Solução numérica do problema de Blasius usando um método de Runge-Kutta de 2ª ordem

Em um método de Runge-Kutta de 2ª ordem, resolvemos numericamente o problema:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{com condição inicial } y(x=0) = y_o$$

Isso é feito considerando que:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

Onde:

$$K_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{e} \quad K_2 = f\left(x_i + h, y_i + K_1 h\right)$$

Note que isso é equivalente a fazer uma primeira avaliação y^* do valor de y_{i+1} usando o valor da derivada no início do intervalo, depois fazer uma segunda avaliação y^{**} usando o valor da derivada no fim do intervalo, e aí tirar uma média dos dois:

$$y^* = y_i + h\, f(x_i, y_i)$$

$$y^{**} = y_i + h\, f(x_i + h, y_i + K_1 h)$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{2} y^* + \frac{1}{2} y^{**}$$

Como aplicar essa técnica no problema de Blasius da camada limite?

O problema de Blasius da camada limite é dado por:

$$\boxed{f''' + \frac{1}{2} f\, f'' = 0}$$

Com condições de contorno $f' = 0$ para $\eta = 0$, $f = 0$ para $\eta = 0$ e $f' \to 1$ para $\eta \to \infty$.

Isso significa que, como $f''' = -0{,}5\, f\, f''$, $f''' = 0$ para $\eta = 0$. Já o valor de f'' é uma incógnita; deve-se por tentativa e erro descobrir esse valor de forma que $f' \to 1$ para $\eta \to \infty$.

Assim, por um método numérico, temos que resolver:

$$\frac{df}{d\eta} = f' \qquad (1)$$

$$\frac{df'}{d\eta} = f'' \qquad (2)$$

$$\frac{df''}{d\eta} = f''' \qquad (3)$$

$$f''' = -0{,}5\, f\, f'' \qquad (4)$$

Com condições iniciais $f_o = 0$, $f'_o = 0$, $f''_o = \text{tentativa}$, $f'''_o = -0{,}5\, f_o\, f''_o = 0$.

Usando um método de Runge-Kutta de 2ª ordem e um intervalo $h = \Delta\eta$, avaliamos as funções em i+1 a partir de seus valores em i através do seguinte procedimento:

Avaliamos as funções usando o valor da derivada no início do intervalo:

$$f^* = f_i + f_i' \Delta\eta$$
$$f'^* = f_i' + f_i'' \Delta\eta$$
$$f''^* = f_i'' + f_i''' \Delta\eta$$

E fazemos:

$$f'''^* = -0{,}5 f^* f''^*$$

Com os valores das derivadas avaliados no fim do intervalo, avaliamos as funções novamente:

$$f^{**} = f_i + f'^{*} \Delta\eta$$
$$f'^{**} = f_i' + f''^{*} \Delta\eta$$
$$f''^{**} = f_i'' + f'''^{*} \Delta\eta$$

Fazemos:

$$f_{i+1} = 0{,}5\left(f^{*} + f^{**}\right)$$
$$f_{i+1}' = 0{,}5\left(f'^{*} + f'^{**}\right)$$
$$f_{i+1}'' = 0{,}5\left(f''^{*} + f''^{**}\right)$$

E fazemos finalmente $f_{i+1}''' = -0{,}5\, f_{i+1}\, f_{i+1}''$

Podemos tomar um valor final $\eta = 8\,\mathrm{a}\,10$ como representativo de $\eta \to \infty$. Usando um intervalo $\Delta\eta = 0{,}1$, verifica-se que obtemos $f' \to 1$ para $\eta \to \infty$ com um valor de $f_o'' = 0{,}332$. O valor de $\eta = 5$ fornece $f' = 0{,}99 = u/U$. Assim, obtemos os dois resultados fundamentais do problema:

$$\boxed{c_f = \frac{2 f_o''}{\sqrt{\dfrac{U x}{\nu}}} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.