São Paulo, abril de 2020.

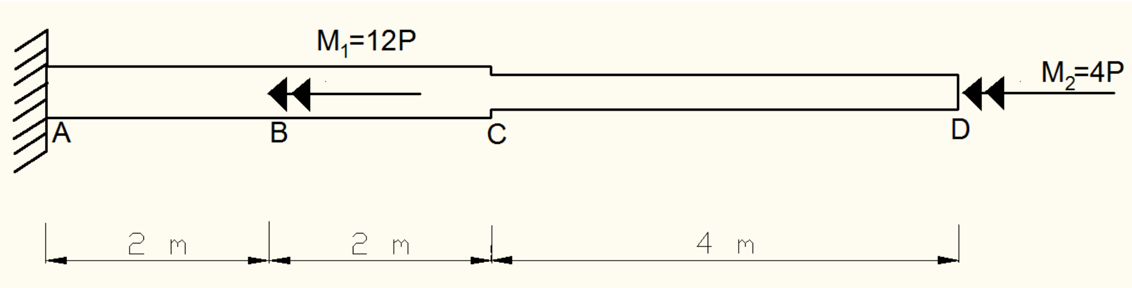
1. Para o eixo a seguir submetido aos momentos de torção indicados, obtenha:

a) O maior valor admissível de P;

b) Para o P obtido no item anterior, calcule a rotação em D;

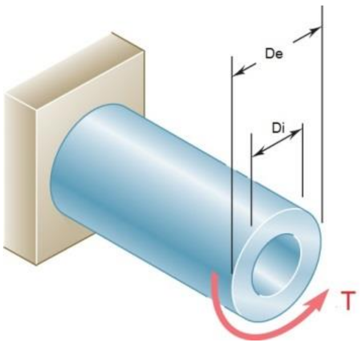
Adote: G = 800 kN/cm^2; tensão de cisalhamento admissível = 1 kN/cm^2

Diâmetro do trecho AC = 8 cm; Diâmetro do trecho CD = 4 cm.



Resposta: P = 3,14 kN; b) Rot_d = -0,289 rad.

2. O eixo circular vazado está submetido a um momento de torção, conforme desenho. Sabe-se que o torque T vale 10 kN.m, no sentido indicado na figura. Sabendo que o diâmetro externo De =12 cm, o diâmetro interno Di é 8 cm e a tensão cisalhamento admissível é de 70 MPa, determine o valor máximo da tensão de cisalhamento e o coeficiente de segurança da peça.

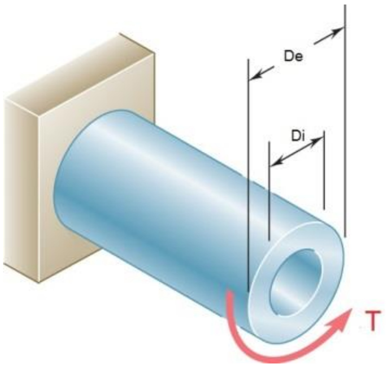


Resposta:

$$\tau = \frac{T.r}{J} = \frac{10.0,06}{\dfrac{\pi.(0,12^4 - 0,08^4)}{32}} = 36,7\ \ MPa$$

$$s = \frac{\bar{\tau}}{\tau} = \frac{70}{36,7} = 1,9$$

3. O eixo circular vazado está submetido a um momento de torção, conforme desenho. Sabe-se que o torque T vale 1 kN.m, no sentido indicado na figura. Sabendo que o diâmetro externo De =5 cm, o diâmetro interno Di é 4 cm e a tensão cisalhamento admissível é de 50 MPa, determine o valor máximo da tensão de cisalhamento e o coeficiente de segurança da peça.

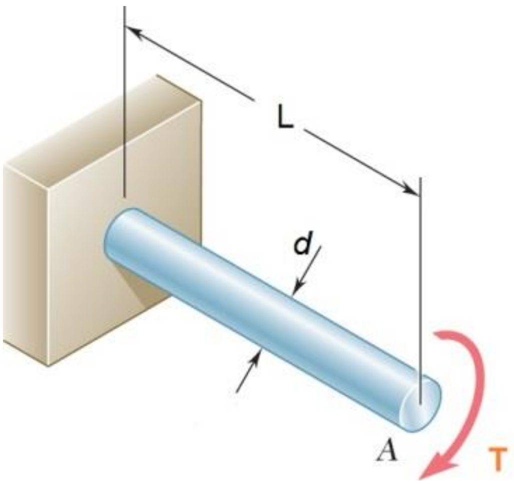


Resposta:

$$\tau = \frac{T.r}{J} = \frac{1.0,025}{\dfrac{\pi.(0,05^4 - 0,04^4)}{32}} = 69\ MPa$$

$$s = \frac{\bar{\tau}}{\tau} = \frac{50}{69} = 0,72$$

4. O eixo circular maciço está submetido a um momento de torção, conforme desenho. Sabe-se que o torque T vale 10 kN.m, no sentido indicado na figura. Sabendo que o diâmetro *d* =10 cm, L = 2 m e o módulo de elasticidade transversal é de 100 GPa. Determine o valor da rotação e a tensão de cisalhamento na seção A.

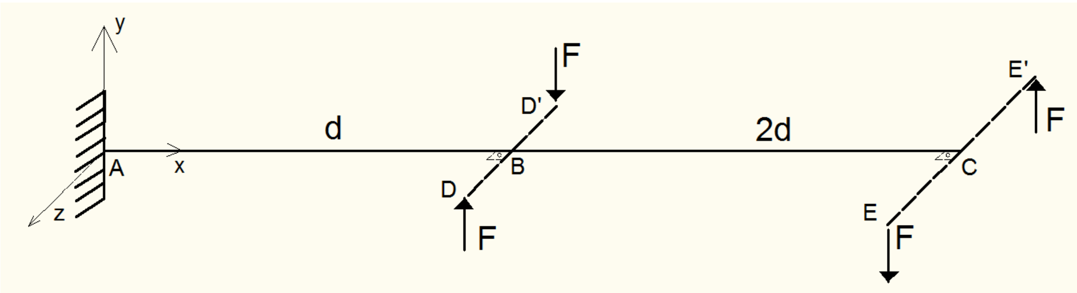


Resposta:

$$\theta_A = \frac{T.L}{G.J} = \frac{10.2}{100.10^6.\dfrac{\pi.(0{,}10^4)}{32}} = 0{,}020\ \ rad = 1{,}2^\circ$$

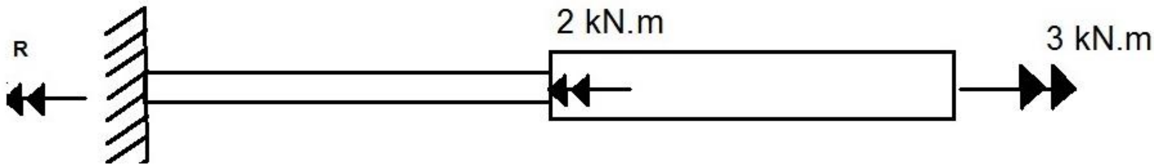
$$\tau = \frac{T.r}{J} = \frac{10.0{,}05}{\dfrac{\pi.(0{,}10^4)}{32}} = 50.930\ \ kPa = 50{,}9MPa$$

5. A barra reta AC está no plano xy com seção transversal circular maciça de diâmetros “d” e “2d”, respectivamente, nos trechos AB e BC. Nos pontos B e C estão ligadas perpendicularmente à barra AC as barras rígidas DD’ e EE’ de comprimento, respectivamente, de 20 cm e 30 cm. Ou seja, as barras DD’ e EE’ estão contidas no plano yz. Determine o mínimo valor de “d”, sabendo que F = 10 kN e $\tau_{adm} = 1\ \ MPa$



Resposta: d = 17 cm.

a. Cálculo da reação:



$$\sum M\ \ = 0 : \rightarrow R + 2 - 3 = 0 \rightarrow R = 1\ \ kNm$$

b. Diagrama de torção:

c. Analise de tensão cisalhante.

i. Trecho AB. Para o calculo da tensão de cisalhamento, deve-se considerar momento torçor em módulo.

$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB}.(r_{\max})_{AB}}{J_{AB}} = \frac{1.{}^{d}\!/\!_{2}}{\frac{\pi.d^4}{32}} \le \bar{\tau} = 1000 \ kPa$$

$d \ge 0{,}17 \ m$

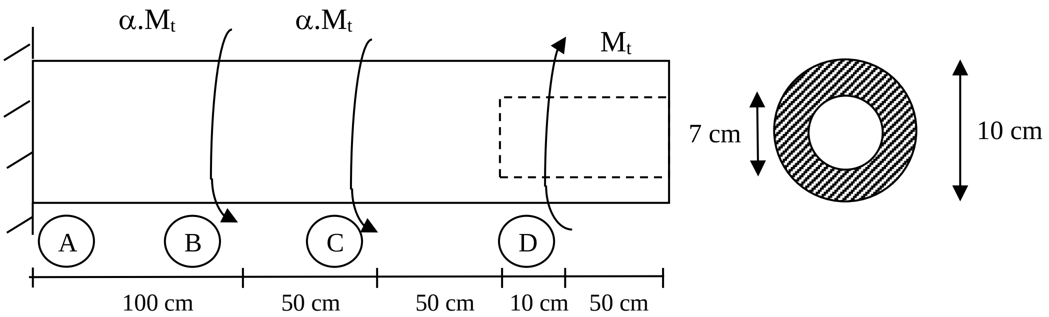
ii. Trecho BC

$$\tau_{BC} = \frac{T_{BC}.(r_{\max})_{BC}}{J_{BC}} = \frac{3.{}^{2d}\!/\!_{2}}{\frac{\pi.(2d)^4}{32}} \le \bar{\tau} = 1000 \ kPa$$

$d \ge 0{,}12 \ m$

$\therefore \qquad d = 17 \ cm$

6. Pede-se determinar o valor do parâmetro " α " nos seguintes casos: a) para que o giro da seção B seja nulo ($\phi_B = 0$); b) para que o giro da seção D venha a ser nulo ($\phi_D = 0$).



Respostas:

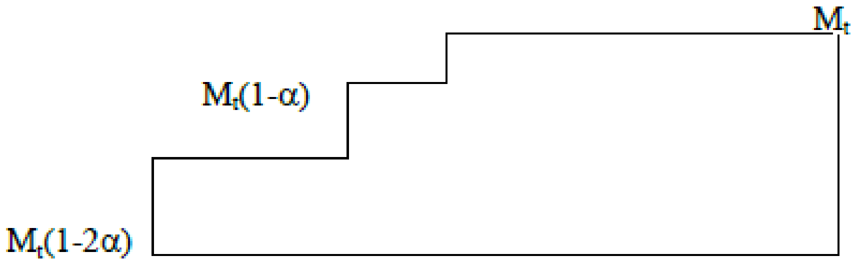
a) Para que o giro em B seja zero:

$$\varphi_B = \frac{M_t(1-2.\alpha).100}{G.J} = 0 \longrightarrow \alpha = {}^{1}\!/\!_{2}$$

b) Para que o giro em D seja zero:

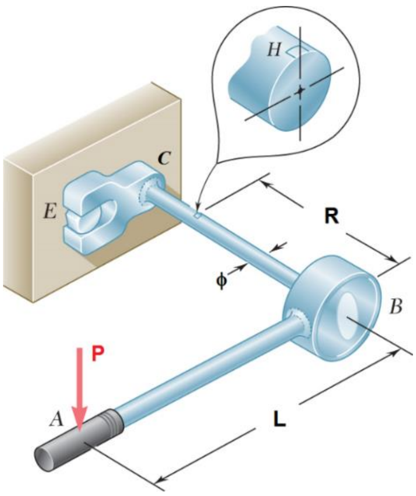
$$\varphi_D = \frac{32.M_t(1-2.\alpha).100}{G.\pi.10^4} + \frac{32.M_t(1-\alpha).50}{G.\pi.10^4} + \frac{32.M_t.50}{G.\pi.10^4} + \frac{32.M_t.100}{G.\pi.(10^4 - 7^4)} = 0 \longrightarrow$$

$$\alpha = \frac{6{,}632}{5} = 1{,}33$$



7. Uma chave de aranha é usada para desapertar um parafuso que representa um engaste, conforme figura. Sabendo que a força P exercida é de 1 kN, e suas dimensões sejam de L = 30 cm, R = 20 cm, distância BC de 25 cm e seu eixo maciço BC tem diâmetro ϕ = 2 cm. Determine:

a) todos os diagramas de esforços nos trechos ABC;
b) tensão cisalhante máxima devido a torção.



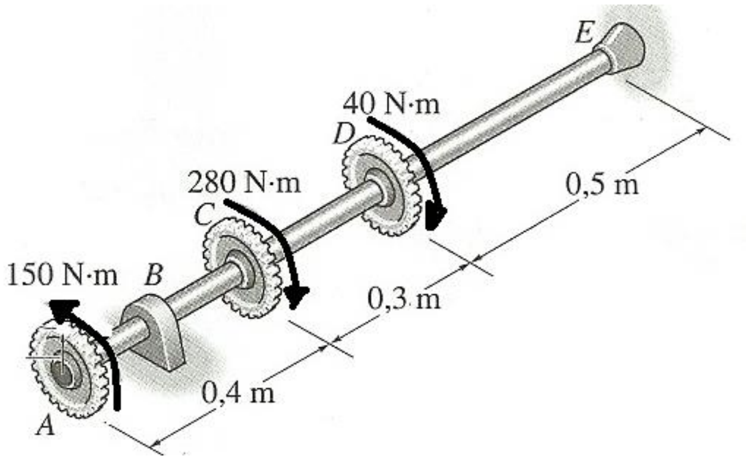
Respostas:

$$T = P.L = 1.30 = 30 \ \ kN.cm$$

Tensão cisalhante devido à torção:

$$\tau = \frac{T.r}{J} = \frac{30.1}{\frac{\pi.(2^4)}{32}} = 19{,}1 \ \ kN/cm^2$$

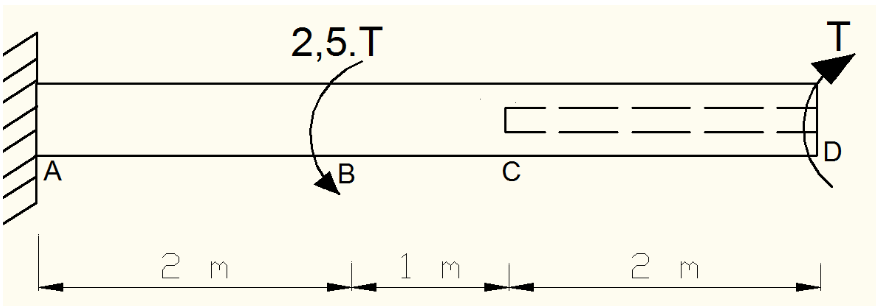
8. As engrenagens acopladas ao eixo de aço com a extremidade E fixa estão sujeitas aos torques mostrados na figura. Supondo que o módulo de elasticidade transversal seja de 80 GPa e o eixo tiver diâmetro de 14mm, determinar a máxima tensão cisalhante da estrutura e a rotação do eixo em A. O eixo gira livremente dentro do mancal em B.



Resposta:

τ_{max} = 315,6 MPa θ_A = - 0,212 rad

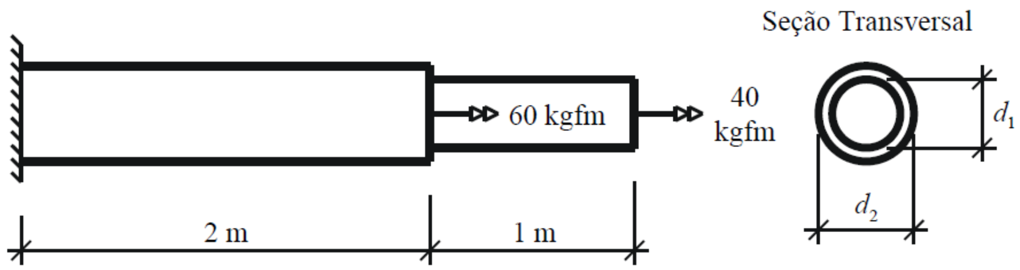
9. Calcular o valor admissível do momento torçor T considerando-se os sentidos indicados na figura. Para este valor, verificar se existe alguma seção, além do engaste, com giro nulo. Caso exista, determinar sua posição. Dados: τ_{adm} = 150 MPa, G = 8000 kN/cm^2. Diâmetro do trecho AC = 5cm; Trecho CD é de uma seção vazada de diâmetro interno de 3cm.



Resposta: T = 245,4 kN.cm. A posição a 4,74 m do engaste possui giro nulo.

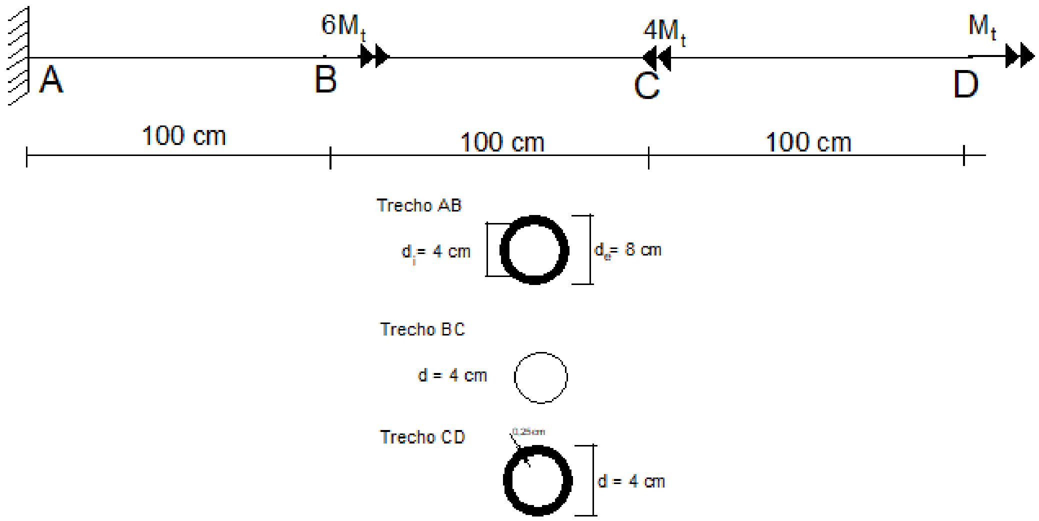
10. Achar os diâmetros d_1 e d_2.

São dados: $\begin{cases} \bar{\tau} = 800 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (tensão admissível ao cisalhamento)} \\ G = 210 \text{ GPa (módulo de elasticidade transversal)} \end{cases}$



Respostas: $d_1 = 2{,}95$ cm ; $d_2 = 4{,}00$ cm

11. Para o eixo ilustrado na fig. 9.7, considerando-se uma tensão cisalhante admissível de valor 10 kN/cm^2 e G = 10 000 kN/cm^2, determinar o maior valor de torção de referência que se pode aplicar e o diagrama de giro ao longo da mesma.

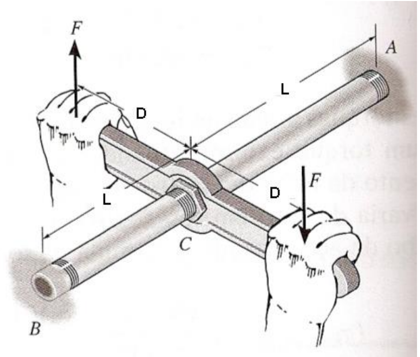


Resposta: M_t = 41,89 kN cm. $\theta_B = (1/300) rad$, $\theta_C = (-14/300) rad$, $\theta_D = (-4/300) rad$

12 A barra AB está engastada em A e livre em B. Aplica-se através de uma chave fixa em C uma força F = 200 N. Ambos os materiais são de cobre. Sendo que a barra AB possui um diâmetro externo de 25 mm e interno de 20mm e considere a chave com seção quadrada de 20mm. Sabe-se que L = 90cm, $\sigma^t_{adm} = \sigma^c_{adm} = 100 \ MPa$ e $\tau_{adm} = 40 \ MPa$ e o módulo de elasticidade transversal de 38 GPa. Pedem-se:

a) Determine o mínimo valor de “D” para que o conjunto não rompa (3 ptos);

b) Para o valor de “D” obtido no item (a), admita então a chave totalmente rígida e calcule os deslocamentos verticais dos pontos de aplicação da força F (2 ptos).



Resposta:

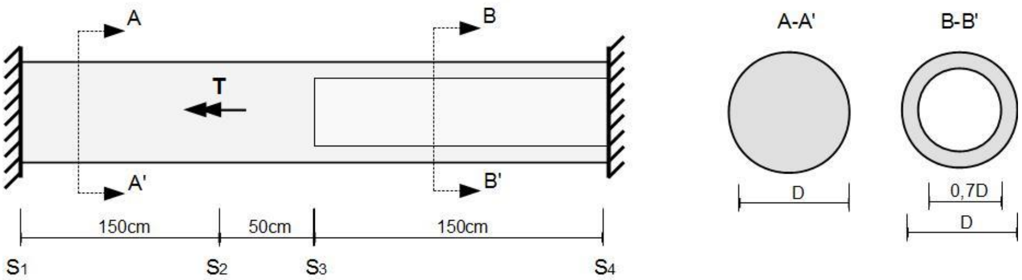
13. (Luís Bittencourt, 2016) Para a estrutura submetida ao momento torçor T abaixo, pede-se:

a) Diagrama de momento torçor;

b) Tensão de cisalhamento máxima no trecho entre as seções S2 e S3.

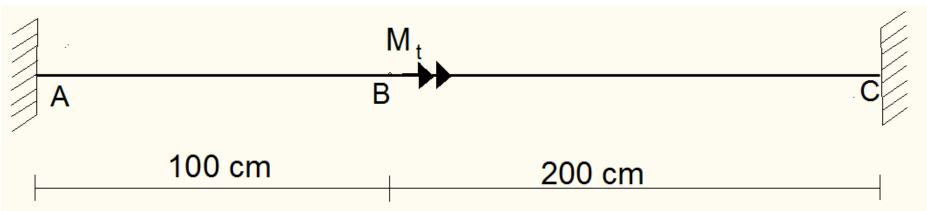
c) Rotação da seção S3 em relação à seção S4.

Dados: T = 100 kN.m, D = 10 cm. G = 8000 kN/cm²



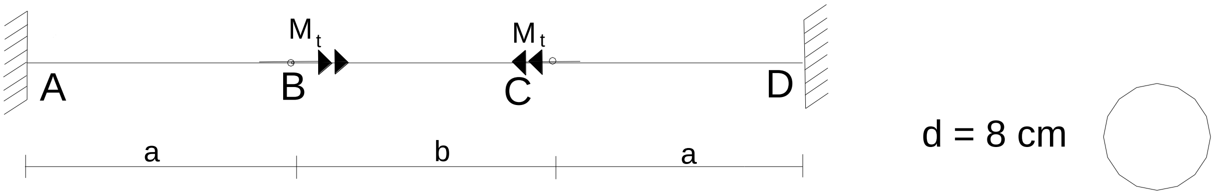
Respostas: a) Ts1 = -241,4 kNcm; Ts4 = 9758,6 kN.cm b) Tau = 49,7 kN/cm2 c) Rotc = 0,245 rad

14. Um eixo de seção circular cheia, com diâmetro de 8 cm, está engastado em ambas as extremidades e submetido a um momento de torção com posição e sentido conforme figura abaixo. Pede-se determinar o máximo valor de momento torçor (M_t), sabendo-se que a tensão tangencial na seção transversal não deve ultrapassar, em módulo, 10 kN/cm^2. Com o valor de M_t obtido, calcule o giro da seção B. Use G = 8000 kN/cm^2.

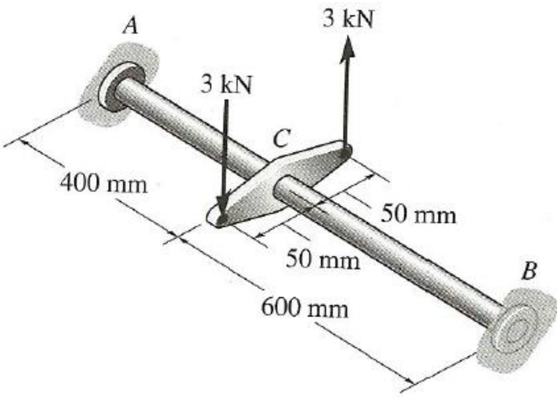


Resposta: M_t = 1508 kN cm. $\theta_B = 0{,}0313 \ rad$

15. Considere-se um eixo biengastado, com momentos torçores M_t aplicados nos pontos B e C, veja figura. Admitindo-se que o valor de G = 10 000 kN/cm^2, determinar a relação a/b para que a capacidade do eixo seja máxima. Para a relação a/b obtida e sendo a tensão de cisalhamento admissível igual a 10 kN/cm^2, determinar o valor de M_t.

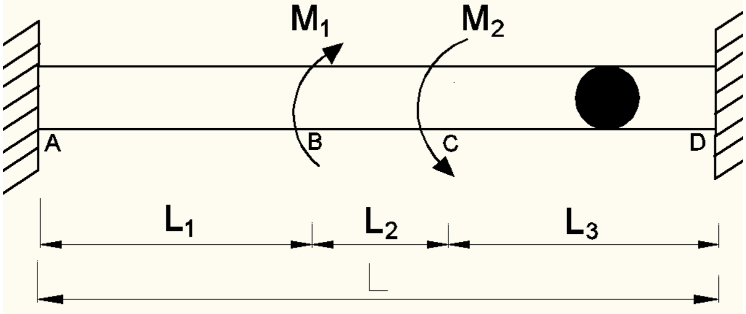


16. O eixo de aço tem diâmetro de 40mm e suas estremidades A e B são fixas. Se ele for submetido ao cojugado de forças, conforme desenho, qual será a tensão máxima de cisalhamento para as regiões AC e CB. Com essas tensões e sabendo que $\bar{\tau} = 10$ MPa, indique o coeficiente de segurança da estrutura.



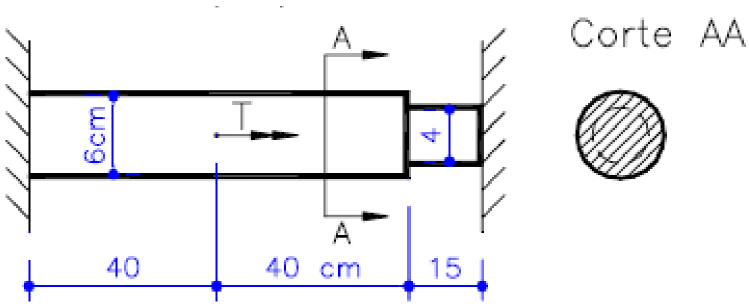
Resposta: τ_{AC} = 14,32 MPa; τ_{CB} = 9,55 MPa; s = 0,7

17. O eixo da figura a seguir é solicitado pelos momentos de torção M1 e M2. Determinar os momentos reativos MA e MD. Indique as respostas no espaço indicado.



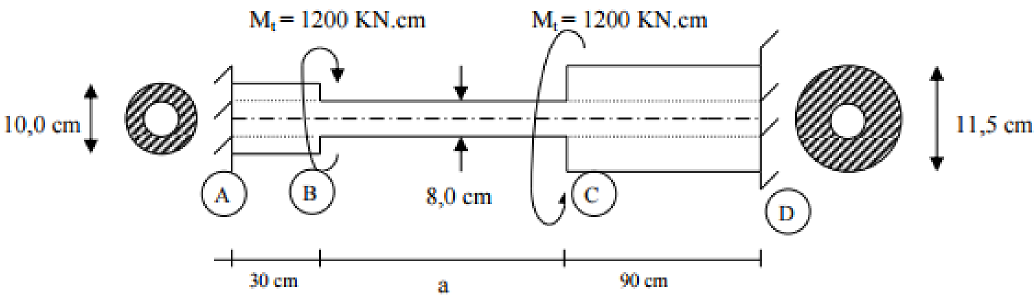
Respostas: M_A = M_D =

18. Calcular o valor máximo do momento T aplicado sabendo-se que o material suporta no máximo uma tensão de cisalhamento de $\tau_{máx}$ de 10 kN/cm^2.



Resposta: Tmáx = 489,0 kN.cm.

19. (a) Determinar a dimensão “a” de modo a se ter a mesma tensão de cisalhamento máxima nos trechos B-C e C-D. (b) Com tal dimensão pede-se a máxima tensão de cisalhamento no trecho A-B.



Respostas: $a = \dfrac{189739{,}20.(11{,}5^4 - 8^4)}{8^3.11{,}5.3924{,}04} = 110cm$

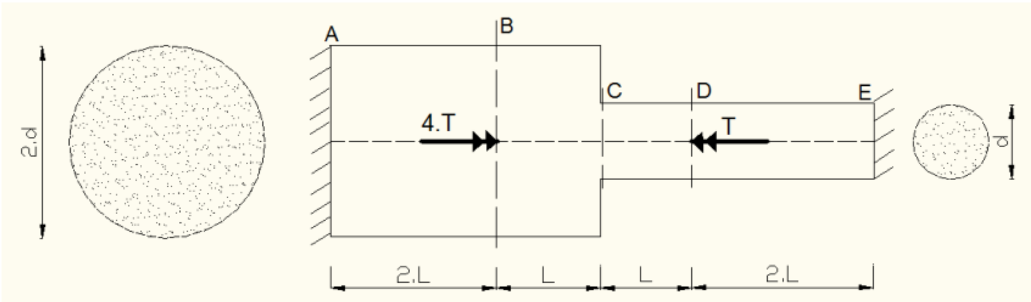
b. para a = 110 cm, o momento torçor e a tensão no trecho A-B é dada por:

$$\boxed{\begin{array}{c} R = 833{,}7KNcm \\ \tau_{A\text{-}B} = 7{,}14 \text{ KN/ cm}^2 \end{array}}$$

20. Para a estrutura abaixo, engastada em A e em E, com seções circulares maciças e os momentos torçores atuantes na seção B de **4.T** e na seção D de **T**, conforme indicados na figura a seguir, determinar:

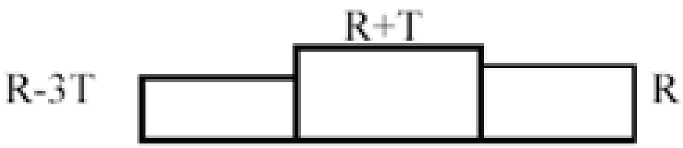
a) diagramas de momento torçor;
b) as tensões cisalhantes máximas nos trechos BC e CD;
c) os ângulos das rotações nas seções B e C.

Dados: T = 1 kN.cm. Expressar resultados em termos de L, d e G (unidades já compatíveis com T).



Resposta:

Problema hiperestático. Escrever o diagrama em função da reação R em E. Considerada no sentido da direita para esquerda positiva. Assim, o diagram de moneto torçor é:

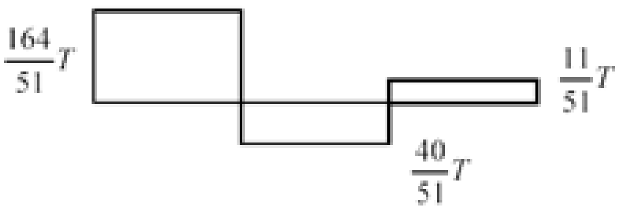


Usar a equação de compatibilidade de deslocamento, sabendo que as rotações em A e E são nulas.

$$\frac{32.(R-3T).2.L}{\pi.G.(2.d)^4}+\frac{32.(R+T).L}{\pi.G.(2.d)^4}+\frac{32.(R).2.L}{\pi.G.(d)^4}=0$$

$$R=\frac{-11}{51}T$$

a)



b) As tensões são dadas por:

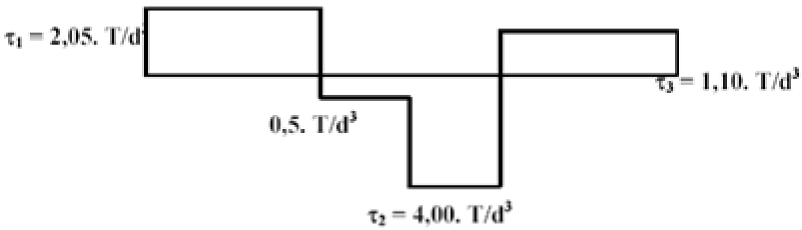
$$J = \frac{\pi . d^4}{32}$$

$$\tau = \frac{M_t r}{J} = \frac{16.M_t}{\pi . d^3}$$

$$\tau_3 = \frac{16.(\frac{11}{51}T)}{\pi . d^3} = 1{,}10\frac{T}{d^3}$$

$$\tau_2 = \frac{16.(\frac{40}{51}T)}{\pi . d^3} = 4{,}00\frac{T}{d^3}$$

$$\tau_1 = \frac{16.(\frac{164}{51}T)}{\pi . d^3} = 2{,}05\frac{T}{d^3}$$



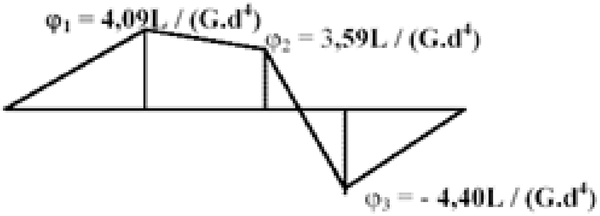
c) As rotações são dadas por:

$$\varphi = \frac{M_t L}{G.J}$$

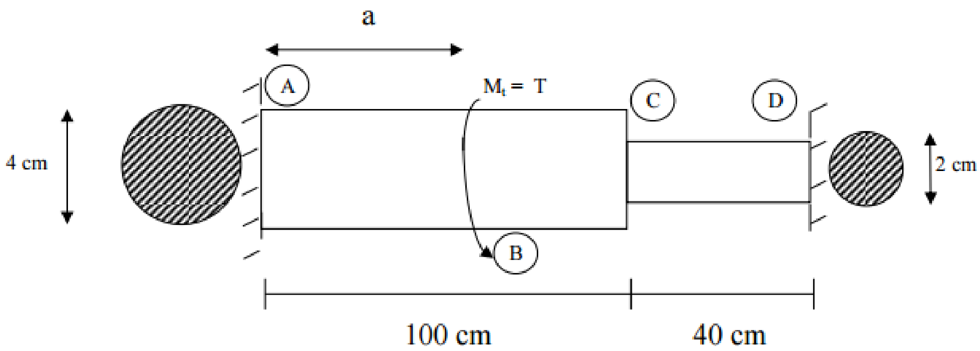
$$\varphi_1 = \frac{32.164.2.L}{51.G.\pi..(2d)^4} = \frac{4{,}09.L}{G.d^4}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{32.(-40).L}{51.G.\pi.(2d)^4} = \frac{3{,}59.L}{G.d^4}$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{32.(-40).L}{51.\pi.G.(d)^4} = -4{,}40\frac{L}{G.d^4}$$



21. Calcular qual deve ser a posição (a = ?) da carga torçora (T) para que as tensões de cisalhamento máximas nos trechos AB e CD sejam iguais.



Resposta:

Por equilíbrio:

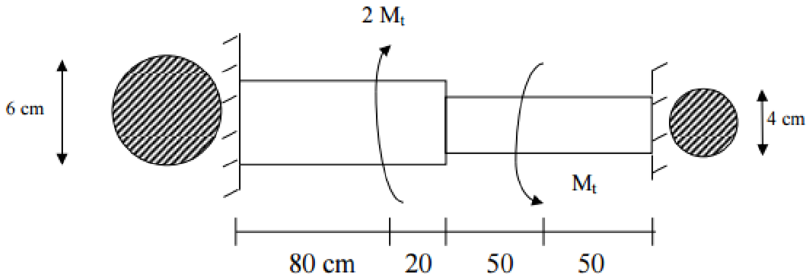
$$\frac{32.(R+T).a}{\pi.G.4^4}+\frac{32.(R).(100-a)}{\pi.G.4^4}+\frac{32.(R).40}{\pi.G.2^4}=0$$

$$R=\frac{-T}{740}a$$

Para que as tensões de cisalhamneto sejam iguais nos trechos AB e Cd é necessário então:

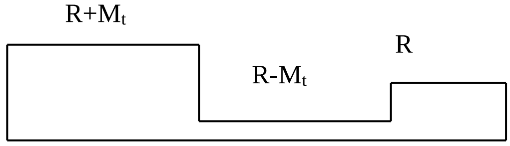
$\tau_{AB} = \tau_{CD}$, assim: $$\frac{16.(\frac{740-a}{740}T)}{\pi.4^3}=\frac{16.(\frac{T.a}{740})}{\pi.2^3}\longrightarrow a=\frac{740}{9}=82{,}2cm$$

22. Para o eixo indicado, pede-se o valor admissível do momento M_t (torque) sabendo-se que $\bar{\tau}=10$ KN/cm^2. Pede-se ainda, para esse valor de M_t, o giro máximo, indicando a seção onde ocorre. Dado G = 8000 KN/cm^2



Resposta:

O diagrama de corpo livre fica:

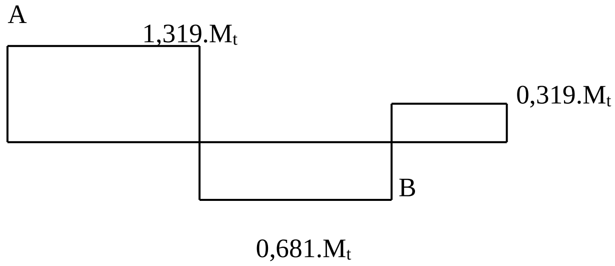


Por equilíbrio:

$$\left(\frac{32}{\pi.8000}\right).\left(\frac{(R+M_t).80}{6^4}+\frac{(R-M_t).20}{6^4}+\frac{(R-M_t).50}{4^4}+\frac{(R).50}{4^4}\right)=0 \longrightarrow$$

$R = 0{,}319 M_t$

Assim, o diagrama do momento torçor é dado por:



Verificar onde ocorre tensão máxima nos trechos A e B, pois em A é onde tem-se o maior esforço e em B, onde tem-se um diâmetro menor que o de A.

Em A: $J = \dfrac{\pi.d^4}{32}$ $\tau = \dfrac{M_t r}{J} = \dfrac{16.M_t}{\pi.d^3} = \dfrac{16.1{,}319.M_t}{\pi.6^3} \le 14 \longrightarrow M_t \le 450{,}30\ \text{KN.cm}$

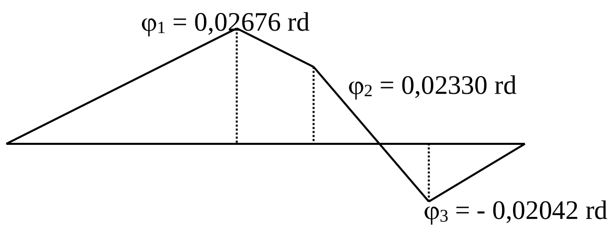
Em B: $J = \dfrac{\pi.d^4}{32}$ $\tau = \dfrac{M_t r}{J} = \dfrac{16.M_t}{\pi.d^3} = \dfrac{16.0{,}681.M_t}{\pi.4^3} \le 14 \longrightarrow M_t \le 258{,}19\ \text{KN.cm}$

Portanto: $M_t = 258{,}19$ KN.cm

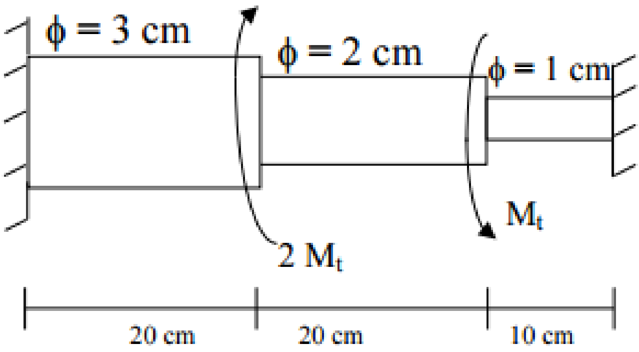
O giro é dado por: $\varphi = \dfrac{M_t L}{G.J}$ $\varphi_1 = \dfrac{32.1{,}319.258{,}19.80}{8000.\pi.(6)^4} = 0{,}02676\ \text{rd}$

$\varphi_2 = \varphi_1 + \dfrac{32.(-0{,}681.258{,}19).20}{8000.\pi.(6)^4} = 0{,}02330$ rd $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 + \dfrac{32.(-0{,}681.258{,}19).50}{8000.\pi.(4)^4} =$

- 0,02042 rd

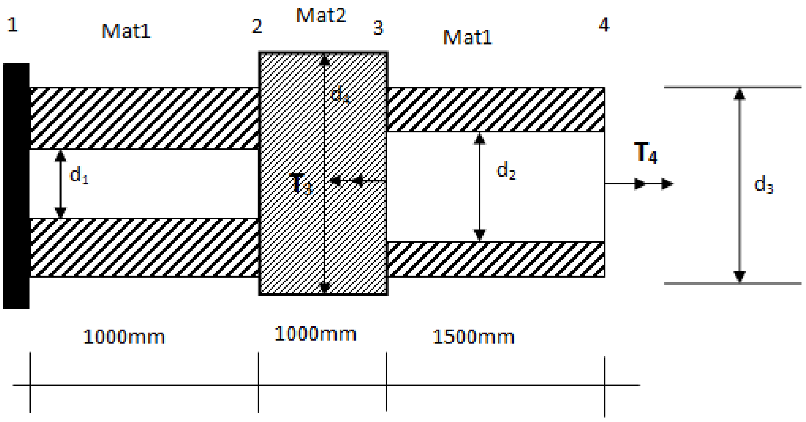


23. Para o eixo indicado pede-se o momento torçor M_t admissível, sabendo-se que: $\bar{\tau} = 10$ KN/cm^2.



Resposta: M_t = 17,20 KN.m

24. (Pedro Almeida, 2012) Determine o diâmetro d_4 do eixo formado por dois materiais Mat1 e Mat2, para que a rotação na seção 4 seja nula. O eixo esquematizado na figura tem carregamentos T_3=250kN*m atuando na seção 3 e T_4=100 kN*m atuando na seção 4, engastado na extremidade 1. Considerar d_1 = 90mm, d_2= 120mm, d_3= 180mm; com G_{mat1}= 56 GPa e G_{mat2}= 70 GPa. Considerar também que o eixo no tramo 2-3 é maciço e os trechos 1-2 e 3-4 são vazados, com diâmetro interno de d_1 e d_2, respectivamente, e diâmetro externo de d_3. Determinar também a tensão máxima de cisalhamento do eixo.



25. (Alfredo Gay, 2014) A figura ilustra um sistema formado por um eixo composto por dois segmentos AB e BC de mesmo material. O comprimento entre A e B vale "L_{AB}" e entre B e C vale "L_{BC}". O ponto A se encontra engastado. No ponto C é aplicado um torque "T" com o sentido indicado na figura. No ponto B estão fixadas no eixo duas barras rígidas DB e BE, ambas com comprimento "b". Nas pontas dessas barras existem dois fios com rigidez axial "EA" e comprimento "L", ortogonais às barras. Os fios estão localizados entre os pontos D e F, e E e G. Os pontos F e G encontram-se fixos. O diâmetro do eixo no trecho AB é "D_{AB}".

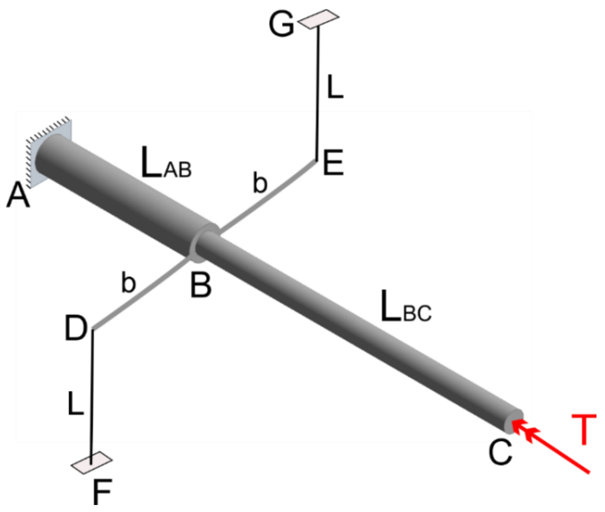
Pede-se:

a) Escrever a equação de equilíbrio para o eixo ABC, em função do torque reativo no engaste "T_A" e do torque "T_B" atuante no ponto B pelo sistema de barras rígidas e fios. Fazer o diagrama de momento de torção no eixo em função de "T_A", "T_B" e "T".

b) Calcular "T_A" e "T_B", bem como a rotação do ponto B "□$_B$" com os valores numéricos fornecidos abaixo.

c) Determinar a medida do diâmetro do eixo circular maciço no trecho entre os pontos B e C para que a rotação do ponto C "□$_C$" seja menor do que 1,5º.

d) Se o material do eixo suporta tensão de cisalhamento máxima de 50MPa, o diâmetro determinado no item anterior pode ser utilizado? Justifique todas as respostas com cálculos.



26. (Guilherme Franzini, 2014) A suspensão de um veículo por barra de torção (barra AC) está esquematizada na Fig 1 abaixo. As rodas (não representadas) são acopladas nos pontos D e E pertencentes à barra rígida DE de comprimento $2r$, enquanto que a extremidade A está engastada. Ao passar por um obstáculo, o desnivelamento vertical (na direção do eixo z) entre as rodas D e E é dado por $2d$ e solicita a barra AC em torção (ver Fig 2). A barra AC possui seção transversal circular vazada de raio externo constante e igual a R, comprimento L e é escalonada em dois trechos, AB e BC (ver Fig 3). O trecho AB possui momento de inércia polar (momento de inércia à torção) igual a J e comprimento a, enquanto que o trecho BC possui momento de inércia polar $2J$ e comprimento b. A barra AC é fabricada em um material de módulo de elasticidade transversal G e possui tensão de cisalhamento admissível $\bar{\tau}$. Admitindo que a única solicitação à barra AC que compõe a suspensão seja devida ao momento de torção causado pelo desnivelamento entre as rodas e assumindo válida a teoria de pequenas rotações vista nas aulas, pede-se:

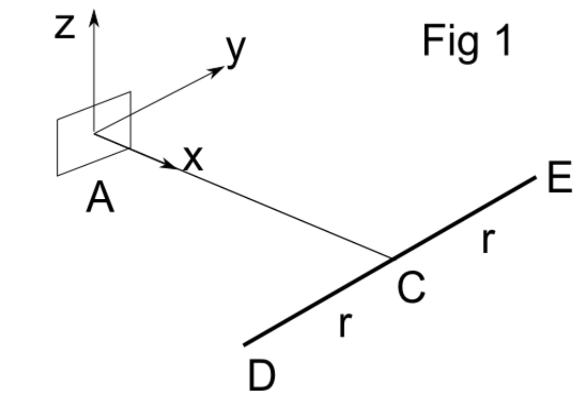
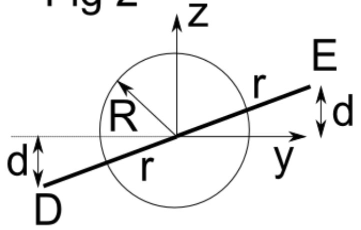


Fig 1

Fig 2



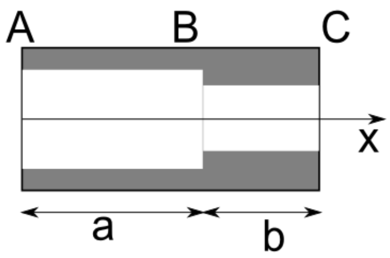


Fig 3

a) Determinar a rigidez torcional da suspensão (k) em função dos parâmetros geométricos e das propriedades do material. (Dica: a rigidez torcional pode ser entendida como o momento torçor necessário para causar uma rotação unitária entre as extremidades da barra AC. Nota: Calcule a rotação unitária com base na teoria vista em sala de aula, isto é, assumindo pequenas rotações.)

   Resposta: $k =$

b) Calcule a rotação relativa entre as seções A e C, ϕ_{AC}, para os valores numéricos dados abaixo. Para os mesmos valores numéricos e, igualando a máxima tensão de cisalhamento existente na barra AC à tensão de cisalhamento admissível, determinar a e b. Mostre que a e b independem do valor de J.

   Dados: $d = 3cm, r = 1{,}2m, R = 6cm, L = 2m, \bar{\tau} = 100MPa, G = 81GPa$

   Resposta: $\phi_{AC} =$ rad $a =$ m $b =$ m

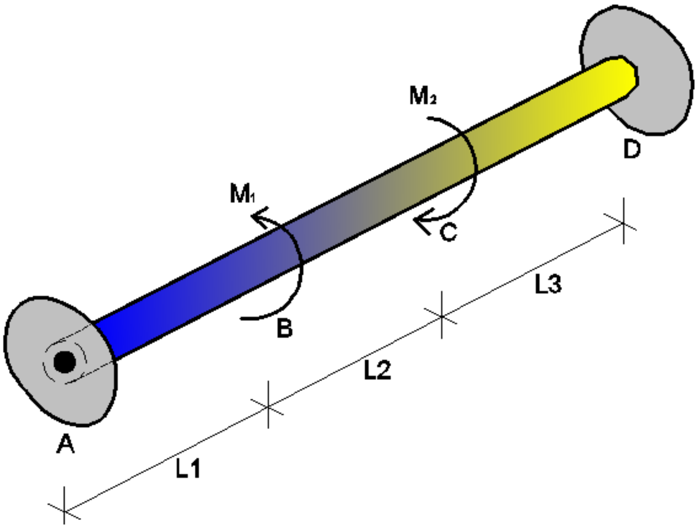
Dados:

L_{AB} = 2,0 m L_{BC} = 4,0 m EA = 1.000 kN

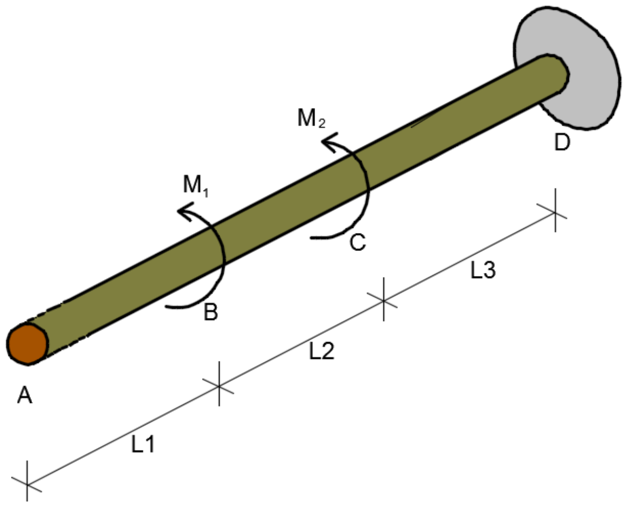
b = 1,0 m L = 1,5 m D_{AB} = 0,1 m

T = 10,0 kN.m   G = 10^8 kN/m^2

27. O eixo é solicitado pelos momentos de torção M_1 e M_2, nas respectivas posições conforme figura. A seção é circular vazada de diâmetro interno D_i e externo D_e. Determinar os momentos reativos M_A e M_D e o diagrama de rotação em termos de G, L1, L2, L3, D_i e D_e.

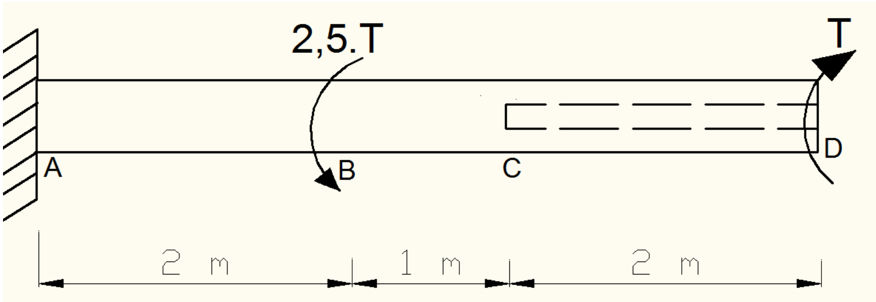


28. Para o eixo com dois torques atuantes e engastado em D, sabe-se que toda a seção é circular maciça de diâmetro de 90 mm. Calcule a máxima tensão cisalhante no eixo e a rotação em graus na seção em B. Adote: L1 = L2 = 2 m, L3 = 3 m, M_1 = 5 kN.m, M_2 = 8 kN.m e G = 100 GPa.



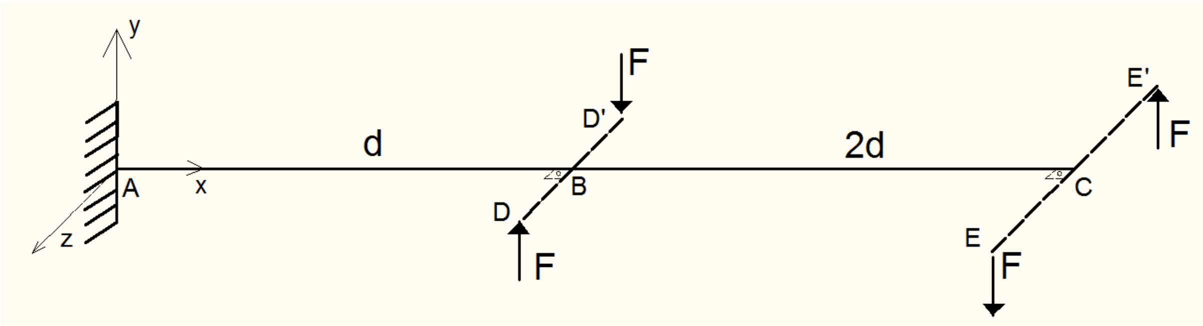
Respostas:

29. Calcular o valor admissível do momento torçor T considerando os sentidos indicados na figura. Para este valor, verificar se existe alguma seção, além da fixa em A, com ângulo de torção nulo. Caso exista, determinar sua posição com relação ao ponto A. Dados: τ_{adm} = 50 MPa, G = 15.000 kN/cm^2. Diâmetro do trecho AC = 40 mm; Trecho CD é de uma seção vazada de diâmetro interno de 20 mm.



Respostas:

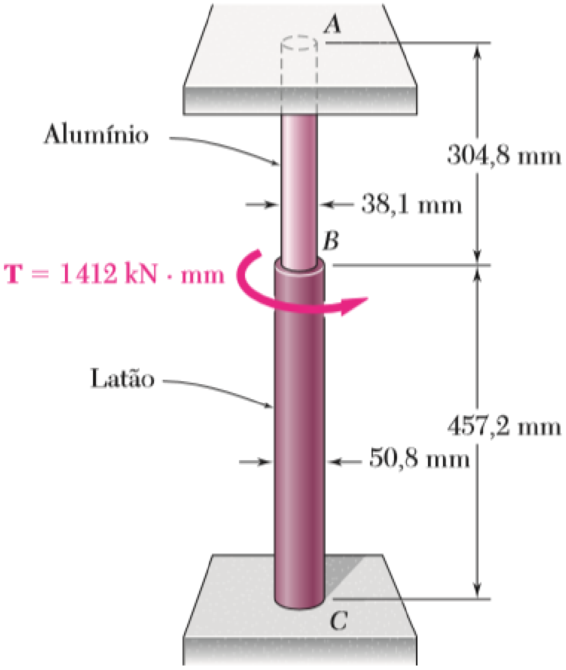
30. A barra reta AC está no plano xy com seção transversal circular maciça de diâmetros “d” e “2d”, respectivamente, nos trechos AB e BC. Nos pontos B e C estão ligadas perpendicularmente à barra AC as barras rígidas DD’ e EE’ de comprimento, respectivamente, de 20 cm e 30 cm. Ou seja, as barras DD’ e EE’ estão contidas no plano yz. Sabendo que F = 40 kN e $\tau_{adm} = 2$ MPa, G = 100 GPa e que o comprimento de AB e BC são iguais de valor 1 m. Determine o mínimo valor de “d”.



Resposta: d = 39 cm

31. (Beer J.)

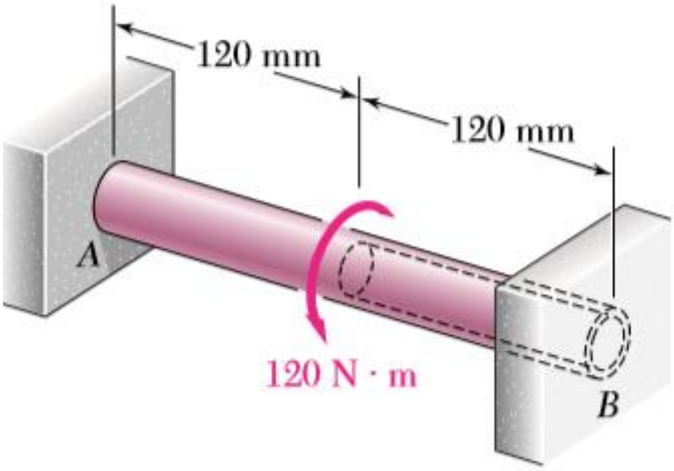
Os cilindros sólidos *AB* e *BC* estão conectados em *B* e estão engastados em suportes fixos em *A* e em *C*. Sabendo que os módulos de rigidez são 25,5 GPa para o alumínio e 38,6 GPa para o latão, determine a máxima tensão de cisalhamento (*a*) no cilindro *AB* e (*b*) no cilindro *BC*.



32. (Beer J.) Resolva o Problema anterior, considerando que o cilindro AB é feito de aço com G = 77,2 GPa.

33. (Beer J.)

Um eixo circular *AB* consiste em um cilindro de aço de 240 mm de comprimento e 22 mm de diâmetro, no qual foi feito um furo de 120 mm de profundidade e 16 mm de diâmetro na extremidade *B*. O eixo está engastado a suportes fixos em ambas as extremidades, e é aplicado um torque de 120 N · m na sua seção média (Fig. 3.28). Determine o torque aplicado no eixo por cada um dos suportes.



Resposta: Ta = 69,77 N.m; Tb = 50,23 N.m

34. (Beer J.)

Dois eixos de aço com seção transversal cheia são conectados por engrenagens conforme mostra a figura. É aplicado um torque de intensidade $T = 900$ N · m no eixo *AB*. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e considerando somente tensões causadas por torção, determine o diâmetro necessário para (*a*) o eixo *AB* e (*b*) o eixo *CD*.

Considere a seção em D fixa e as demais mancais livres de giro.