Cap. 4

GRAFOS HAMILTONIANOS

Material extra – duas outras condições ~~suficientes~~

SOBRE GRAFOS HAMILTONIANOS

YOSHIKO WAKABAYASHI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

São Paulo

5. CLASSIFICAÇÃO DAS CONDIÇÕES

Nesta seção faremos a classificação das condições suficientes que enunciamos a seguir e que foram estudadas nas seções anteriores. Para facilitar as referências vamos numerar as condições, todas elas referentes a um grafo G de ordem $n \geq 3$.

C1: condição de Dirac

$\forall v \in VG,\ \mathrm{val}(v) \geq \frac{n}{2}$.

Dirac 1952

C2: condição de Ore

$\forall u,v \in VG,\ \{u,v\} \notin EG \Longrightarrow \mathrm{val}(u) + \mathrm{val}(v) \geq n$.

Ore 1960

C3: condição de Pósa

a) $\forall i,\ 1 \leq i < \frac{n-1}{2}$, o número de vértices de valência $\leq i$ é $< i$

b) se n é ímpar, o número de vértices de valência $\leq \frac{n-1}{2}$ é $\leq \frac{n-1}{2}$.

C4: condição de Bondy-69

(supondo $\mathrm{val}(v_1) \leq \mathrm{val}(v_2) \leq \ldots \leq \mathrm{val}(v_n)$)

$$\left.\begin{array}{l} i \neq j \\ \mathrm{val}(v_i) \leq i \\ \mathrm{val}(v_j) \leq j \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{val}(v_i) + \mathrm{val}(v_j) \geq n.$$

C5: condição de Bondy-70

(supondo $\mathrm{val}(v_1) \leq \mathrm{val}(v_2) \leq \ldots \leq \mathrm{val}(v_n)$)

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \mathrm{val}(v_i) \leq i \\ \mathrm{val}(v_j) \leq j-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{val}(v_i) + \mathrm{val}(v_j) \geq n.$$

C6: condição de Chvátal

(supondo $\mathrm{val}(v_1) \leq \mathrm{val}(v_2) \leq \ldots \leq \mathrm{val}(v_n)$)

$\mathrm{val}(v_i) \leq i < \frac{n}{2} \Longrightarrow \mathrm{val}(v_{n-i}) \geq n-i$.

C7: condição de Las Vergnas-70

existe uma indexação $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de VG tal que

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ \mathrm{val}(v_i) \leq i \\ \mathrm{val}(v_j) \leq j \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{val}(v_i) + \mathrm{val}(v_j) \geq n.$$

Las Vergnas 1970

C8: condição de Las Vergnas-71

existe uma indexação $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de VG tal que

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ i+j \geq n \\ \mathrm{val}(v_i) \leq i \\ \mathrm{val}(v_j) \leq j-1 \\ \{v_i, v_j\} \notin EG \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{val}(v_i) + \mathrm{val}(v_j) \geq n.$$

(Estas páginas estão na homepage da disciplina)

C9: condição de Bondy-Chvátal

o fecho de G é completo.

C10: condição de Skupień

existe $L \subseteq VG$ tal que

(a) $\forall W \subset VG$ $S1(W)$ implica que $W \cap L \neq \emptyset$,

(b) $\forall u,v \in L$, $u \neq v$, se $\{u,v\} \notin EG$ então $\mathrm{val}(u)+\mathrm{val}(v) \geq n$.

$S1(W)$: existe $x \in W$: $W = \phi(\Gamma x)$ onde ϕ é uma injeção admissível de $\Gamma x \longrightarrow \Gamma^2 x$, $W \subseteq V(\mathrm{val}(x))$ e $W \cup \Gamma W \neq VG$, $V(\mathrm{val}(x)) = \{v \in VG: \mathrm{val}(v) \leq \mathrm{val}(x)\}$.

C11:

existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos pares tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos.

C12:

G é conexo e existe uma partição das arestas de G em subgrafos completos tal que cada vértice pertence a exatamente dois desses subgrafos e G contém um circuito tendo exatamente uma aresta em cada um desses subgrafos.

C13:

$\kappa(G) \geq \beta(G)$.

C14:

G é 2-conexo e G não tem θ-subgrafo.

C15:

G conexo, $\delta(G) \geq 2$ e G não tem subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ ou $K_{1,3} + \alpha$.

No que segue iremos justificar o seguinte diagrama:

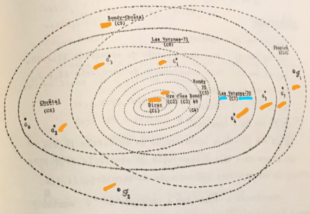


Figura 21

... pos 3 e portanto ... pos n-2.

Mostraremos a seguir que as condições C9, C10, C11, C12, C13 e C14 são duas a duas independentes.

DEFINIÇÃO - Condições C_i e C_j são ditas *independentes* se há pelo menos um grafo que satisfaz C_i e não satisfaz C_j e há pelo menos um grafo que satisfaz C_j e não satisfaz C_i.

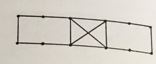
Na tabela abaixo exibimos grafos ou família de grafos que satisfazem C_i e não satisfazem C_j onde $9 \leq i \leq 14$, $9 \leq j \leq 14$ e $i \neq j$.

Assim, na intersecção da linha C_i com a coluna $\sim C_j$ apresentamos um grafo ou uma família de grafos que satisfazem a condição C_i e não satisfazem a condição C_j.

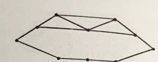
	~C9	~C10	~C11	~C12	~C13	~C14
C9		$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_2$
C10	$\mathcal{F}_1$		$\mathcal{F}_1^*$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_1$
C11	H_1	H_1		H_1	H_1	H_1
C12	H_2	H_2	H_2		H_2	H_2
C13	H_3	H_3	H_3	H_3		H_3
C14	H_4	H_4	H_4	H_4	H_4	

$\mathcal{F}_2$ é a família de grafos descrita na página 79.
$\mathcal{F}_1$ é a família de grafos descrita na página 78.
$\mathcal{F}_1^* = \{G: G \in \mathcal{F}_1,\ |VG| \text{ é ímpar}\}$.

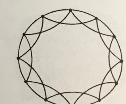
H_1:



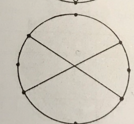
H_2:



H_3:



H_4:

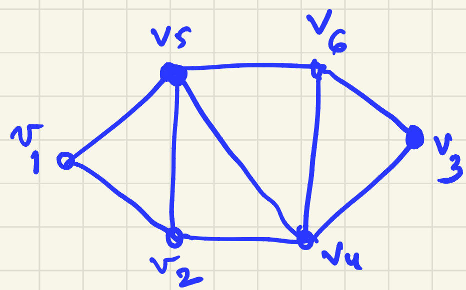


- o -

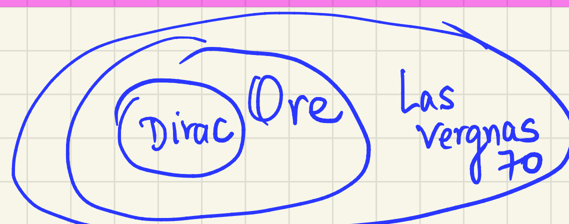
TEOREMA DE LAS VERGNAS, 1970

Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$. Se existe uma indexação $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n \\ g(v_i) \leq i \\ g(v_j) \leq j \\ \{v_i, v_j\} \notin A(G) \end{array}\right\} \Longrightarrow g(v_i) + g(v_j) \geq n,$$



então G é hamiltoniano.



PROVA. Vamos provar que se G satisfaz as hipóteses, então $\mathcal{F}(G)$ é completo.

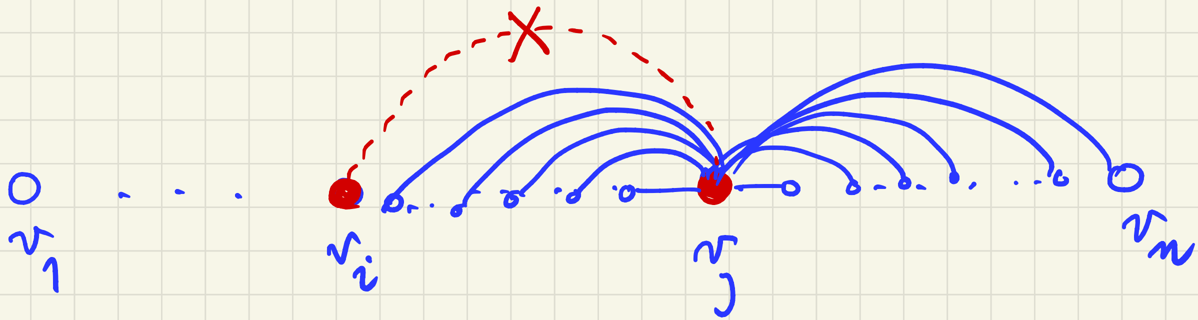
Seja $H = \mathcal{F}(G)$. Suponhamos que H não seja completo. Então existem vértices v_i, v_j não adjacentes em H.

Escolha v_i e v_j tq.

(1) j seja o maior possível;

(2) i seja o maior possível, sujeito a (1)

v_i e v_j não adjac. em H (fecho) $\Rightarrow$ $\boxed{g_H(v_i) + g_H(v_j) \leq n-1}$ A



(1) e (2) $\Rightarrow$ v_j adjac a v_k p/ $i < k \leq n$, $k \neq j$

Portanto, $\boxed{g_H(v_j) \geq n - i - 1}$ (B)

(1) $\Rightarrow$ v_i adjac. a v_k p/ $j < k \leq n$.

Portanto, $\boxed{g_H(v_i) \geq n - j}$ (C)

Usando A, B e C:

- $g_G(v_i) \leq g_H(v_i) \underset{A}{\leq} n-1-g_H(v_j) \underset{B}{\leq} n-1-(n-i-1) = i$

- $g_G(v_j) \leq g_H(v_j) \leq n-1-g_H(v_i) \underset{C}{\leq} n-1-(n-j) = j-1 \leq j$

Ou seja,

$$\begin{cases} g_G(v_i) \leq i \\ g_G(v_j) \leq j \end{cases}.$$

Claramente, $\{v_i, v_j\} \notin A(G)$. [pois $\{v_i, v_j\} \notin A(H)$]

Pela hipótese sobre G, temos que

$$g_G(v_i) + g_G(v_j) \geq n$$

Logo, $g_H(v_i) + g_H(v_j) \geq n$ (pois $H \supseteq G$).

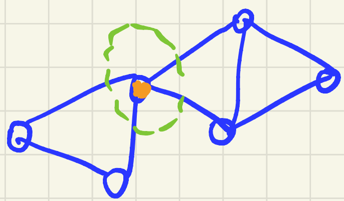
Mas, isto contradiz (A). Logo, $\mathcal{F}(G)$ é completo.

Pelo Teo. de Bondy & Chvátal, concluímos que G é hamiltoniano. $\square$

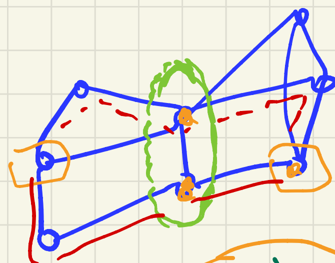
Condição Suficiente baseada em dois parâmetros do grafo (novos para nós)

$$\kappa(G) = \min_{W \subset V(G)} \left\{ |W| : \begin{array}{l} G-W \text{ é desconexo ou} \\ |V(G-W)| = 1 \end{array} \right\}$$

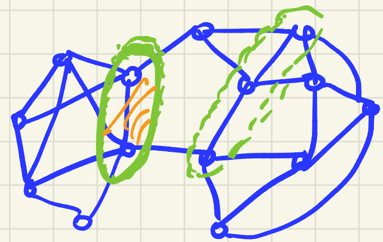
conectividade de G
(conexidade)



$\kappa(G) = 1$

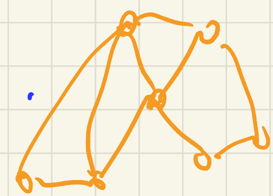


$\kappa(G) = 2$

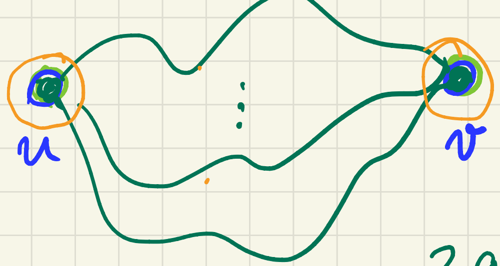


$\kappa(G) = 2$

Def: G é k-conexo se $\kappa(G) \geq k$.



$\forall u,v \in V(G)$

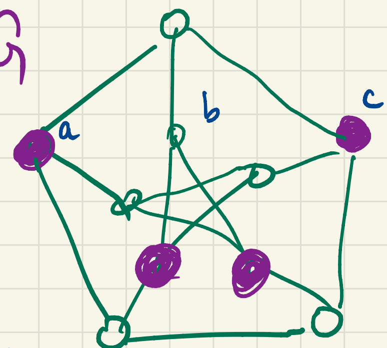


existem k caminhos de u a v 2 a 2 internamente disjuntos (nos vértices)

$$\alpha(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{\, |S| : S \text{ é estável ou independente} \,\}$$

vértices 2 a 2 não adjacentes

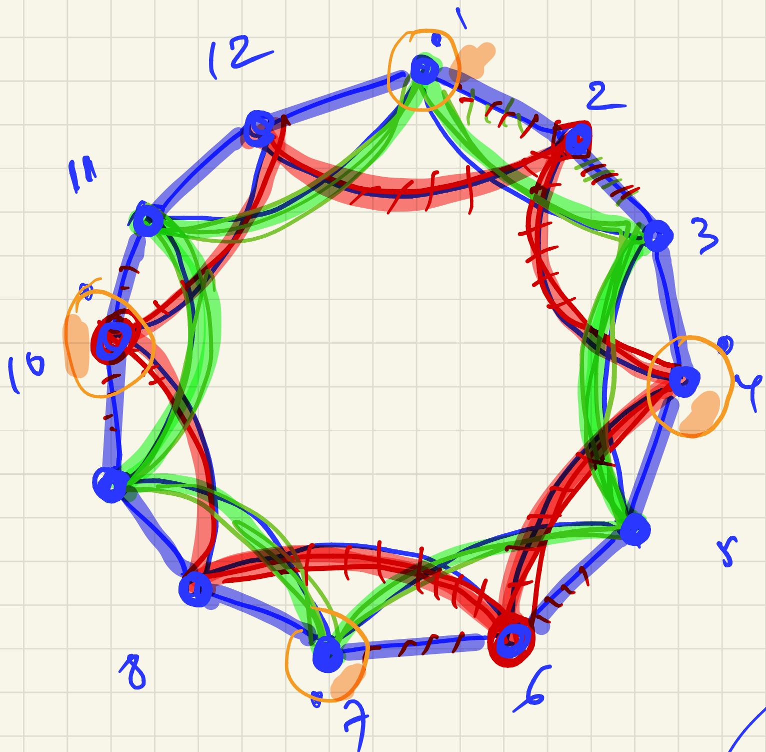
\# estabilidade (ou \# independência) de G



$\kappa(G) = 3$

$G - \{a,b,c\}$ é desconexo

$\alpha(G) = 4$



$W = \{1, 4, 7, 10\}$

cjto estável

Circuitos Verde e Vermelho são totalmente disjuntos.

Precisamos remover pelo menos 2 vértices de cada p/ desconectar cada um deles

$$\boxed{\kappa(G) \geq \alpha(G)}$$

$\kappa(G) = 4\,?$ $\alpha(G) = 4\,?$

Verificar

Teorema de Chvátal-Erdős (1972)

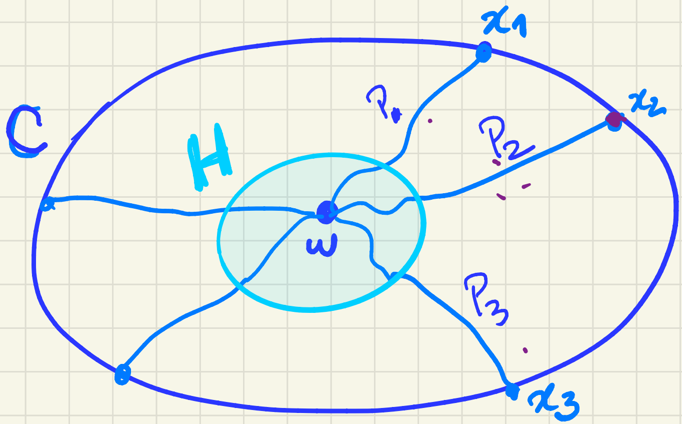
Se G é um grafo de ordem $n \geq 3$ e $K_1(G) \geq \alpha(G)$, então G é hamiltoniano

Prova. Não existe nenhum grafo G de ordem $n \geq 3$ tal que $K_1(G) = 1 \geq \alpha(G)$. Suponhamos então que $K_1(G) = k \geq 2$.

Neste caso, G contém um circuito. Suponhamos que G não seja hamiltoniano. Seja C um circuito mais longo em G.

Então existe em G um vértice $w \notin V(C)$.

Seja H o componente de $G - C$ que contém w.



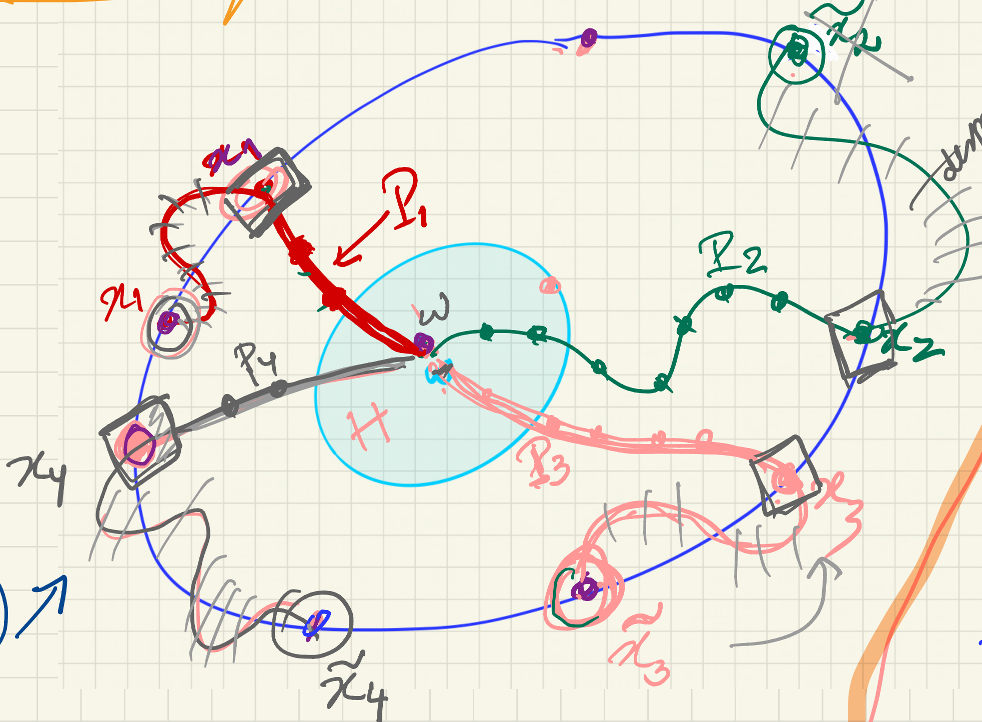
- Claramente, não existe em C dois vértices consecutivos adjacentes a w, senão existiria em G um circuito mais longo que C.

- Como $K(G) = k$, existe em G pelo menos k caminhos $P_1, \dots, P_k$ (internamente disjuntos) tais que P_i tem início em w e término em um vértice x_i em C e $V(P_i) \cap V(C) = \{x_i\}$ p/ $i = 1, \dots, k$.

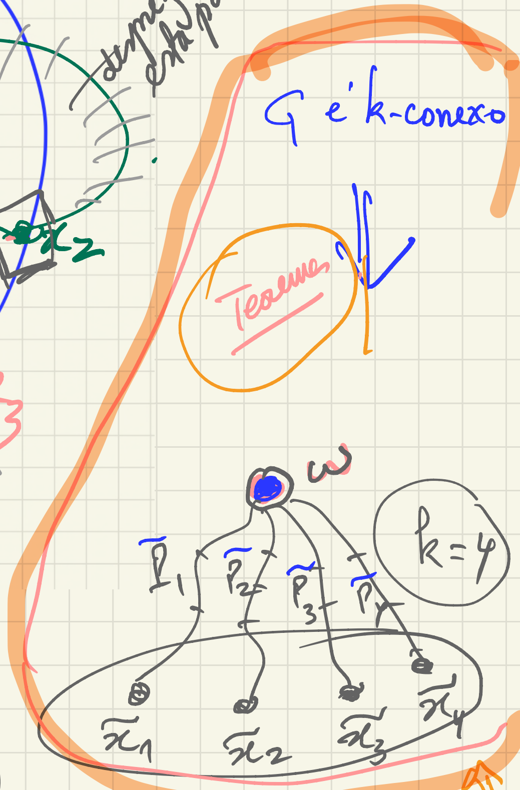
veja (*)

Claramente, esses x_i's não ocorrem consecutivamente em C, senão teríamos um circuito mais longo que C.

(*) Ideia da prova



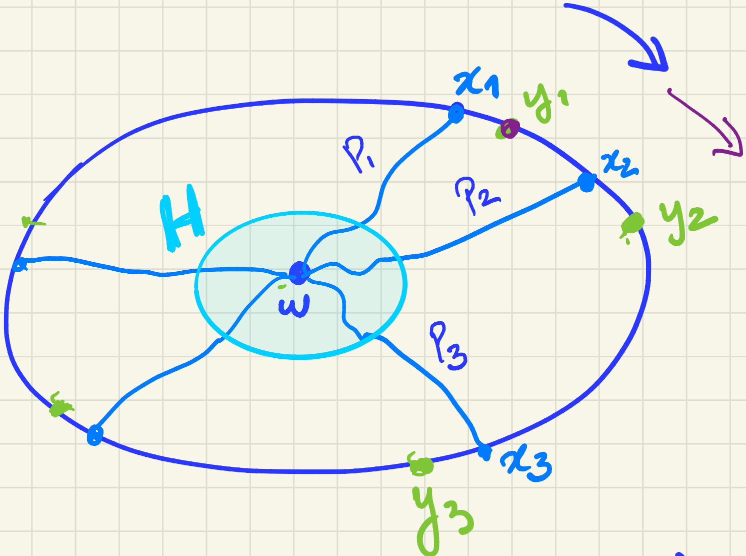
Exemplo com $k=4$



(1) Escolhemos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4$ distintos em C.

(2) Tomamos $\underbrace{\text{caminhos } \tilde{P}_i}_{\text{disjuntos internamente}}$ de w a $\tilde{x}_i$ $(i=1,..,4)$ ← existem porque G é k-conexo.

(3) Chamamos de $\boxed{x_i}$ o 1º vértice de $\tilde{P}_i$ que intersecta C.
(chamamos de P_i a seção de $\tilde{P}_i$ que vai de w a x_i)



Seja y_i o vértice consecutivo a x_i em C $(1 \leq i \leq k)$.

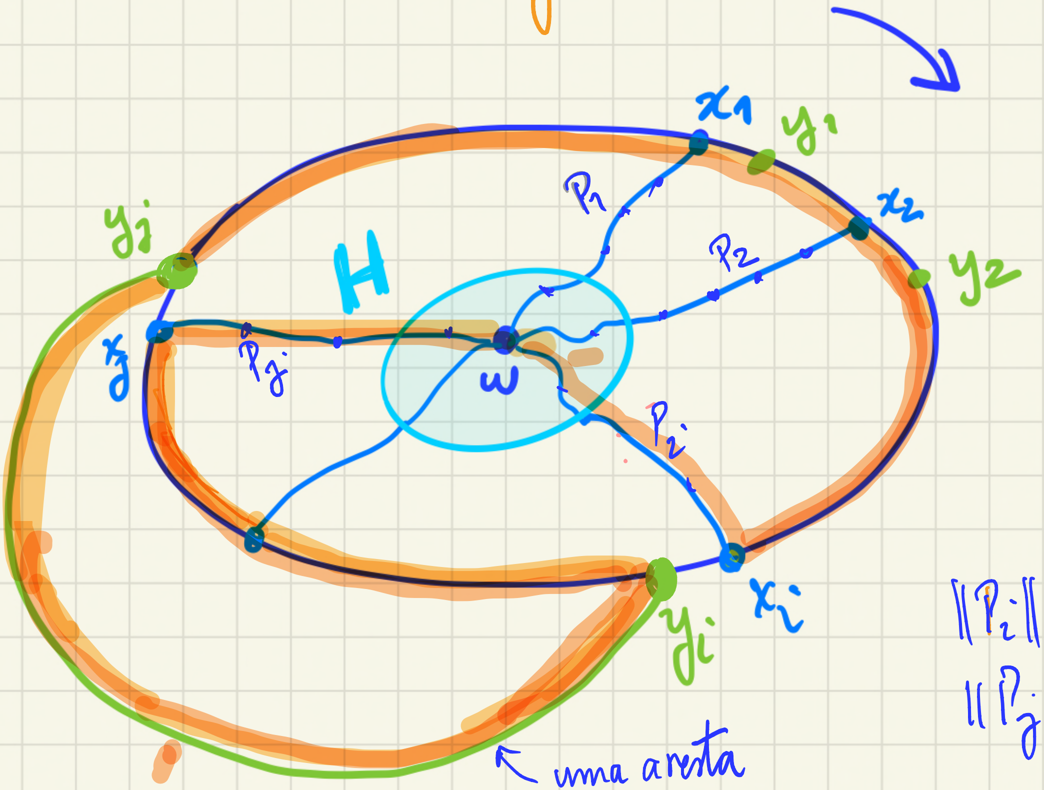
Spg. suponha que C começa em x_1.

- Se $y_i y_j \notin A(G)$ $\forall i,j$ $(1 \leq i < j \leq k)$ então $\{y_1, \dots, y_k\}$ é um cjto indep. Além disso, nenhum y_i é adjac. a w. Assim $\{y_1, \dots, y_k, w\}$ é um cjto indep. com $k+1$ elementos. Ou seja, $\alpha(G) \geq k+1$. $\leftarrow \kappa(G)$

Mas então $\alpha(G) > \kappa(G)$, contra a hipótese ✗

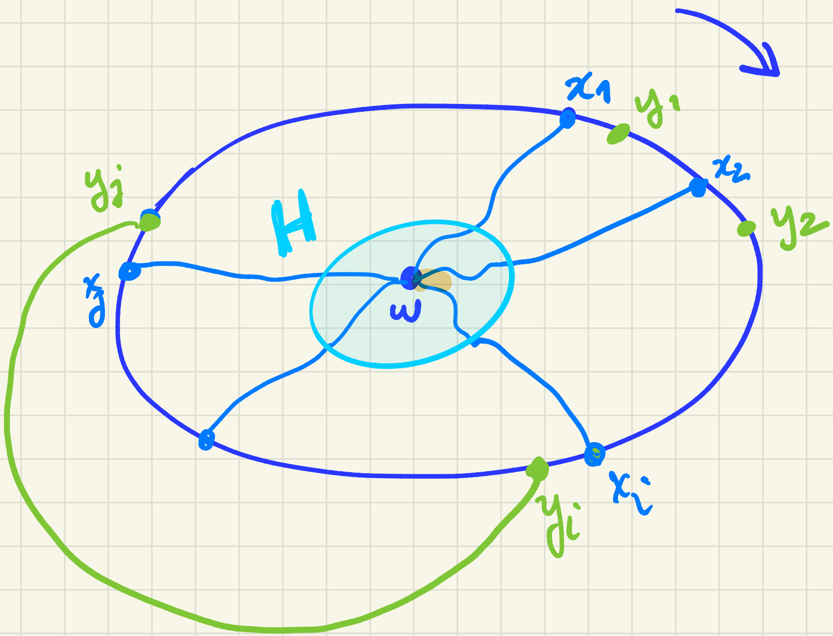
Logo, existem y_i e y_j adjac. Neste caso, existe em G um circuito mais longo que C, um absurdo.

(em laranja)



$\|P_i\| \geq 1$

$\|P_j\| \geq 1$



H
w
x1
y1
x2
y2
xj
yj
xi
yi