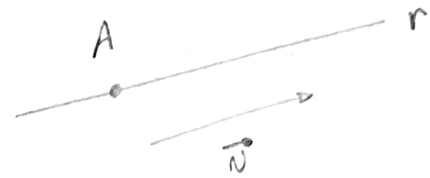
Geometria analítica no plano ($\mathbb{R}^2$)

Alguns objetivos geométricos como as retas, elipses, hiperboles e parábolas, podem ser representadas no plano. Para isso, considera-se o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, nele pode-se considerar a base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j})$ sobre os eixos coordenados.

Equações da reta no plano

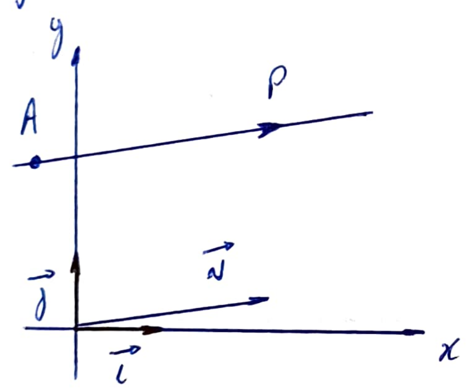
Definição: (Vetor diretor)

Qualquer vetor não-nulo paralelo a uma reta é chamado de vetor diretor dessa reta.



Equação vetorial da reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não-nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do espaço pertença à reta r, é necessário e suficiente que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam colineares, isto é:



$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$$

$$P - A = \lambda \vec{v}$$

$$\boxed{P = A + \lambda \vec{v}}$$

r.

Essa é a chamada equação vetorial da reta, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é o parâmetro. $(-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty)$

Observação:

i) Na equação $A + \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ quando λ percorre os números reais, nós percorremos a reta.

Equações paramétricas da reta.

Sejam $(\vec{i}, \vec{j})$ um sistema de coordenadas, $P(x, y)$ e $A(x_0, y_0)$ um ponto genérico e um ponto conhecido da reta r, respectivamente, e $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ um vetor de mesma direção de r. Então, $P(x, y)$ na reta, deve satisfazer:

$$P = A + \lambda \vec{v} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta)$$

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (\lambda\alpha, \lambda\beta)$$

$$(x, y) = (x_0 + \lambda\alpha, \; y_0 + \lambda\beta)$$

logo

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}$$

$\hookrightarrow A$ $\qquad$ $\hookrightarrow \vec{v}$

Este sistema é conhecido como sistema de equações paramétricas da reta.

Equações simétricas da reta

Através do sistema de equações paramétricas da reta, temos:

$$x = x_0 + \lambda\alpha \Rightarrow \lambda = \frac{x - x_0}{\alpha}$$

$$y = y_0 + \lambda \beta \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{y - y_0}{\beta}$$

logo $\boxed{\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} \quad , \quad \alpha, \beta \neq 0}$

Essa é a chamada equação simétrica da reta.

Observação:

Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, então o vetor diretor é paralelo ao eixo x ou y, respectivamente.

Equações reduzidas da reta

Através da equação simétrica da reta, temos:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \quad , \quad \alpha, \beta \neq 0$$

$$y = \left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right) \cdot \beta + y_0$$

$$y = \underbrace{\frac{\beta}{\alpha}}_{m} x \underbrace{- \frac{\beta}{\alpha} x_0 + y_0}_{n}$$

$$\therefore \boxed{y = mx + n}$$

Essa é a equação reduzida da reta.

Posições relativas de duas retas no plano

Duas retas no plano podem ser:

- **Paralelas**: Se seus vetores diretores são paralelos, neste caso pode acontecer de serem:

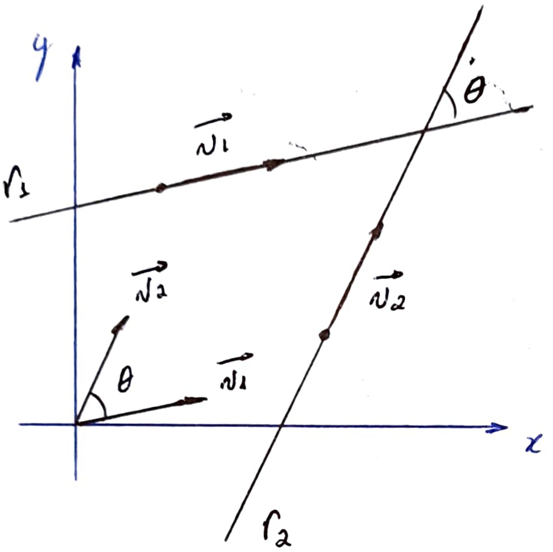
  i) **Coincidentes**: se as duas retas são as mesmas.

  ii) **Não-coincidentes**: são retas distintas

- **Concorrentes**: Se sua intersecção é um único ponto. Neste caso os vetores diretores não são paralelos.

Considerações:

- Medida <u>Ângulo de duas retas</u>: chama-se medida ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2.



$$\cos\theta = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\|},$$

sendo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

- <u>Condição de paralelismo de duas retas</u>: pode-se definir a condição de paralelismo de duas retas pelos vetores diretores destas retas. Se $\vec{v_1} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2)$ são os vetores diretores das retas r_1 e r_2, respectivamente, então, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\vec{v_1} = \lambda \vec{v_2}, \text{ ou seja, } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$$

pode-se dizer que $r_1 \parallel r_2$.

- Condição de ortogonalidade de duas retas:

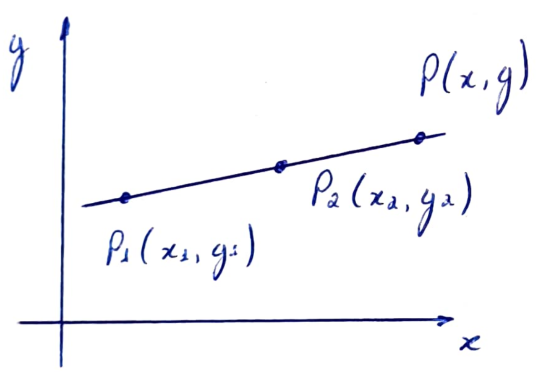
A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores diretores $\vec{v_1} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2)$, que definem as direções dessas retas, isto é:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$$

Logo, $r_1 \perp r_2$.

- Ponto que divide um segmento de reta numa razão dada

Dados os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, diz-se que um ponto $P(x, y)$ divide o segmento de reta P_1P_2 na razão r se:



$$\overrightarrow{P_1P} = r\,\overrightarrow{P_2P}$$

$$(x - x_1, y - y_1) = r(x - x_2, y - y_2)$$

$$x - x_1 = r(x - x_2)$$

$$y - y_1 = r(y - y_2)$$

$$x - x_1 = rx - rx_2$$

$$x - rx = -rx_2 + x_1$$

$$x(1 - r) = -rx_2 + x_1$$

$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}$$

De forma análoga, temos: $y = \dfrac{y_1 - r y_2}{1 - r}$

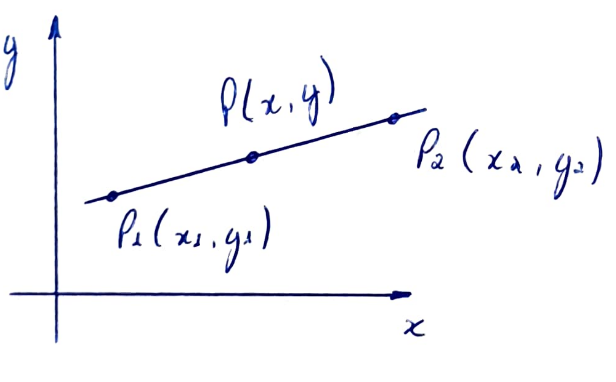
Logo, $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 - r x_2}{1 - r} \\ y = \dfrac{y_1 - r y_2}{1 - r} \end{cases}$

onde, (x, y) são as coordenadas do ponto P que divide o segmento de reta P_1P_2 na razão r.

<u>Observação:</u>

- <u>Ponto que divide o segmento de reta ao meio</u>

No caso do ponto P dividir o segmento de reta P_1P_2 ao meio, temos:



$\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{P_2P}$

Portanto, a razão r é -1.

Logo, $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$