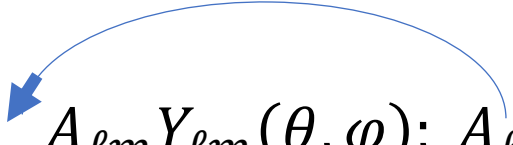


Desenvolvimento da Função de Green em Coordenadas Esféricas

[J. D. Jackson; Classical Electrodynamics; Section 3.9]

Desenvolvimento de uma função em harmônicos esféricos

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_{\ell'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \delta_{\ell'\ell} \delta_{m'm}$$

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi); \quad A_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) d\Omega$$


$$g(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \right] g(\theta', \varphi')$$

Relação de Completeza

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

Nota: função em coordenadas curvilíneas ortogonais (q_1, q_2, q_3)

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0); & \text{se } f(x_0, y_0, z_0) \text{ dentro de } V \\ 0; & \text{se } f(x_0, y_0, z_0) \text{ fora de } V \end{cases}$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3; \quad h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{\delta(q_1 - q_{10})}{h_1} \frac{\delta(q_2 - q_{20})}{h_2} \frac{\delta(q_3 - q_{30})}{h_3}$$

Coord. esféricas: $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$

Esta forma é equivalente à utilizada pelo Jackson, se usarmos a seguinte propriedade da função delta:

$$\delta[g(x)] = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_j}; \quad j \rightarrow \text{zeros de } g(x)$$

Função de Green para a Equação de Laplace, com condições de contorno

Equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Válida em situações em que condição de contorno é em $r \rightarrow \infty$.

Equação de Laplace, com condições de contorno $\rightarrow k^2 = 0$: $\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

Usando a relação de completeza dos harmônicos esféricos,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Ansatz:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = g_{\ell}(\vec{r}, \vec{r}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Na aula passada vimos que:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) - \frac{\widehat{\mathcal{L}}^2}{r^2} \phi = 0; \widehat{\mathcal{L}}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Portanto, substituindo o ansatz na Equação de Laplace para a Função de Green, temos,

$$\sum_{\ell=0}^{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_{\ell}(r, r')) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} g_{\ell}(r, r') + \frac{1}{r^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right] = 0$$

Considerando que esta equação tem que ser verificada para quaisquer valores de $(\theta, \varphi; \theta'; \varphi')$, segue que o termo entre colchetes tem que ser nulo, ou seja, $g_{\ell}(\vec{r}, \vec{r}')$ tem que satisfazer a equação

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_{\ell}(r, r')) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} g_{\ell}(r, r') = -\frac{1}{r^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$\rightarrow \vec{r} \neq \vec{r}'$, a função $g_{\ell}(\vec{r}, \vec{r}')$ tem que satisfazer a equação homogênea, cuja solução sabemos que são r^{ℓ} e $r^{-(\ell+1)}$. Mas $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ introduz uma descontinuidade em $\vec{r} = \vec{r}'$, de forma que as constantes da solução têm que ser distintas nas regiões $r < r'$ e $r > r'$,

$$g_\ell(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{cases} Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}; r < r' \\ A'r^\ell + \frac{B'}{r^{\ell+1}}; r > r' \end{cases}; A \neq A'; B \neq B'$$

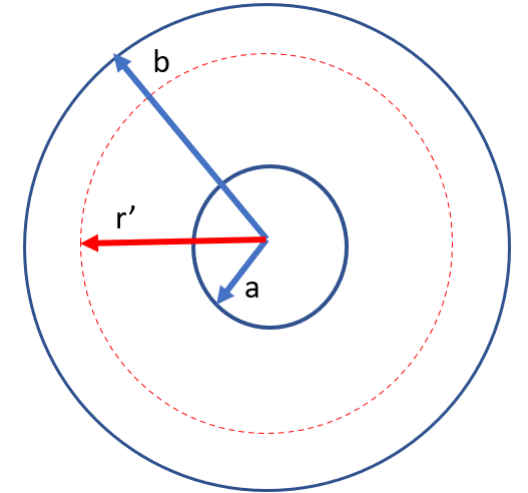
Constantes determinadas pelas condições de contorno e satisfazendo a simetria $r \leftrightarrow r'$.

Exemplo: $g_\ell(r, r') = 0; r = a; r = b$.

$$r < r' \rightarrow Aa^\ell + \frac{B}{a^{\ell+1}} = 0 \rightarrow B = -Aa^{2\ell+1}$$

$$r > r' \rightarrow A'b^\ell + \frac{B'}{b^{\ell+1}} = 0 \rightarrow A' = -\frac{B'}{b^{2\ell+1}}$$

$$g_\ell(r, r') = \begin{cases} A \left(r^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right); r < r' \\ B' \left(\frac{1}{r^{\ell+1}} \right) - \frac{r^\ell}{b^{2\ell+1}}; r > r' \end{cases}$$



Simetria em $r \leftrightarrow r'$ obriga que $A(r')$; $B'(r')$ sejam tais que

$$g_\ell(r, r') = C \left[r_{<}^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_{<}^{\ell+1}} \right] \left[\frac{1}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{>}^\ell}{b^{2\ell+1}} \right]$$

Para encontrar C , temos que levar em conta a função $\delta(r - r')$. Integramos a equação radial entre $r' - \epsilon$ e $r' + \epsilon$, e tomamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Considerando que $g_\ell(r, r')$ tem que ser contínuo em $r = r'$, temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{dr} (r g_\ell(r, r')) \right]_{r'+\epsilon} - \left[\frac{d}{dr} (r g_\ell(r, r')) \right]_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \\ & \quad r = r' + \epsilon \rightarrow r_{>} = r; r_{<} = r' \\ \Rightarrow & \left[\frac{d}{dr} (r g_\ell(r, r')) \right]_{r'+\epsilon} = C \left[(r')^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{(r')^{\ell+1}} \right] \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r_{>}^\ell} - \frac{r_{>}^{\ell+1}}{b^{2\ell+1}} \right] \\ & = -\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2\ell+1} \right] \left[\ell + (\ell + 1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2\ell+1} \right] \end{aligned}$$

Da mesma forma, $r = r' - \epsilon \rightarrow r_{<} = r; r_{>} = r'$, e

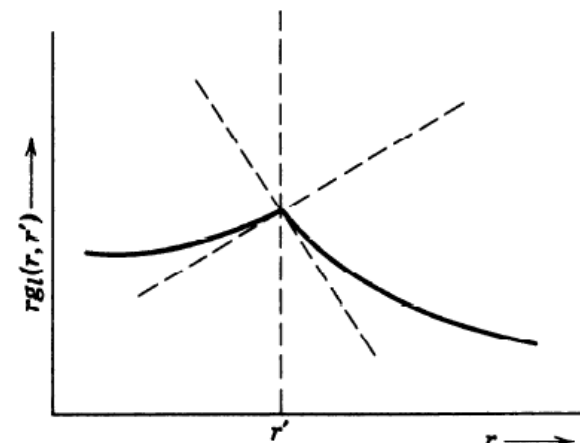
$$\left[\frac{d}{dr} (r g_{\ell}(r, r')) \right]_{r'-\epsilon} = \frac{C}{r'} \left[\ell + 1 + \ell \left(\frac{a}{r'} \right)^{2\ell+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2\ell+1} \right]$$

Substituindo esses dois resultados na equação, obtemos

$$C = \frac{4\pi}{(2\ell + 1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \right]}$$

e a Função de Green para este problema fica

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{(2\ell + 1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \right]} \left[r_{<}^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r_{<}^{2\ell+1}} \right] \left[\frac{1}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{>}^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right]$$



Verificar os casos especiais ($a \rightarrow 0; b \rightarrow \infty$), que corresponde à $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$, e ($a \neq 0; b \rightarrow \infty$).