,s} = \frac{\partial N_4}{\partial s} = \frac{(1-r)(1)}{4} = \frac{(1-r)}{4}$$

$$a = 1/4\left[y_1(r-1) + y_2(-r-1) + y_3(r+1) + y_4(1-r)\right]$$

$$b = 1/4\left[y_1(s-1) + y_2(1-s) + y_3(s+1) + y_4(-1-s)\right]$$

$$c = 1/4\left[x_1(s-1) + x_2(1-s) + x_3(s+1) + x_4(-1-s)\right]$$

$$d = 1/4\left[x_1(r-1) + x_2(-r-1) + x_3(r+1) + x_4(1-r)\right]$$

EXEMPLO

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

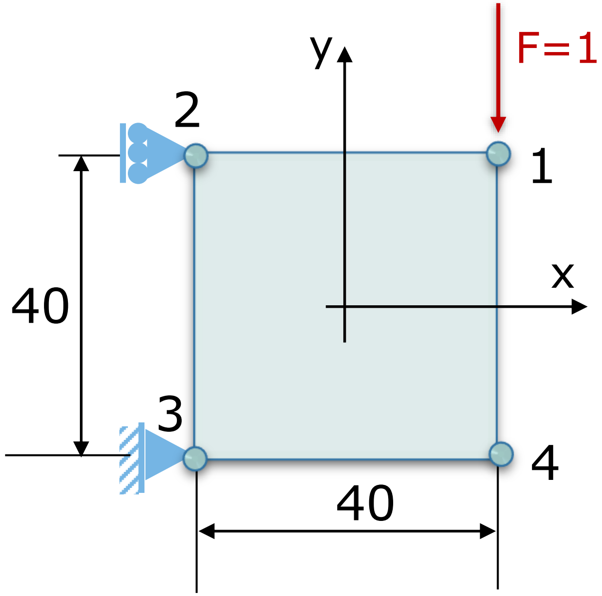
$\nu = 0{,}3$

E constante

Estado plano de tensão:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$



$$N_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det J = 400$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial s \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \\ & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial/\partial x & \\ & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & & & & \\ & & & & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} (1+s) & -(1+s) & -(1-s) & (1-s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+r) & (1-r) & -(1-r) & -(1+r) \\ (1+r) & (1-r) & -(1-r) & -(1+r) & (1+s) & -(1+s) & -(1-s) & (1-s) \end{bmatrix}$$

$$\det J = 400$$

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B} \det \mathbf{J}\, dr\, ds$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

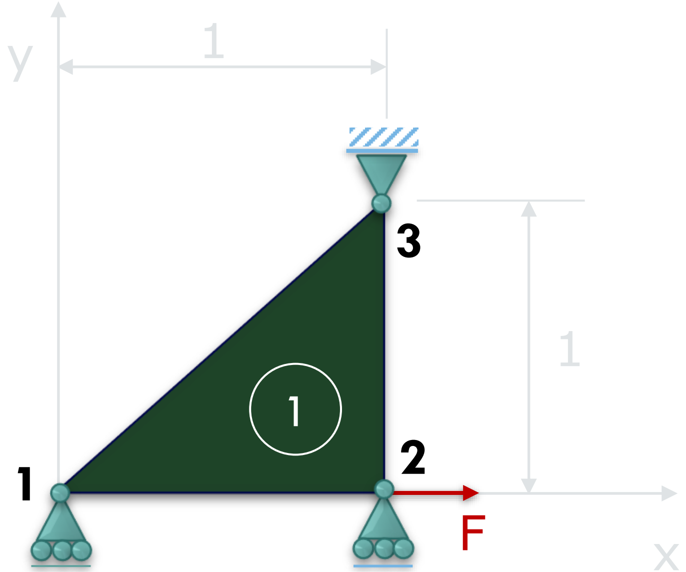
$$B = \begin{bmatrix} 1+s & -1-s & -1+s & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+r & 1-r & -1+r & -1-r \\ 1+r & 1-r & -1+r & -1-r & 1+s & -1-s & -1+s & 1-s \end{bmatrix}$$

$$K/E = \begin{bmatrix} 9/7280 & -11/14560 & -9/14560 & 1/7280 & 1/2240 & -1/29120 & -1/2240 & 1/29120 \\ -11/14560 & 9/7280 & 1/7280 & -9/14560 & 1/29120 & -1/2240 & -1/29120 & 1/2240 \\ -9/14560 & 1/7280 & 9/7280 & -11/14560 & -1/2240 & 1/29120 & 1/2240 & -1/29120 \\ 1/7280 & -9/14560 & -11/14560 & 9/7280 & -1/29120 & 1/2240 & 1/29120 & -1/2240 \\ 1/2240 & 1/29120 & -1/2240 & -1/29120 & 9/7280 & 1/7280 & -9/14560 & -11/14560 \\ -1/29120 & -1/2240 & 1/29120 & 1/2240 & 1/7280 & 9/7280 & -11/14560 & -9/14560 \\ -1/2240 & -1/29120 & 1/2240 & 1/29120 & -9/14560 & -11/14560 & 9/7280 & 1/7280 \\ 1/29120 & 1/2240 & -1/29120 & -1/2240 & -11/14560 & -9/14560 & 1/7280 & 9/7280 \end{bmatrix}$$

$$K = E\begin{bmatrix} 9/7280 & 1/7280 & -1/2240 & -1/29120 \\ 1/7280 & 9/7280 & 1/29120 & 1/2240 \\ -1/2240 & 1/29120 & 9/7280 & -11/14560 \\ -1/29120 & 1/2240 & -11/14560 & 9/7280 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = 1000/E\begin{bmatrix} -0.7286 \\ 0.8892 \\ -1.5812 \\ -2.1165 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO



para ν=0,3 e t=1,0.

$$N_1(r,s) = (1 - r - s)$$
$$N_2(r,s) = r$$
$$N_3(r,s) = s$$

Calcular:

- Deslocamentos
- Reações de apoio
- Deformações
- Tensões

Estado plano de deformações:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \dfrac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

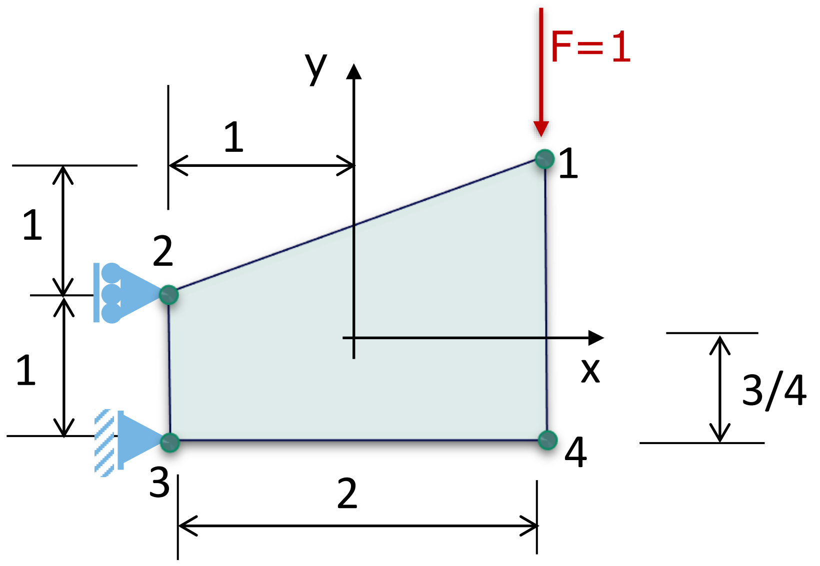
$$\int_0^{1-r}\int_0^{1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\det\mathbf{J}\,dr\,ds\;t=$$

$$0{,}673E\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0{,}429 & -0{,}429 \\ -1 & 1{,}286 & -0{,}286 & 0{,}286 & -0{,}714 & 0{,}429 \\ 0 & -0{,}286 & 0{,}286 & -0{,}286 & 0{,}286 & 0 \\ 0 & 0{,}286 & -0{,}286 & -0{,}286 & -0{,}286 & 0 \\ 0{,}429 & -0{,}714 & 0{,}286 & 0{,}286 & 1{,}286 & -1 \\ -0{,}429 & 0{,}429 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{K} = 0{,}673E \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0{,}429 & -0{,}429 \\ -1 & 1{,}286 & -0{,}286 & 0{,}286 & -0{,}714 & 0{,}429 \\ 0 & -0{,}286 & 0{,}286 & -0{,}286 & 0{,}286 & 0 \\ 0 & 0{,}286 & -0{,}286 & -0{,}286 & -0{,}286 & 0 \\ 0{,}429 & -0{,}714 & 0{,}286 & 0{,}286 & 1{,}286 & -1 \\ -0{,}429 & 0{,}429 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

FLUXOGRAMA

- Agora escreva um fluxograma de como você implementaria o problema para elementos de 4 nós, implemente (pode ser em MatLab, Octave, Python, C....), e resolva:



FIM

Próxima aula faremos um exercício