PMR 3302
Sistemas Dinâmicos I

AULA 05: LAPLACE

Larissa Driemeier
driemeie@usp.br

Caro usuário,

Em parceria com a Mathworks, estamos oferecendo para a comunidade USP, em caráter excepcional e temporário, até 30 de junho de 2020, licenças campus-wide do MATLAB, Simulink e toolboxes relacionadas, para download e uso em computadores pessoais.

Paralelamente, a Superintendência de Tecnologia de Informação (STI) tem envidado esforços para renovação das licenças do MATLAB. A alteração no modelo de assinatura pela Mathworks o tornou excessivamente oneroso para a USP, chegando a atingir um patamar de 300% em relação ao modelo anterior.

É importante salientar que, dado o cenário atual, é possível que a renovação não se conclua até 30/06/2020 e uma eventual interrupção na continuidade do uso destas licenças após esta data deve ser levada em conta em qualquer atividade a ser realizada.

- Você precisa do Octave ou do MatLab para fazer essa aula (https://www.gnu.org/software/octave/download.html)

- Faça os exercícios, toda vez que você não concordar ou não entender o gabarito mostrado no slide, pergunte.

- Nessa aula será disponibilizado um Jupyter Notebook para você, ele tornará mais fácil e mais rápido seu aprendizado. Você precisa somente do Jupyter (pode ser dentro do Anaconda), Python, e Octave instalados para usá-lo.

Listas de exercícios, mudança da programação, comunicados gerais serão por meio do *stoa*. Por favor, verifique regularmente o site.

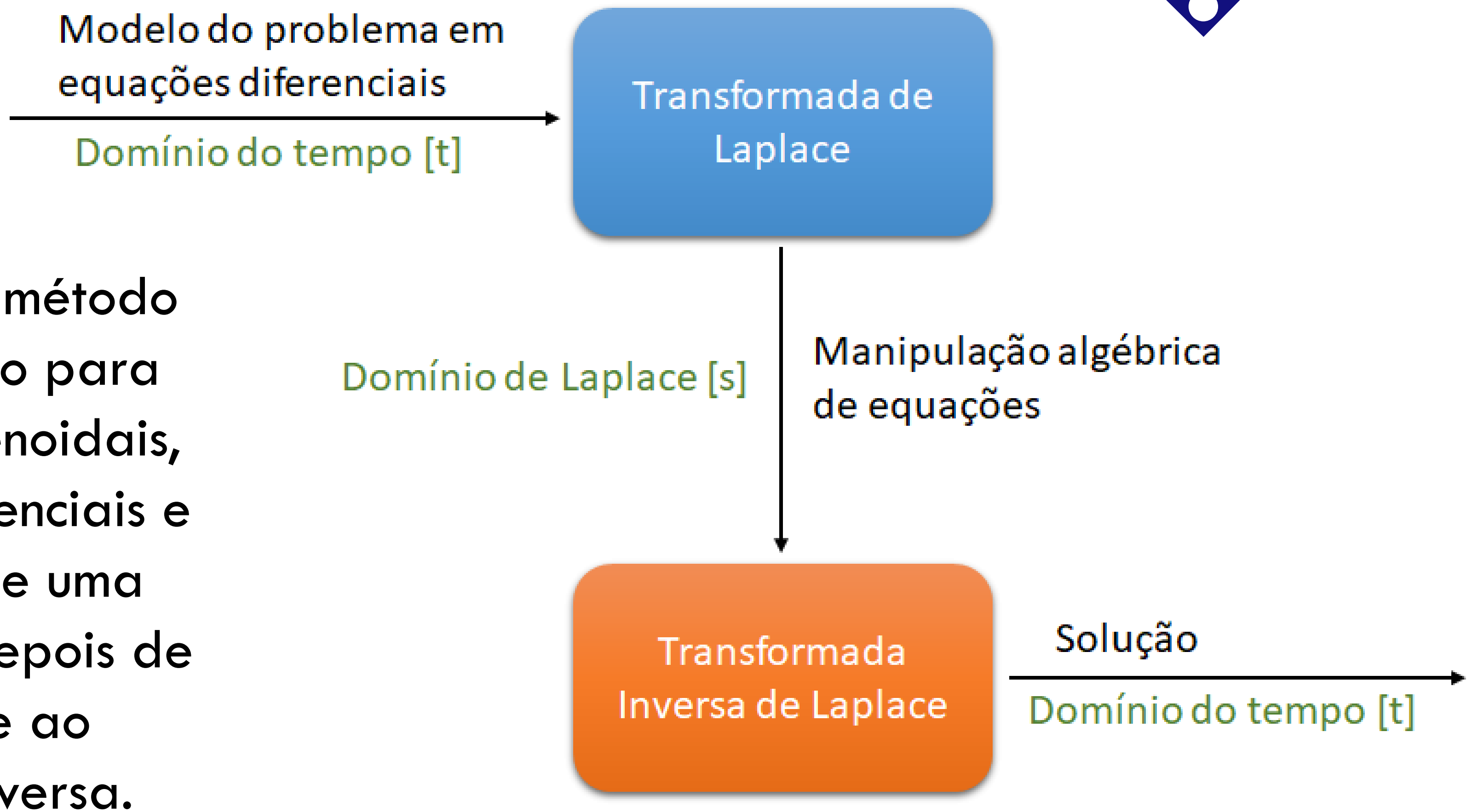
NOSSA AGENDA

#	Data	Tópico
1	21/02	Introdução ao modelamento e uso do software
2	06/03	Introdução à programação em MatLab
3	20/03	Resolução de Equações Diferenciais - Sistemas Lineares e Não Lineares
4	03/04	Transformada de Laplace e Funções de Transferência
5	24/04	Projeto
6	15/05	Diagrama de Blocos e Simulink
7	29/05	Análise de Sistemas de Primeira Ordem
8	19/06	Análise de Sistemas de Segunda Ordem

DEFINIÇÃO LAPLACE

O que é? Para que serve?

TRANSFORMADA DE LAPLACE



A Transformada de Laplace é um método operacional que pode ser utilizado para converter funções comuns, como senoidais, exponenciais, etc..., além de diferenciais e integrais, em funções algébricas de uma variável complexa $s = \sigma + j\omega$. Depois de manipular as equações, retorna-se ao domínio do tempo t através da inversa.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

O matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) descobriu um meio de resolver equações diferenciais que consiste em,

- Multiplicar cada termo da equação por e^{-st};
- Integrar cada termo, em relação ao tempo, de 0 a ∞; s é uma constante, com unidade de $1/t$.

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = Y(s)$$

LAPLACE NO OCTAVE

```
In [25]:  syms s t                                    % specify symbolic variables
          y=vpa('-1.25')+vpa('3.5')*t*exp(-2*t)+vpa('1.25')*exp(-2*t);% define y(t)
          Y=laplace(y,t,s)                           %returns the Laplace Transform of y(t).
          #Y=simplify(Y)                              % simplify the expression
```

```
Y = (sym)

     1.0*(1.0*s - 5.0)
  -----------------------
    /     2             \
  s*\1.0*s  + 4.0*s + 4.0/
```

```
syms s t                                                    % especificando as variáveis simbólicas s e t
y=vpa('-1.25')+vpa('3.5')*t*exp(-2*t)+vpa('1.25')*exp(-2*t); % definindo y(t)
Y=laplace(y,t,s)                                            % retorna a transformada de Laplace de y(t).
Y=simplify(Y)                                               % se necessário, pode-se pedir para simplificar
```

Por padrão, a variável independente é t e a variável de transformação é s.
Qualquer uma das formas mostra o mesmo resultado:
`laplace(y), laplace(y,t), laplace(y,t,s)`

LAPLACE NO MATLAB

```
syms s t
y=-1.25+3.5*t*exp(-2*t)+1.25*exp(-2*t);
Y=laplace(y,t,s);
Y=simplify(Y)
pretty(Y)
```

Tem-se as mesmas funções no *Octave*, mas o MatLab é mais eficiente....

```
Y =

(s - 5)/(s*(s + 2)^2)

  s - 5
----------
        2
s (s + 2)
```

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

```
syms t s
Y=(s-5)/(s*(s+2)^2);
y=ilaplace(Y);
y=simplify(y)
pretty(y)
```

Octave:

```
y = (sym)

  /          2*t    \  -2*t
  \14*t - 5*e     + 5/*e
  -------------------------
              4

  /          2*t    \  -2*t
  \14*t - 5*e     + 5/*e
  -------------------------
              4
```

MatLab:

```
y =

(5*exp(-2*t))/4 + (7*t*exp(-2*t))/2 - 5/4

exp(-2 t) 5   t exp(-2 t) 7   5
----------- + ------------- - -
     4              2         4
```

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{num}{den} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

```
num = [b0 b1 ... bn];
den = [1 a1 ... an];
[r,p,k]= residue(num,den)
```

```
syms s
B=b0*s^n+b1*s^(n-1)+...+bn;
A=s^n+a1*s^(n-1)+...+an;
sys=partfrac(B/A)
```

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \ldots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s)$$

$y(t)$	$Y(s)$
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $n = 1, 2, 3\ldots$	$\frac{1}{s^n}$
t^n, $n = 1, 2, 3\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$, $n = 1, 2, 3\ldots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$t^{n-1}e^{-at}$, $n = 1, 2, 3\ldots$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$, $(0 < \zeta < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi\right)$, $\phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi\right)$, $\phi = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$
$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{2\omega}t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$, $(\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)^2+(s^2+\omega_2^2)^2}$
$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

Tabela 17: Transfomada de Laplace. Tabela extraída de [11].

Apostila, pág. 95

POLOS DISTINTOS

```
num=[ 2 5 3 6];
den=[ 1 6 11 6];
[r,p,k]=residue(num,den)
```

Octave:

```
r =

   3.0000
  -4.0000
  -6.0000

p =

  -1.0000
  -2.0000
  -3.0000

k =  2
```

MatLab:

```
r =

   -6.0000
   -4.0000
    3.0000


p =

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000


k =

     2
```

```
syms s
B = 2*s^3 + 5*s^2 + 3*s + 6;
A = s^3 + 6*s^2 + 11*s + 6;
sys=partfrac(B/A)
```

Octave:

```
sys = (sym)

        6       4       3
  2 - ----- - ----- + -----
      s + 3   s + 2   s + 1
```

MatLab:

```
sys =


3/(s + 1) - 4/(s + 2) - 6/(s + 3) + 2
```

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3+5s^2+3s+6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

FAÇA VOCÊ

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+7}{s^2 - 3s - 10}$$

POLOS DUPLOS

```
num=[1 -5];
den=[1 4 4 0];
[r,p,k]=residue(num,den)
```

```
B = s - 5;
A = s^3 + 4*s^2 + 4*s;
sys=partfrac(B/A)
```

Octave:

```
r =

  -1.2500
   1.2500
   3.5000

p =

   0
  -2
  -2

k = [](0x0)
```

MatLab:

```
r =

    1.2500
    3.5000
   -1.2500


p =

    -2
    -2
     0


k =

     []
```

Octave:

```
sys = (sym)

     5             7          5
---------  + ----------  -  ---
4*(s + 2)             2     4*s
             2*(s + 2)
```

MatLab:

```
sys =

5/(4*(s + 2)) + 7/(2*(s + 2)^2) - 5/(4*s)
```

Lê-se,

$$Y(s) = \frac{1.25}{(s+2)} + \frac{3.5}{(s+2)^2} - \frac{1.25}{s}$$

FAÇA VOCÊ

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+1}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

EDO – SOLUÇÃO POR LAPLACE

O método é dividido em três etapas,

1. Transformar um problema difícil em uma equação simples através da aplicação da transformada de Laplace (equação subsidiária)
2. Resolve-se a equação subsidiária através de manipulações algébricas
3. A solução da equação diferencial em função do tempo é obtida pela transformada inversa de Laplace da equação subsidiária.

SOLUÇÃO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = e^{-t}, \qquad y(0) = 4, \qquad \frac{d}{dt}y(0) = 5$$

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] + 3\,\mathcal{L}[\dot{y}] + 2\,\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}\left[e^{-t}\right]$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 4$$

$$\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) - 4s - 5$$

$$\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{4s^2 + 21s + 18}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{-8}{s+2} + \frac{12}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = 12e^{-t} - 8e^{-2t} + te^{-t}$$

```
syms Y t s                        % Defina as variáveis simbólicas
y0=4;                             % i.b.c.
dy0=5;                            % i.b.c.
f = exp(-t)                       % Defina o lado direito da função
F = laplace(f,t,s)                % Encontre a transformada de Laplace do rhs
Y1=s*Y-y0;                        % Transf Laplace y'(t) : Y1 = s Y - y(0)
Y2 = s*Y1 - dy0;                  % Transf Laplace y''(t) : Y2 = s Y1 - y'(0)
% Defina a transformada Laplace do lado esquerdo menos o lado direito
% ... para resolver em Y:
Sol_s=solve(Y2+3*Y1+2*Y-F,Y)
Sol_s=simplify(Sol_s)             % Simplifique a expressão
pretty(Sol_s)
Sol_t=ilaplace(Sol_s)             % Solução no domínio do tempo
fh=ezplot(Sol_t,[0,5]); set(fh,'Color','r','LineWidth',4);% plot Sol_t(t) no domínio de 0-5s
```

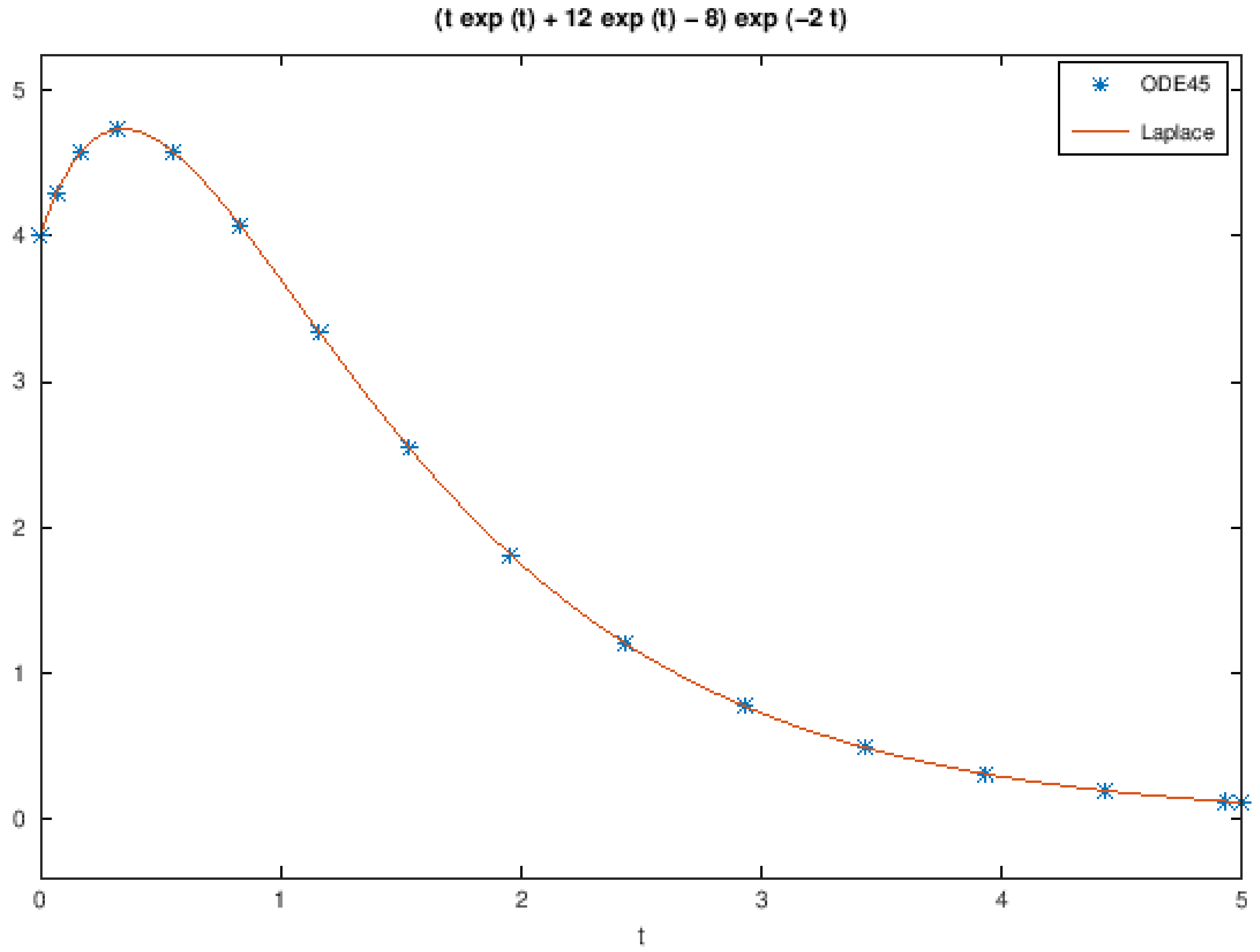
PELA ODE45

MatLab:

```
x_0 = [4,5];
tspan = [0,5];
[t,x] = ode45(@my_func,tspan,x_0);
plot(t,x(:,1),'*');
function xbar = my_func(t,x)
 xbar = [x(2); exp(-t)-3*x(2)-2*x(1)];
end
```

Octave:

```
y_0 = [4,5];
tspan = [0,5];
ydot = @(t,y) [y(2); exp(-t)-3*y(2)-2*y(1)];
[t,y] = ode45(ydot,tspan,y_0);
plot(t,y(:,1),'*');
hold on
fh=ezplot(Sol_t,[0,5]);
legend('Laplace', 'ODE45')
```


(t exp (t) + 12 exp (t) – 8) exp (–2 t)
ODE45
Laplace
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
t

EXERCÍCIO

Págs. 103-104, apostila,

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = t^2, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 0$$

EDO COM FUNÇÃO DEFINIDA POR PARTES

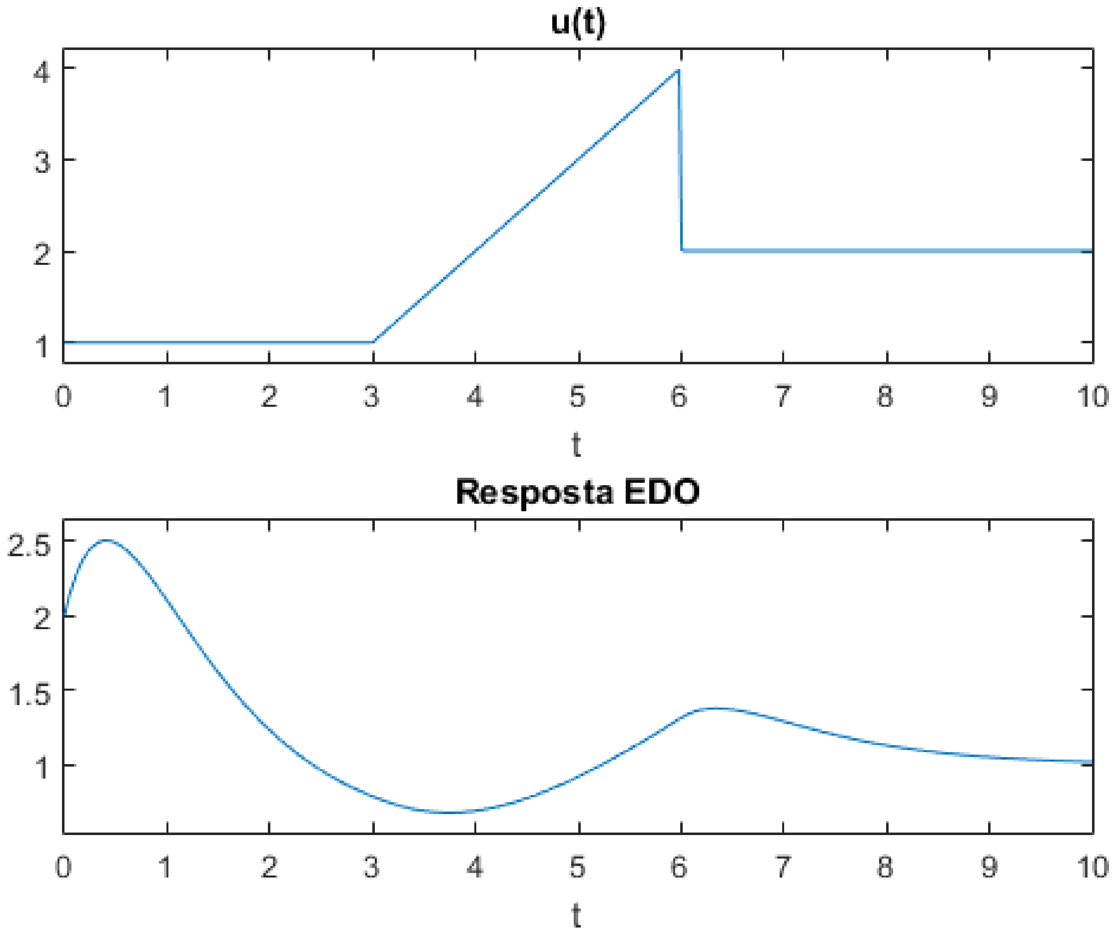
$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = f(t), \qquad y(0) = 2, \qquad \dot{y}(0) = 3$$

$$f(t) = 1 \qquad t \leqslant 3$$

$$f(t) = t - 2 \qquad 3 < t < 6$$

$$f(t) = 2 \qquad t \geqslant 6$$

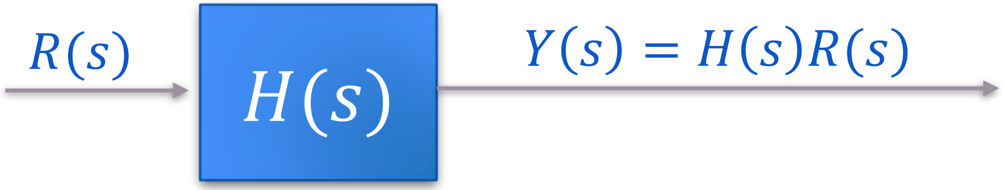
```
syms s t Y
figure(1)
f=1+((t-2)-1)*heaviside(t-3)+(2-(t-2))*heaviside(t-6);
subplot(2,1,1)
ezplot(f,[0,10])
title('u(t)')
y0=2;
dy0=3;
F=laplace(f,t,s);
Y1=s*Y-y0;
Y2=s*Y1-dy0;
Sol_s=solve(Y2+3*Y1+2*Y-F,Y);
Sol_t=ilaplace(Sol_s,s,t);
subplot(2,1,2)
ezplot(Sol_t,[0,10])
title('Resposta EDO')
```



FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

No domínio de Laplace, portanto,

$$Y(s) = H(s)R(s)$$



Chamamos função de transferência a relação entre a entrada e a saída do sistema considerando nulas as condições iniciais, no domínio de Laplace,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = H(s)$$

veja que a função de transferência não depende da entrada, é uma característica do sistema.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s - z_1)(s - z_2)...(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n)}$$

onde: z_i são os zeros e p_i são os pólos da função de transferência.

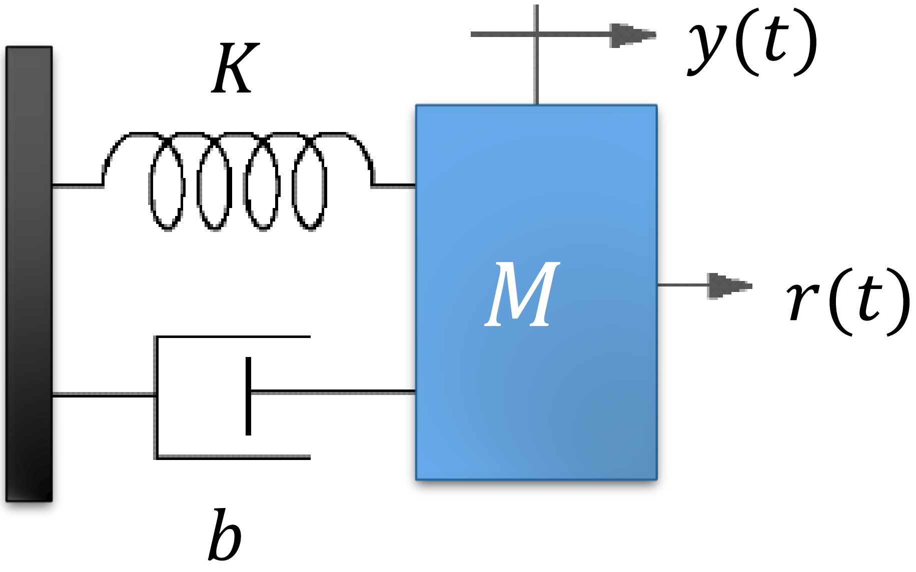
Os pólos e zeros tem um papel importante na determinação do comportamento dinâmico do sistema. Podemos visualizar o tipo de comportamento dinâmico associado a cada tipo de pólo, e esse assunto será tratado em detalhes no estudo de sistemas de primeira e segunda ordem.

CARACTERÍSTICAS

- Se a FT de um sistema é conhecida, a resposta do mesmo pode ser analisada para diferentes formas de excitação (entrada), com a finalidade de compreender a natureza e o comportamento do sistema;

- A FT pode ser obtida experimentalmente pela introdução de sinais de entrada conhecidos e estudando-se as respostas obtidas.

EXEMPLO



$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} =?$$

$$M\frac{d^2}{dt^2}y(t) + b\frac{d}{dt}y(t) + K\,y(t) = r(t)$$

$$\mathcal{L}\left[M\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right] + \mathcal{L}\left[b\frac{d}{dt}y(t)\right] + \mathcal{L}[K\,y(t)] = \mathcal{L}[r(t)\,]$$

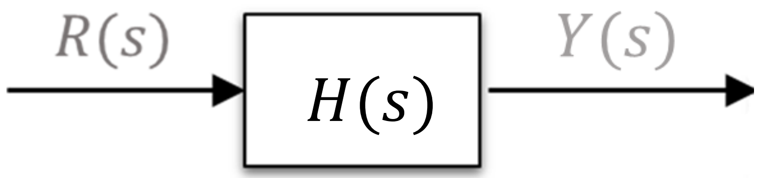
$$M[s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\,] + b[sY(s) - \ y(0)] + KY(s) \ = R(s)$$

$$Ms^2Y(s) + bsY(s) + KY(s) \ = R(s)$$

$$Y(s)[Ms^2 + bs + K] = R(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + K}}$$

Diagrama de blocos:



DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Comando `tf`

```
num=[4 16 12]
den=[ 1 12 44 48 0]
sys=tf(num,den)
```

Comando `zpk`

```
z =[ -3; -1];
p = [0; -6.0000; -4.0000; -2.0000];
K = [4];
sys=zpk(z,p,K)
```

```
[z,p,K]=tf2zp(num,den)
```

```
[num,den]=zp2tf(z,p,K)
```

PRINTSYS

```
z=[-1;-1;1;1];
p=[-j;-j;j;j];
K=0.5;
sys=zpk(z,p,K)
[num,den]=zp2tf(z,p,K)
printsys(num,den,'s')%só MatLab
```

MatLab:

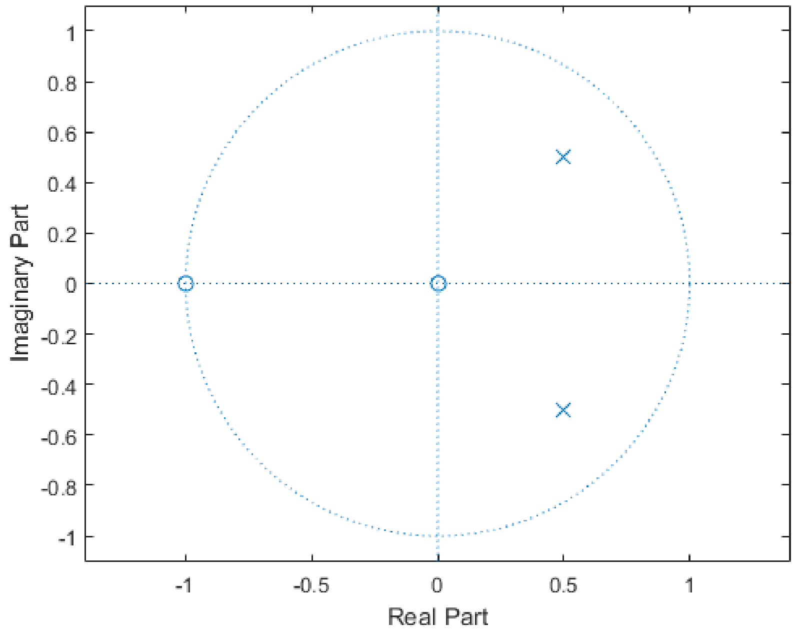
```
num =

    0.5000         0   -1.0000         0    0.5000


den =

     1     0     2     0     1


num/den =

   0.5 s^4 - 1 s^2 + 0.5
   ---------------------
      s^4 + 2 s^2 + 1
```

Octave:

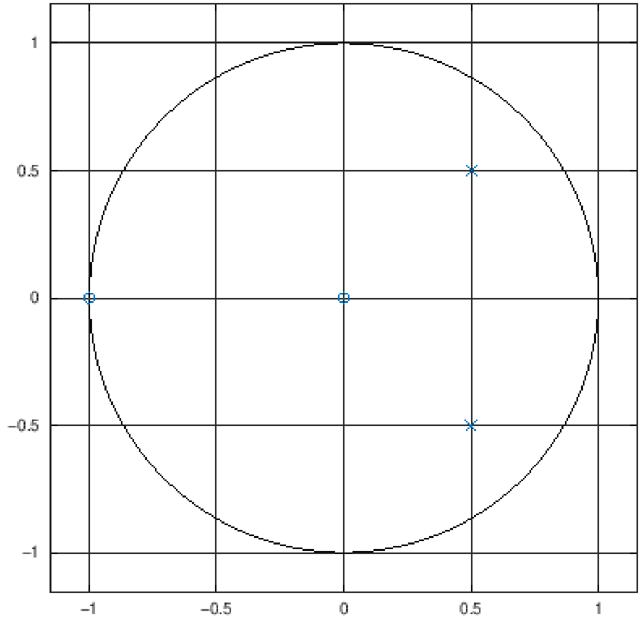
```
Transfer function 'sys' from input 'u1' to output ...

      0.5 s^4 - s^2 + 0.5
 y1:  -------------------
        s^4 + 2 s^2 + 1

Continuous-time model.
num =

   0.50000   0.00000  -1.00000   0.00000   0.50000

den =

   1   0   2   0   1
```

ZPLANE

MatLab:



Octave:




```
num=[ 1 1]
den=[ 1 -1 0.5]
sys=tf(num,den)
[z,p,K]=tf2zp(num,den)
zplane(num,den)
```

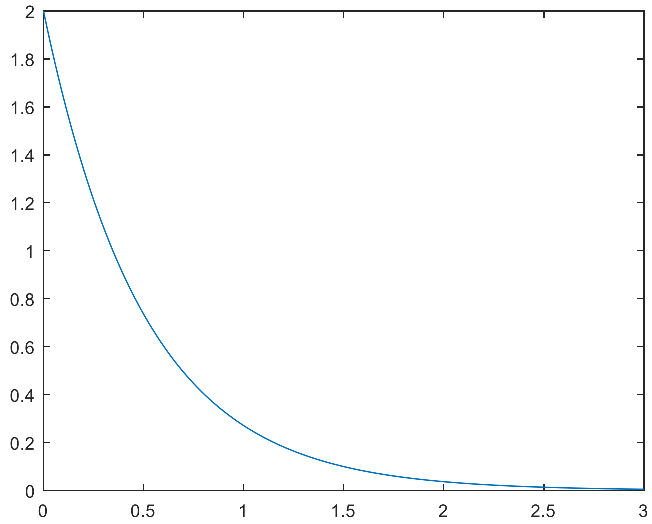
RECORDANDO...

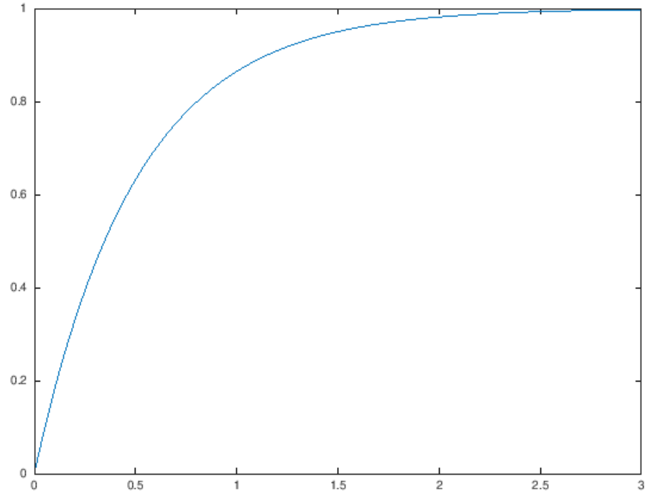
Aprendemos no Módulo III um método numérico para encontrar a resposta para uma entrada específica através dos comandos,

- `step`
- `impulse`

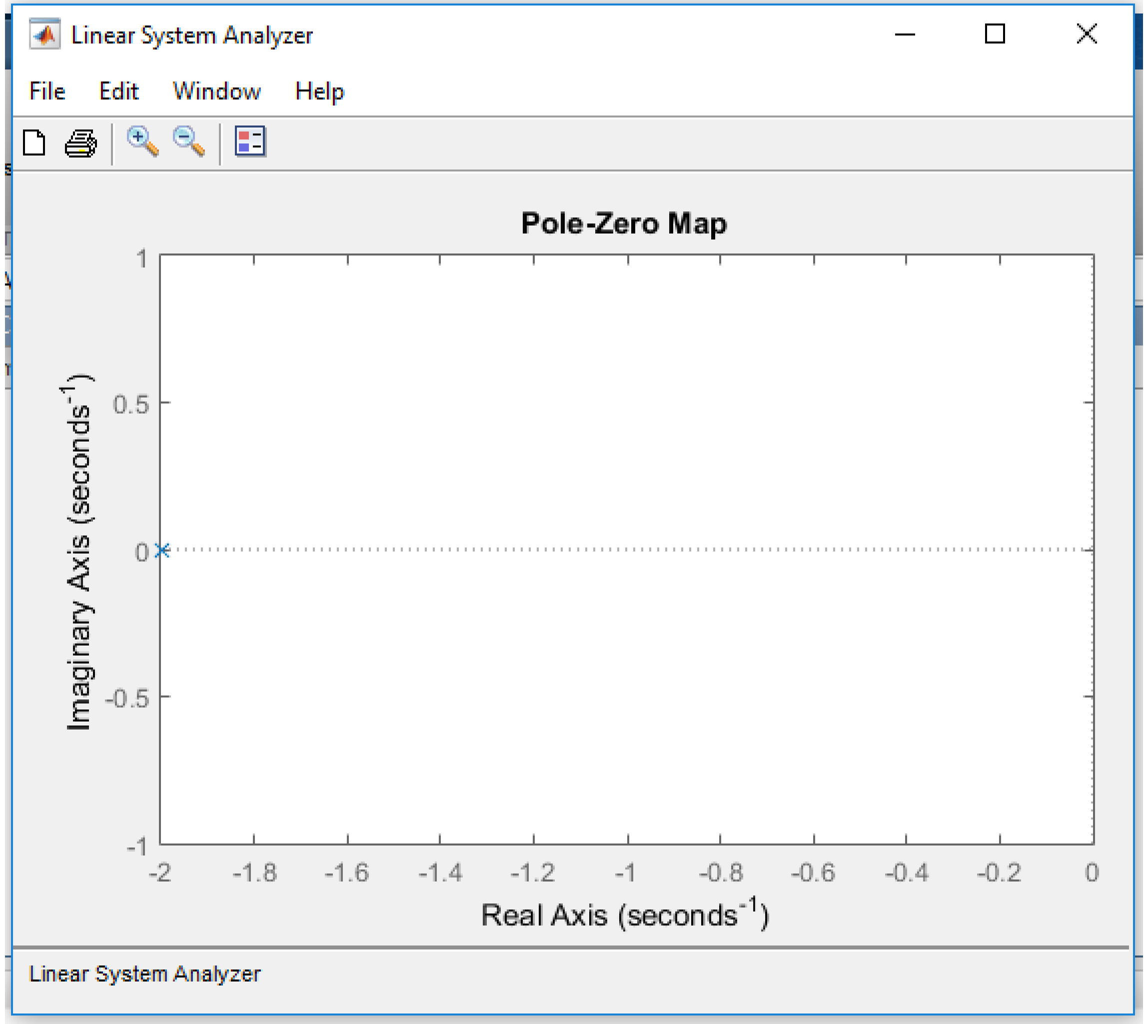
$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

```
num = 2; den = [1 2];
t = 0:3/300:3; % 3 s de simulacao
sys=tf(num,den)
y = impulse(sys,t);
plot(t,y)
y = step(sys,t);
plot(t,y)
```

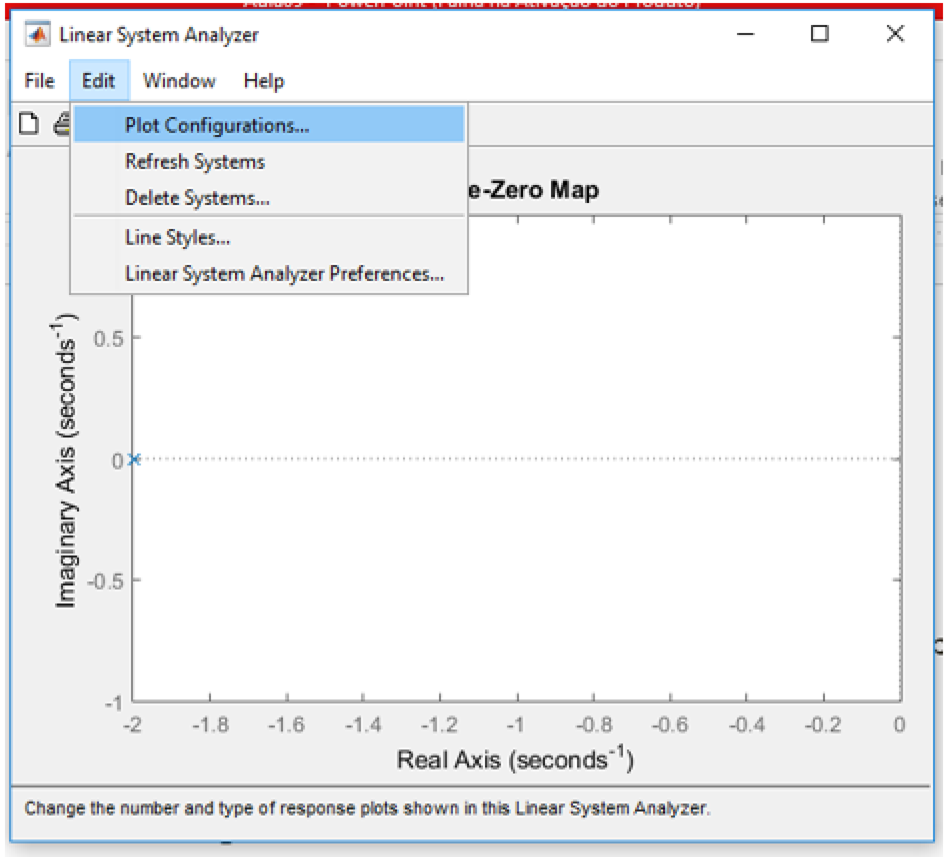


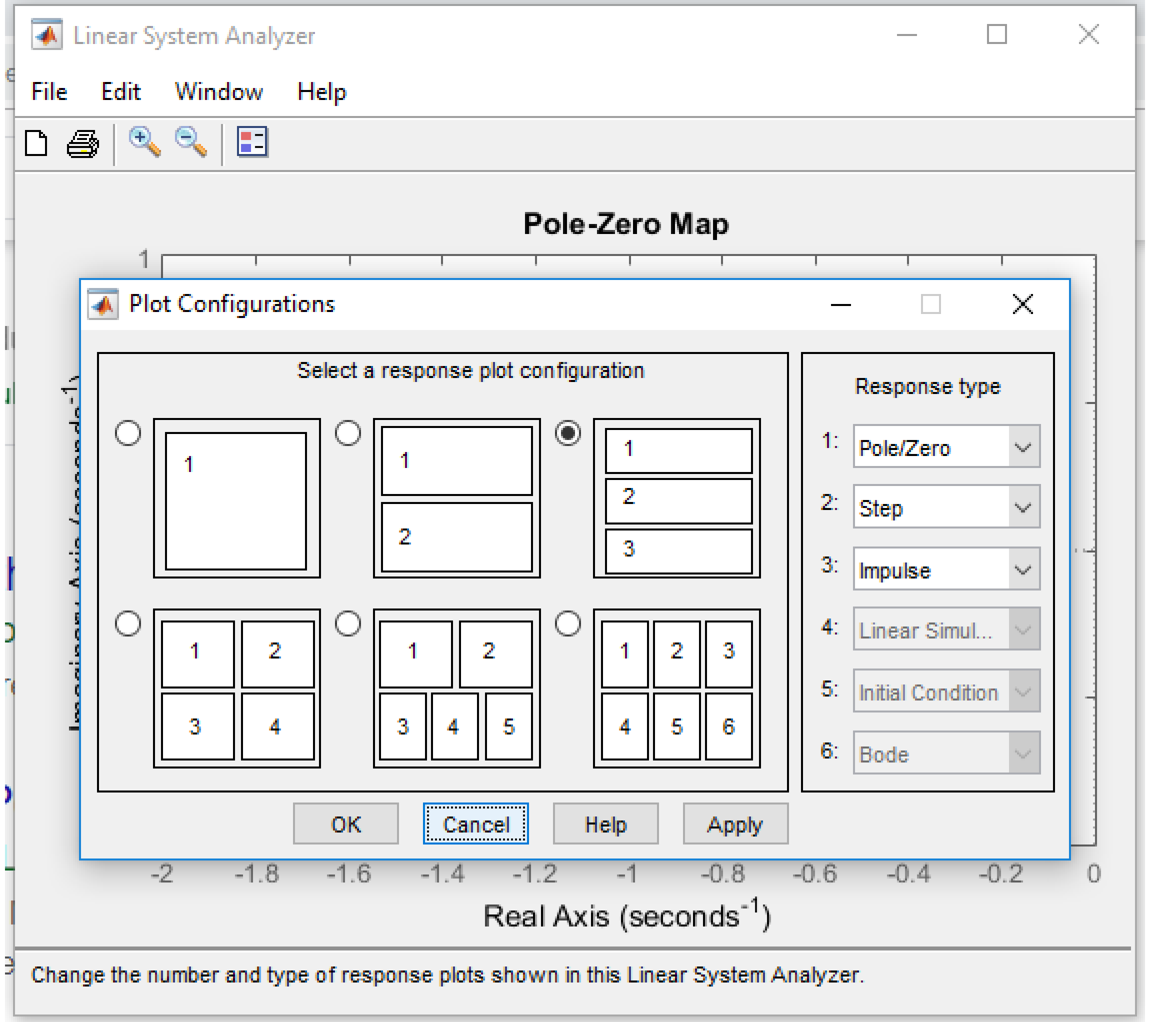


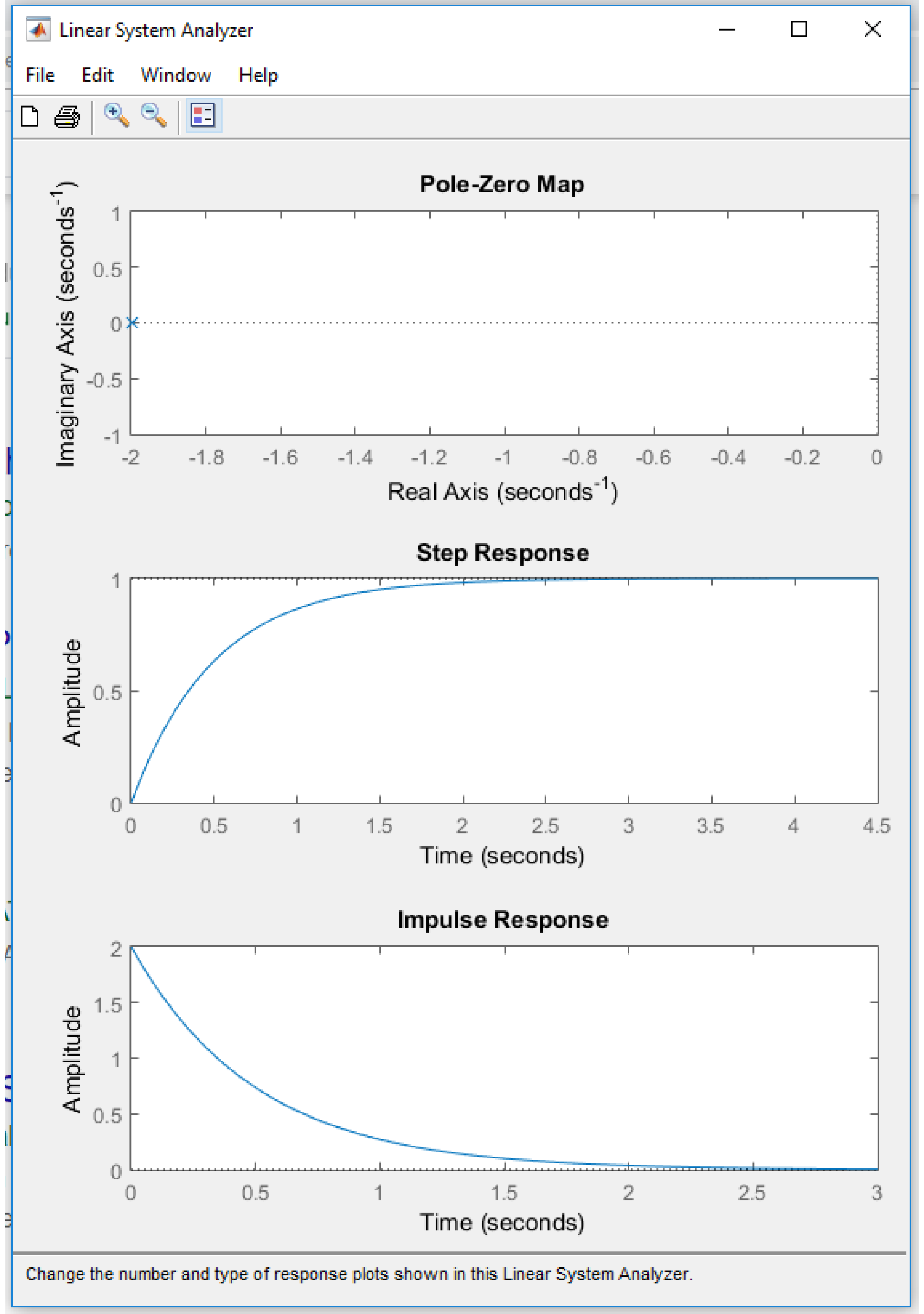
```
close all; clear all; clc
num=[2];
den=[1 2];
sys=tf(num,den);
printsys(num,den)
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
ltiview('pzmap',sys);
```



ltiview : **Somente MatLab...**


Linear System Analyzer
File
Edit
Window
Help
Plot Configurations...
Refresh Systems
Delete Systems...
Line Styles...
Linear System Analyzer Preferences...
e-Zero Map
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)
Change the number and type of response plots shown in this Linear System Analyzer.


Linear System Analyzer
File
Edit
Window
Help
Pole-Zero Map
Plot Configurations
Select a response plot configuration
Response type
1: Pole/Zero
2: Step
3: Impulse
4: Linear Simul...
5: Initial Condition
6: Bode
OK
Cancel
Help
Apply
Real Axis (seconds-1)
Change the number and type of response plots shown in this Linear System Analyzer.


Linear System Analyzer
File Edit Window Help
Pole-Zero Map
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
Step Response
Amplitude
Time (seconds)
Impulse Response
Amplitude
Time (seconds)
Change the number and type of response plots shown in this Linear System Analyzer.

ESTUDO DE CASO

EXERCÍCIO 1

```
T=20;
s=0.632*T;
delta=0.001;
%find(y20==s)
find(y20<s+delta & y20>s-delta)
```

A função de transferência de um termômetro (ou seja, transformada de Laplace da saída pela transformada de Laplace da entrada), é

$$G(s) = \frac{1}{90s+1}$$

Responda às seguintes questões,

1. Quanto tempo você deverá esperar para medir sua febre de 40°C?
2. Em qual instante de tempo o termômetro atingiu 63, 2% do real valor da febre?
3. Modifique a equação para que o termômetro atinja o valor definido no item anterior duas vezes mais rápido.

FIM DO QUINTO MÓDULO

Dilbert says,
The road to success… is
always under construction!