# Aula 5

## (continuação)

Operadores de spin

Autoestados de spin

Comutadores

Espaços vetoriais

# Mecânica quântica exige uma nova estrutura matemática:

Equação de autovalores !

Schroedinger

# As grandezas físicas satisfazem equações de autovalores

$$\hat{\mathcal{O}} \,|\, \rangle = o \,|\, \rangle$$

operador — autoestado — autovalor — autoestado

Exemplo mãe:

$$\hat{H} \,|\, \psi \rangle = E \,|\, \psi \rangle$$

Equação de Schroedinger independente do tempo

# Equação de autovalores para o spin

$$\begin{cases} \hat{S}^2\,\psi \;=\; s\,(s\,+\,1)\,\hbar^2\,\psi \\ \\ \hat{S}_z\,\psi \;=\; m_s\,\hbar\,\psi \end{cases}$$

operadores

$$\begin{cases} \hat{S}_x = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \hat{S}_y = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \hat{S}_z = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Pauli

operador $\left\{ \quad \hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 \right.$

$$\hat{S}^2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

$$\hat{S}^2 = \frac{3\,\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

autoestados $\left\{ \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$

$$\hat{S}_z\,|\uparrow\rangle \;=\; +\,\frac{1}{2}\,\hbar\,|\uparrow\rangle$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z\,|\downarrow\rangle \;=\; -\,\frac{1}{2}\,\hbar\,|\downarrow\rangle$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2\,\psi \;=\; s\,(s\,+\,1)\,\hbar^2\,\psi \;=\; \frac{3\,\hbar^2}{4}\,\psi$$

$$\hat{S}^2 = \frac{3\,\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \psi \;=\; |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2\,|\uparrow\rangle \;=\; \frac{3\,\hbar^2}{4}\,|\uparrow\rangle$$

$$\frac{3\,\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\,\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x \,|\uparrow\rangle = ?$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x \,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle$$

Não é equação de autovalores !

$|\uparrow\rangle$ não é autoestado de $\hat{S}_x$

Quando sabemos o autovalor de $\hat{S}_z$

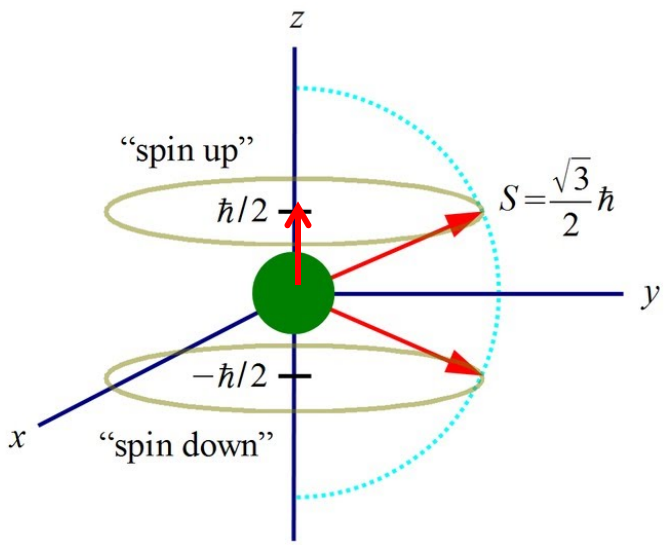
não sabemos o autovalor de $\hat{S}_x$

$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é autoestado de $\hat{S}_z$ e de $\hat{S}^2$

autoestado simultâneo dos dois operadores !

Podemos medir as duas grandezas ao mesmo tempo !

Isto acontece porque $\hat{S}_z$ e $\hat{S}^2$ são compatíveis !



Operadores compatíveis têm autofunções simultâneas

Dois operadores são compatíveis se eles comutam

Operadores A e B comutam se o comutador deles for zero

Comutador : $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Operadores compatíveis : $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

# Comutadores e operadores compatíveis

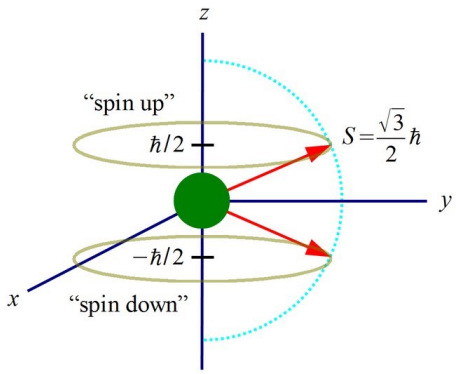
$$[\,S_x\,,\,S_y\,] = i\,\hbar\,S_z \qquad [\,S^2\,,\,S_x\,] = 0$$

$$[\,S_y\,,\,S_z\,] = i\,\hbar\,S_x \qquad [\,S^2\,,\,S_y\,] = 0$$

$$[\,S_z\,,\,S_x\,] = i\,\hbar\,S_y \qquad [\,S^2\,,\,S_z\,] = 0$$

Não têm autoestados comuns !

Não podem ser conhecidos
ao mesmo tempo !



$$[\,S_x\,,\,S_y\,] = i\,\hbar\,S_z$$

$$[\hat{S}_x\,,\,\hat{S}_y] = \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= i\,\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\,\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= i\,\hbar\,\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\,\hbar\,\hat{S}_z$$

$$[\, S^2 \,,\, S_y \,] \,=\, 0$$

$$[\hat{S}^2 \,,\, \hat{S}_y] \,=\, \hat{S}^2 \hat{S}_y \,-\, \hat{S}_y \hat{S}^2$$

$$= \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3\hbar^3}{8} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{3\hbar^3}{8} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

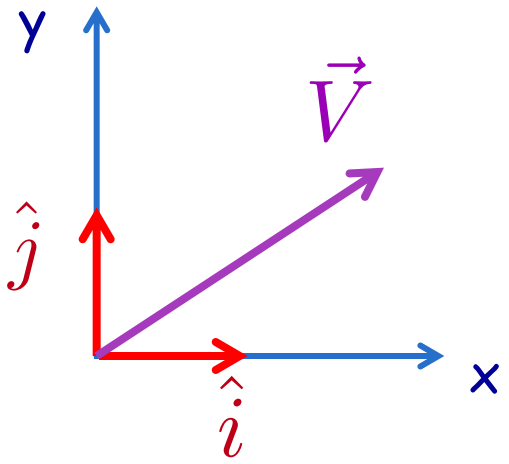
# Espaços vetoriais

## Autoestados de $S^2$ e $S_z$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com estes estados vamos definir um espaço vetorial

## Espaço vetorial de duas dimensões




$$\vec{V} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

versores $\left\{ \begin{array}{ll} \hat{i} = |\hat{i}\rangle & \hat{j} = |\hat{j}\rangle \end{array} \right.$

$$\vec{V} = x\,|\hat{i}\rangle + y\,|\hat{j}\rangle$$

# Espaço Vetorial

David Hilbert
(1862 -1943)

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$\forall u, v \in V \ , u + v \in V$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u \in V, \ \alpha u \in V$

O conjunto V com essas duas operações é chamado de espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

Em relação à adição:

**A1)** $u+(v+w)=(u+v)+w,\ \forall u,v,w\in V$

**A2)** $u+v=v+u,\ \forall u,v\in V$

**A3)** $\exists 0\in V,\forall u\in V,u+0=u$

**A4)** $\forall u\in V,\exists(-u)\in V,u+(-u)=0$

Em relação à multiplicação por escalar:

**M1)** $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$

**M2)** $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

**M3)** $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

**M4)** $1(u)=u$

$\forall u,v\in V\ e\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

OBSERVAÇÕES:

1) Os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, o fato de se chamar de vetores os *polinômios*, (quando V for constituído de polinômios), as *matrizes* (quando V for constituído de matrizes), os *números* (quando V for constituído for um conjunto numérico), e assim por diante. Podemos fazer isso, pois esses elementos de natureza tão distinta se comportam de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

2) Se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ do números complexos, V seria um *espaço vetorial complexo*.

# Produto Interno num Espaço Vetorial

$$P = \langle u\,,\, v \rangle$$

P1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para todos $u, v \in V$;
P2) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ para todos $u, v, w \in V$;
P3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$ para todos $u, v \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
P4) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in V$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

**(O Produto Interno Usual em $\mathbb{R}^2$)**
$\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac + bd$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \langle \vec{A}\,, \vec{B}\rangle = \langle (A_x, A_y)\,, (B_x, B_y)\rangle = A_x\,B_x + A_y\,B_y$$

$$\vec{A}\,.\,\vec{A} = \langle \vec{A}\,, \vec{A}\rangle = \langle (A_x, A_y)\,, (A_x, A_y)\rangle = A_x\,A_x + A_y\,A_y$$

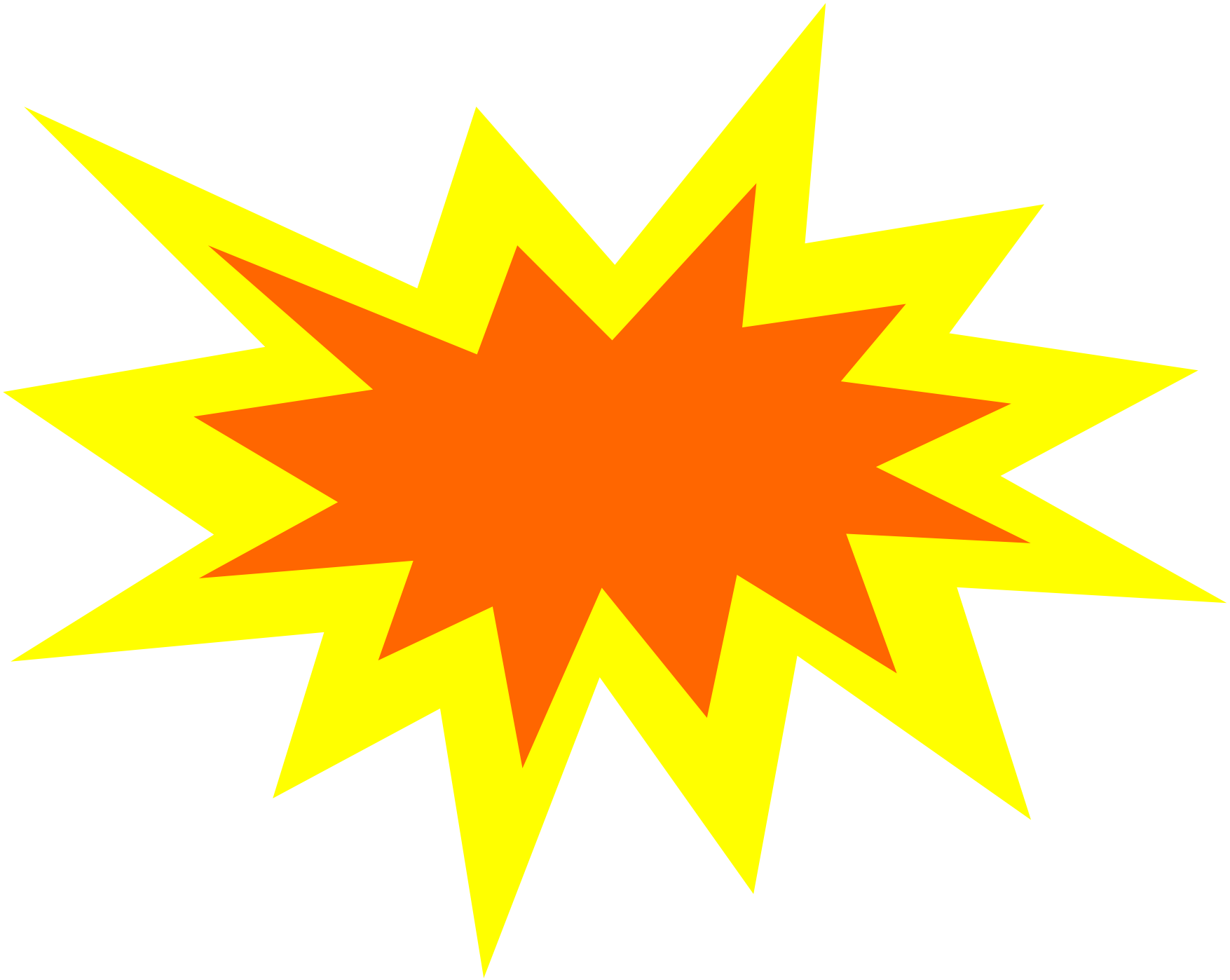
# Espaços Vetoriais Euclidianos

Um *espaço vetorial euclidiano* é um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno.

# Norma de um Vetor

Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno Dado $v \in V$ define-se a *norma* de $v$, indicada por $|v|$, por

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \qquad |\vec{A}| = \sqrt{A_x\, A_x + A_y\, A_y}$$

$|v| = 1$ vetor unitário vetor normalizado

Para normalizar: $u = \dfrac{v}{|v|}$