SEMINARIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS-MAT 450

2ª lista (PIF) - 1° semestre de 2020

Antônio Luiz Pereira

(1) Use o princípio de indução para provar as seguintes igualdades, para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

b)$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$,

d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$,

e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

f) $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$.

g) $(1+x)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} x^n$.

h) $(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n$.

(2) Seja n_0 um número natural. Mostre que vale a seguinte extensão do PIF: "Se uma propriedade P vale para $n = n_0 \in \mathbb{N}$ e $P(n) \Longrightarrow P(n+1), \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ então $P(n)$ vale para todo $n \geq n_0$" e use-a para mostrar que

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, $2^n < n!$.

(b) O número de diagonais de um polígono de n lados n(n-3)/2.

(c) Todo número natural maior ou igual a dois admite decomposição em fatores primos, única a menos da ordem dos fatores.

(3) Mostre que, se $a \geq -1$ é um número real n é um número natural, então vale a desigualdade: $(1+r)^n \geq 1 + nr$.

(4) Mostre que, se a é um número real positivo e se n é um número natural, então vale a desigualdade: $a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2\left(a + \frac{1}{a} - 2\right)$

(5) A sequência de Fibonacci, $F_0, F_1, F_2, \ldots$ é dada por

- $F_0 = F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \forall n \geq 2$.

Mostre que, para todo $n \geq 2$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n\right]$$

(6) Encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo termo de uma P.A. e prove-a por indução.

(7) Encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo termo de uma P.G. e prove-a por indução.

(8) Encontre uma fórmula explícita para a soma dos n primeiros termos de de uma P.A. e prove-a por indução.

(9) Encontre uma fórmula explícita para a soma dos n primeiros termos de de uma P.G. e prove-a por indução.

(10) Calcule o valor da soma 1!1+2!2+3!3+...+n!n para alguns valores de n. Descubra a fórmula geral para n arbitrário e demonstre que ela é válida.

(11) Descubra onde está o erro da seguinte "demonstração". `Seja` a `um real positivo. A igualdade` $a^{n-1} = 1$ `é válida para` $n = 1$. `Suponhamos que` n `é tal que` $a^{k-1} = 1$ `para todo` $k \leq n$. `Então temos`

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

`Segue portanto do Princípio de Indução que` $a^{n-1} = 1$ `para todo natural` n.

(12) Os pássaros de uma certa comunidade eram tão ciosos de suas caudas que cometiam suicídio na noite seguinte ao dia em que descobriam que as tinham perdido. Eles não conseguiam ver, tocar ou sentir suas caudas. Embora cada um deles soubesse se os demais estavam ou não com suas caudas, eles não trocavam entre si informação alguma sobre o assunto. A única maneira de que eles dispunham para descobrir se tinham perdido suas caudas era deduçao lógica, e nisso eles eram infalíveis.

A plumagem de suas caudas era de uma beleza extraordinária e, por esse motivo, era muito cobiçada por traficantes. Numa certa noite, ouviu-se um ladrão abandonando desastradamente a comunidade. O que se viu permitiu aos pássaros deduzir que pelo menos um pássaro tivera sua cauda roubada. Cinco noites depois do roubo, os pássaros que

tiveram suas caudas roubadas cometeram suicídio. Quantos pássaros se suicidaram?

PROBLEMA CORRELATO: O que aconteceria se o ladrão tivesse roubado apenas uma cauda?

(13) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ... Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.