Teorema de Adição de Harmônicos Esféricos

[J. D. Jackson; Classical Electrodynamics; Cap. 3]

[Carmen L.R. Braga; Notas de Física Matemática; Cap. 4]

Matéria vista na duas aulas passadas

$$\nabla^2\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

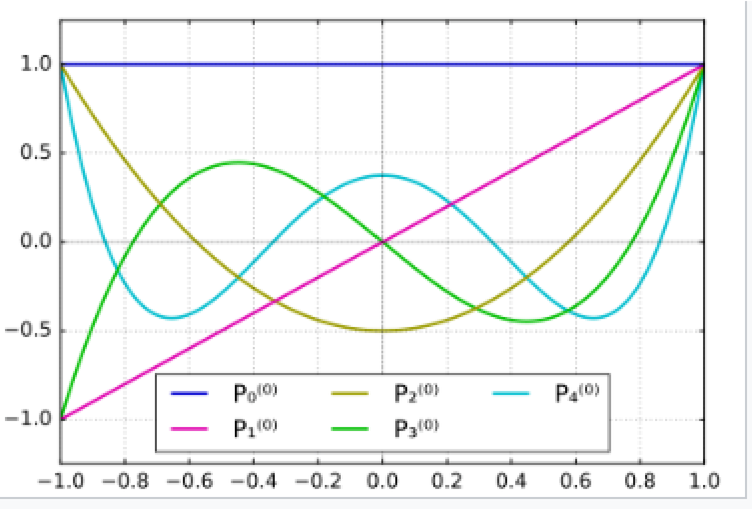
$$\Rightarrow\ \phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{\ell=0}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{R_{\ell m}}{r}Y_{\ell m}(\theta,\varphi);\ \frac{R_{\ell m}}{r}=A_{\ell m}r^{\ell}+\frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}};$$

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi};\ P_\ell^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_\ell}{dx^m}$$

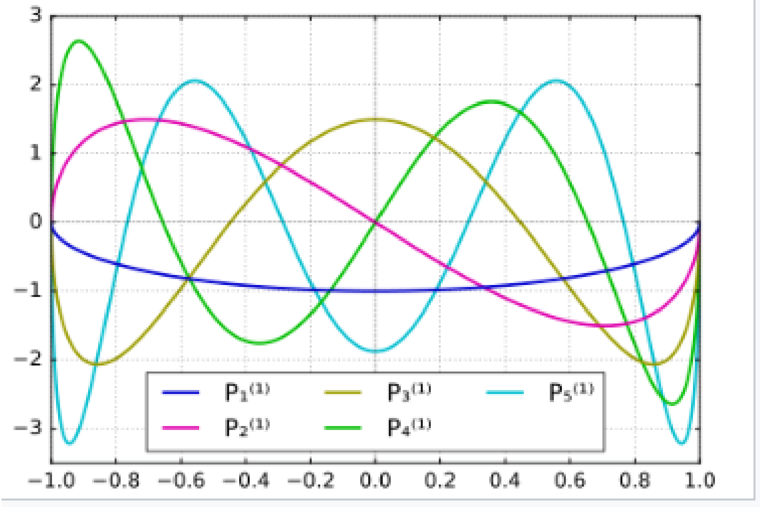
$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_{\ell' m'}^*(\theta,\varphi)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=\delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$$

Valores especiais

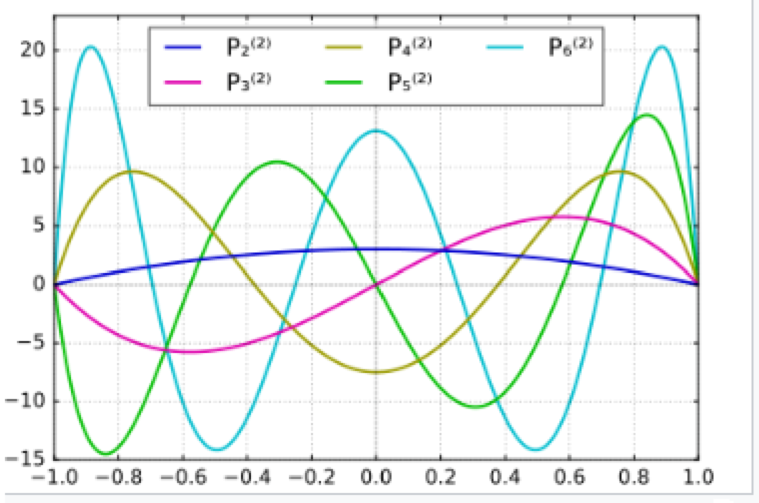
$$Y_{\ell 0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_\ell(\cos\theta);\ Y_{\ell m}(0,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\delta_{m0};\ \ [P_\ell^m(1) = \delta_{m0}]$$



Associated Legendre functions for m = 0



Associated Legendre functions for m = 1



Associated Legendre functions for m = 2

Desenvolvimento de uma função em harmônicos esféricos

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\varphi);\ A_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta,\varphi)\, g(\theta,\varphi)\, d\Omega;\ \ d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Nota

$$[g(\theta,\varphi)]_{\theta=0} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{lm}Y_{\ell m}(0,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{lm}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m0} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}A_{\ell 0}$$

$$A_{\ell 0} = \int Y_{\ell 0}^{*}(\theta,\varphi)g(\theta,\varphi)d\Omega = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\int P_{\ell}(\cos\theta)g(\theta,\varphi)d\Omega$$

Invariância do auto-valor ℓ em uma rotação de eixos $\theta \to \theta';\ \varphi \to \varphi'$

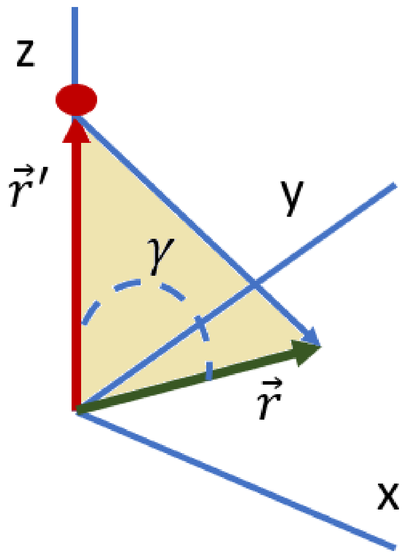
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \frac{\widehat{\mathcal{L}^2}}{r^2}\phi = 0;\ \ \widehat{\mathcal{L}^2} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

mas, para um par de valores (ℓ, m);

$$\phi \to \frac{R_{\ell m}}{r}Y_{\ell m}(\theta,\varphi);\ \ \frac{d^2R_{\ell m}}{dr^2} = \ell(\ell\ +1)R_{\ell m} \Longrightarrow\ \widehat{\mathcal{L}^2}Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

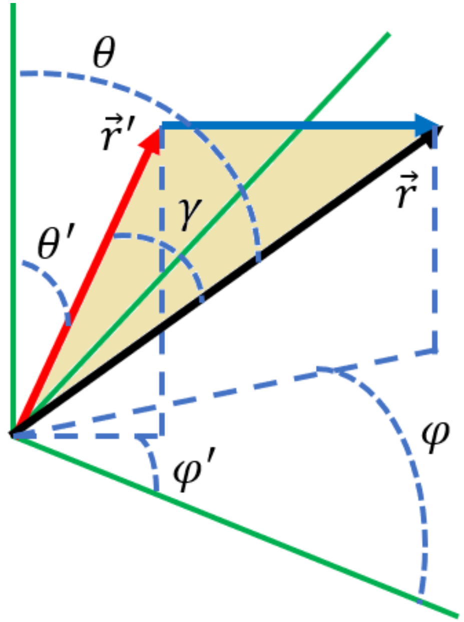
→ os harmônicos esféricos $Y_{\ell m}$ são auto-funções do operador momento angular, de forma que o auto-valor ℓ não se altera em uma rotação de eixos

Desenvolvimento de $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ em uma série em polinômios de Legendre



$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\sum_{\ell=0}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\gamma)$$

Não muito útil, porque só é válida se $\vec{r}'$ ao longo do eixo z



- Para tornar o resultado mais geral fazemos um rotação de eixos, de forma que $\vec{r}'$ tenha coordenadas (θ',φ') e $\vec{r}$ coordenadas (θ,φ) no novo sistema.
- É fácil verificar que

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

- Portanto $P_\ell(\cos\gamma)$ pode ser desenvolvido em harmônicos esféricos em termos de (θ,φ) e (θ',φ'). Consideremos inicialmente (θ',φ') como parâmetros fixos e, levando em conta que ℓ não se altera em uma rotação de eixos, temos

$$P_\ell(\cos\gamma)=\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell m}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

onde

$$A_{\ell m}(\theta', \varphi') = \int Y^*_{\ell m}(\theta, \varphi) P_\ell(\cos\gamma) d\Omega$$

Consideremos agora o desenvolvimento de uma função $g(\theta, \varphi)$ nos harmônicos esféricos referenciados ao eixo que passa por $\vec{r}\,'$, com as coordenadas (γ, β),

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\gamma, \beta);\ A_{\ell m} = \int Y^*_{\ell m}(\gamma, \beta) g(\theta, \varphi) d\Omega;\ \ d\Omega = \sin\gamma d\gamma d\beta$$

Podemos, em particular, tomar $g(\theta, \varphi) = Y^*_{\ell m}(\theta, \varphi)$. Neste caso, não há o somatório sobre ℓ e

$$Y^*_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sum_{n=-\ell}^{\ell} A_{\ell n} Y_{\ell n}(\gamma, \beta);\ \ A_{\ell n} = \int Y_{\ell n}(\gamma, \beta) Y^*_{\ell m}(\theta, \varphi) d\Omega;\ \theta(\gamma, \beta);\ \varphi(\gamma, \beta)$$

$$\Rightarrow\ A_{\ell 0} = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \int Y^*_{\ell m}(\theta, \varphi) P_\ell(\cos\gamma) d\Omega = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} A_{\ell m}(\theta', \varphi')$$

Portanto,

$$A_{\ell m}(\theta',\varphi') = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}A_{\ell 0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,[Y_{\ell m}^{*}(\theta,\varphi)]_{\gamma=0}$$

mas

$$[\theta(\gamma,\beta),\varphi(\gamma,\beta)]_{\gamma\to 0} \to (\theta',\varphi') \;\;\Longrightarrow\;\; A_{\ell m}(\theta',\varphi') = \frac{4\pi}{2\ell+1}Y_{\ell m}^{*}(\theta',\varphi')$$

Com este resultado, obtemos o muito útil *Teorema de Adição de Harmônicos Esféricos*

$$\boxed{P_{\ell}(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^{*}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}$$

Se fizermos $\gamma = 0;\; P_{\ell}(1) = 1$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_{\ell m}(\theta,\varphi)|^{2} = \frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

Regra de Soma para os Harmônicos Esféricos

Usando este resultado, obtemos a muito útil relação

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}$$