AULA 13

Mecânica Quântica I

AULA 13

Movimento de Partícula Carregada em campo Magnético

Vimos que uma partícula carregada de massa $\underline{\underline{m}}$ e carga $\underline{\underline{e}}$ em um campo magnético estático e uniforme $\vec{B} = (0,0,B)$, $B>0$ pode ser descrita pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2\right) + \underbrace{\frac{p_z^2}{2m}}_{\text{livre}} \quad (1)$$

$$H_{xy} = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2\right) \quad (2)$$ descreve o movimento no plano $xy \perp \vec{B}$

* Definindo:

$$a = \sqrt{\frac{m}{2\hbar w_c}} \left(v_x + i v_y\right) \qquad w_c = \frac{eB}{mc}$$

Mostramos que

$$H_{xy} = \hbar w_c \left(a^{+} a + \frac{1}{2}\right) \quad (3)$$ como o oscilador harmônico 1D

logo o espectro de energia é do movimento transverso

$$E_n = \hbar w_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (4) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$a|0\rangle = 0$ nível fundam.

os estados satisfazem essa equação!

que são os chamados <u>níveis</u> <u>de</u> <u>Landau</u>

Vimos também que a solução para as equações de movimento no plano xy são

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{\omega_c} v_y(t) \quad (5a)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\omega_c} v_x(t) \quad (5b)$$

com $[H_{xy}, x_0] = [H_{xy}, y_0] = 0$ mas $[x_0, y_0] \neq 0!$ $-i l_B^2$,

x_0, y_0 são constantes de movimento e representam os operadores que determinam o centro da órbita. Não é possível especificar x_0 e y_0 ao mesmo tempo!

Queremos especificar os auto-estados de energia desse sistema. Precisamos de outro número quântico para isso. Esse outro número quântico assim como as funções de onda correspondentes dependem do gauge escolhido.

Vamos escolher o gauge simétrico para o qual

$$A_x = -\frac{1}{2} y B \qquad A_y = \frac{1}{2} x B$$

<ins>Note</ins>: o sistema tem inv. por translação e rotação em torno do eixo z. gauge quebra uma das simetrias

de forma que

$$v_x = \frac{p_x}{m} - \frac{e}{mc} A_x = \frac{p_x}{m} + \frac{\omega_c}{2} y \quad (6a)$$

$$v_y = \frac{p_y}{m} - \frac{e}{mc} A_y = \frac{p_y}{m} - \frac{\omega_c}{2} x \quad (6b)$$

$$H_{xy} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m \left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{\omega_c^2}{4} y^2 + \frac{\omega_c}{m} p_x y + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{\omega_c^2}{4} x^2 \right.$$

$$\left. - \frac{p_y}{m} \omega_c x \right) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{8} \omega_c^2 m (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \omega_c (p_x y - p_y x)$$

$$= \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\omega^2 m}{2} x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{\omega^2 m}{2} y^2 \right) - \frac{1}{2} \hbar \omega_c L_z$$

onde $L_z = (x p_y - y p_x)/\hbar$ mom. angular orbital na direção de $\vec{B}$

e $\omega \equiv \omega_c/2$

$H_{xy} + \frac{1}{2}\hbar\omega_c L_z$ tem o espectro de um oscilador harmônico

2D isotrópico : $\hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n_x\right) + \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n_y\right) = \hbar\omega\left(1+n_x+n_y\right)$

$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(1+n_x+n_y\right) = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(1+n_\perp\right) \quad \therefore \quad E(n_\perp,\mu) = \frac{1}{2}\hbar\omega_c\left(n_\perp-\mu+1\right)$

$= \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

mas $[H_{xy}, L_z] = 0$ L_z é constante de movimento

De fato

$\hbar L_z = x(t)\, p_y - y(t)\, p_x$ usando (6a) e (6b)

$= x(t)\left(m v_y + \frac{m\omega_c}{2}x\right) - y(t)\left(m v_x - \frac{m\omega_c}{2}y\right)$

$= m\left(x v_y - y v_x\right) + \frac{m\omega_c}{2}\left(x^2+y^2\right)$ usando (5a) e (5b)

$= m x(x_0 - x)\omega_c - m\omega_c y(y-y_0) + \frac{m\omega_c}{2}\left(x^2+y^2\right)$

$= m\omega_c\left(x x_0 + y y_0\right) - \frac{m\omega_c}{2}\left(x^2+y^2\right) = m\frac{\omega_c}{2}\left(R_0^2 - R^2\right)$ (7)

raio da órbita

mas $R^2 = \left[(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2\right] \equiv \frac{2H_{xy}}{m\omega_c^2}$ (8a)

$R_0^2 = X_0^2 + Y_0^2$ (8b) ← centro da órbita (distância da origem)

Queremos encontrar uma base $|n,\mu\rangle$

H_{xy} L_z

$$\hbar L_z = \frac{m w_c}{2}\left(R_0^2 - R^2\right) = \frac{m w_c}{2} R_0^2 - \frac{m w_c}{2} \cdot \frac{2 H_{xy}}{m w_c^2}$$

definindo

$$l_B^2 = \frac{\hbar}{m w_c} \quad (9) \qquad \boxed{L_z = \frac{1}{2 l_B^2} R_0^2 - \frac{H_{xy}}{\hbar w_c}} \quad (10)$$

Definimos os operadores sem dimensão

$$Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}\, l_B}\left(X_0 \pm i Y_0\right) \quad (11)$$

$$[Q_-, Q_+] = Q_- Q_+ - Q_+ Q_- = \frac{1}{2 l_B^2}\left[(X_0 - iY_0), (X_0 + iY_0)\right]$$

$$= \frac{2}{2 l_B^2}\, i\, [X_0, Y_0] = \frac{1}{l_B^2}\, i \; -i\, l_B^2 = 1. \qquad [Q_-, Q_+] = 1 \quad (12)$$

$$Q_- Q_+ = \frac{1}{2 l_B^2}\left[X_0^2 + Y_0^2 + l_B^2\right] = \frac{R_0^2}{2 l_B^2} + \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$\boxed{Q_- Q_+ = L_z + \frac{H_{xy}}{\hbar w_c} + \frac{1}{2}} \quad (14)$$

Vamos supor que

$$Q_\pm |n\, \mu\rangle = C_\pm |n\, \mu \pm 1\rangle$$

$$|C_+|^2 = \langle n \mu | Q_- Q_+ | n \mu \rangle = |C_-|^2 + 1$$

$$|C_+|^2 = \langle n\mu |\, L_z + \frac{H_{xy}}{\hbar\omega_c} + \frac{1}{2}\, | n\mu \rangle$$

$$= \mu + n + 1$$

Assim

$$Q_+ | n\mu \rangle = \sqrt{\mu + n + 1}\; | n\ \mu+1 \rangle \qquad (15a)$$

$$Q_- | n\mu \rangle = \sqrt{\mu + n}\; | n\ \mu-1 \rangle \qquad (15b)$$

escolhendo as fases arbitrarias de forma apropriada.

$$Q_- | n\ -n \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \mu = -n, -n+1, -n+2, \dots$$

vemos que o espectro do momento angular ~~no~~ subespaço degenerado de energia E_n é limitado inferiormente e toma os valores inteiros $\mu = -n, -n+1, -n+2, \dots$

a^+ é o operador de levantamento de energia e abaixa L_z de 1.

$$\boxed{a^+ | n\ \mu \rangle = \sqrt{n+1}\; | n+1\ \mu-1 \rangle} \qquad \mathbf{(16a)}$$

pois $a^+ \propto v_x - i v_y = \frac{1}{m}(p_x - i p_y) + \frac{i\omega_c}{2}(x - iy)$

$$\boxed{a | n\ \mu \rangle = \sqrt{n}\; | n-1\ \mu+1 \rangle} \qquad \mathbf{(16b)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n | 0\ 0 \rangle = | n\ -n \rangle$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m}{\hbar w_c}} \; \frac{1}{\sqrt{2}} (v_x - i\, v_y)$$

$$a = \sqrt{\frac{m}{\hbar w_c}} \; \frac{1}{\sqrt{2}} (v_x + i\, v_y)$$

Vimos que um operador vetorial $\vec{V}$ pode ser escrito na base esférica como

$$V_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (V_x + i\, V_y) = -\sqrt{\frac{\hbar w_c}{m}}\; a$$

$$V_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x - i\, V_y) = \sqrt{\frac{\hbar w_c}{m}}\; a^+$$

(Mostre!) $\quad [V_i, L_k] = i\, \varepsilon_{ikl} V_l$

$$[L_z, V_{\pm 1}] = \pm V_{\pm 1}$$

$$L_z |l\mu\rangle = \mu |l\mu\rangle$$

$$V_\pm L_z |l_\mu\rangle = \mu V_\pm |l\mu\rangle = L_z V_\pm |l_\mu\rangle \mp V_\pm |l_\mu\rangle$$

$$\therefore \; L_z \left(V_\pm |l_\mu\rangle \right) = (\mu \pm 1) \left(V_\pm |l_\mu\rangle \right)$$

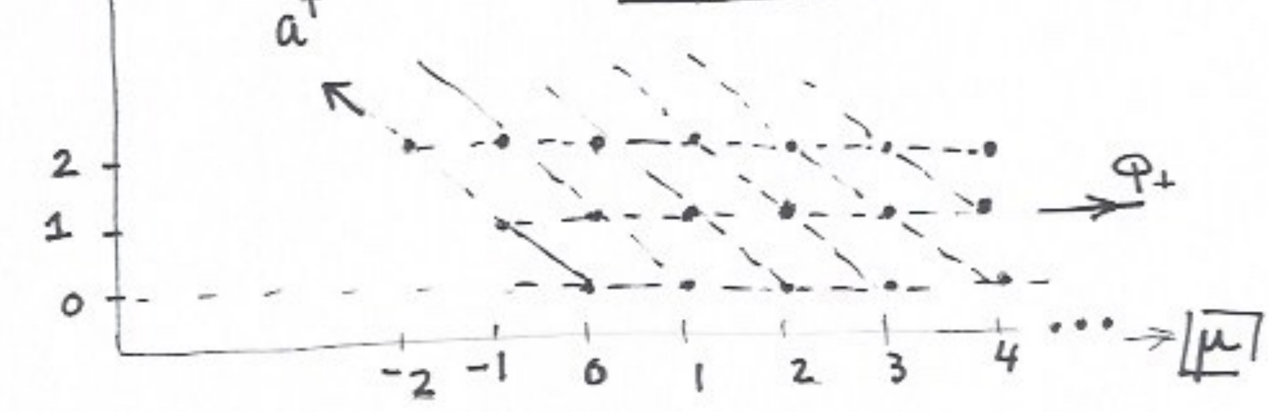
$\Rightarrow V_\pm |l_\mu\rangle$ é autoestado de L_z com autovalor

$\mu \pm 1 \quad \Rightarrow \quad V_\pm |l_\mu\rangle \propto |l\, \mu \pm 1\rangle$

$$\therefore \; a |l_\mu\rangle \propto |l\, \mu+1\rangle$$
$$a^+ |l_\mu\rangle \propto |l\, \mu-1\rangle$$

$$|n\,\mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,(n+\mu)!}}\,(Q_+)^{n+\mu}\,(a^\dagger)^n\,|0\,0\rangle \qquad (17)$$

Espectro de Energia e Momento Angular



ESTADOS COERENTES

Novamente aqui estados coerentes são um conjunto completo de estados não-ortogonais dependentes do tempo descrevendo pacotes de onda movendo-se sem distorção ao longo de trajetórias clássicas.

Precisamos de 4 parâmetros para descrever essas trajetórias: o raio do círculo ou equivalente a energia; o ponto no círculo onde a partícula está em $t=0$ e as coordenadas do centro do círculo.

a e $a^\dagger$: definem o movimento no círculo

$Q_\pm$: estão relacionados à posição do centro do círculo

$[a, a^\dagger] = 1$ e $[a, Q_\pm] = 0$ $\quad [a^\dagger, Q_\pm] = 0$

$[Q_-, Q_+] = 1$

podemos copiar a teoria de estados de osciladores coerentes p/

cada par de operadores

$$a|z\,w\rangle = z|z\,w\rangle \quad (17a) \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

$$Q_-|z\,w\rangle = w|z\,w\rangle \quad (17b)$$

Definimos os dois operadores de deslocamento unitários

$$D(z) = \exp[z a^\dagger - z^* a] \quad (18a) \qquad [D(z), F(w)] = 0$$

(Mostre!)

$$F(w) = \exp[w Q_+ - w^* Q_-] \quad (18b)$$

$$|w\,z\rangle = F(w)\,D(z)|00\rangle \quad (19)$$

$Q_\pm$ são const. de movimento $\rightarrow$ w não muda com o tempo.

$z \rightarrow z e^{-i\omega_c t}$

energia de ponto zero.

$$e^{-iHt}|z\,w\rangle = |z e^{-i\omega_c t}\, w\rangle\, e^{-i\omega_c t/2}$$

$$\bar{a}(t) = z e^{-i\omega_c t} = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}\left[\bar{v}_x(t) + i\,\bar{v}_y(t)\right] \quad (20)$$

$z = |z| e^{i\phi}$

$$\bar{v}_x(t) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_c}{m}}\,|z| \cos(-\phi + \omega_c t) \quad (21a)$$

$$\bar{v}_y(t) = -\sqrt{\frac{2\hbar\omega_c}{m}}\,|z|\,\mathrm{sen}(\omega_c t - \phi) \quad (21b)$$

$$\overline{H}_{xy} = \frac{1}{2} m \left(\overline{v_x^{*}}^2 + \overline{v_y^{*}}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{2\hbar w_c}{m} |z|^2 = \hbar w_c |z|^2 \quad (22)$$

$$\overline{R^2} = \frac{2}{m w_c^2} \overline{H}_{xy} = \frac{2\hbar}{m w_c} |z|^2 = 2 l_B^2 |z|^2$$

(raio quadrado médio da órbita)

O valor esperado do centro do círculo

$$\overline{Q_-} = w = \frac{1}{\sqrt{2}\, l_B} (\bar{x}_0 - i \bar{y}_0)$$

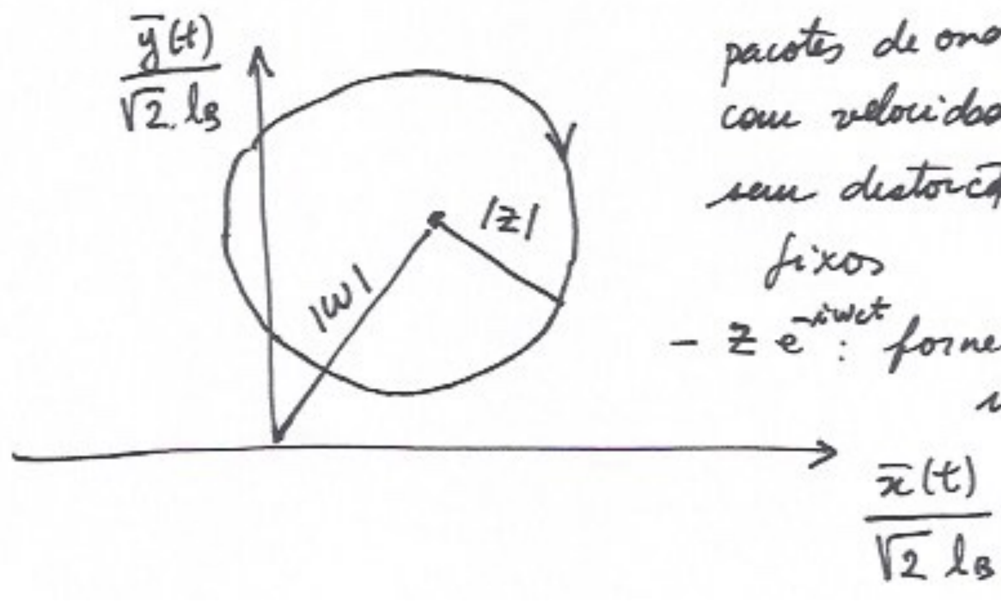
lembrando que

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{w_c} v_y(t) \qquad y(t) = y_0 + \frac{1}{w_c} v_x(t)$$

$$\bar{x}(t) = \sqrt{2}\, l_B \left[\mathrm{Re}\, w + |z| \,\mathrm{sen}\, w_c t \right]$$

usando. $\phi = 0$

$$\bar{y}(t) = \sqrt{2}\, l_B \left[-\mathrm{Im}\, w + |z| \cos w_c t \right]$$



pacotes de onda que se movem com velocidade angular w_c e sem distorção em círculos fixos

- $z e^{-iw_c t}$: fornece a posição instantânea média do pacote no círculo

Funções de Onda do Estado Fundamental

Definimos: $z = x + iy \qquad \overset{*}{z} = x - iy$

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\nabla_x - i\,\nabla_y\right)$$

$$\partial_{\overset{*}{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \overset{*}{z}} = \frac{1}{2}\left(\nabla_x + i\,\nabla_y\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}\left(v_x - i v_y\right) = \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}\left(p_x - \frac{e}{c}A_x + i p_y - i\frac{e}{c}A_y\right)$$

$$= \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}\left(\frac{\hbar}{i}\left(\nabla_x + i\,\nabla_y\right) - \frac{eB}{2c}\left(-y + ix\right)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{c}{2\hbar eB}}\left(\frac{\hbar}{i}\, 2\,\partial_{\overset{*}{z}} - \frac{eB}{2c}iz\right)$$

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{\hbar c}{2eB}}\,(-i)\left(2\frac{\partial}{\partial \overset{*}{z}} + \frac{eB}{2\hbar c}z\right)}$$

de forma análoga $\boxed{a^{+} = -i\sqrt{\frac{\hbar c}{2eB}}\left(2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{eB}{2\hbar c}\overset{*}{z}\right)}$

$$\langle z\bar{z}|a|0\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar c}{2eB}}\left(2\frac{\partial}{\partial \overset{*}{z}} + \frac{eB}{2\hbar c}z\right)\psi(z,\overset{*}{z}) = 0$$

$$\psi(z,\overset{*}{z}) = f(z)\, e^{-Be\overset{*}{z}z/4\hbar c}$$

$f(z)$ é uma função arbitrária de z. Existem ∞ estados fundamentais, um para cada $f(z)$ analítica. Costuma-se escolher essas funções independentes como simplesmente polinômios z^μ

$$\psi_\mu(z,z^*) = N_\mu \, z^\mu \, e^{-eBz^*z/4\hbar c}$$

$$\int d^2x \, |\psi_\mu|^2 = N_\mu^2 \int 2\pi r \, dr \, r^{2\mu} \, e^{-eBz^*z/2\hbar c} = 1.$$

$$N_\mu = \left[\mu! \, \pi \left(\frac{2\hbar c}{eB}\right)^{\mu+1}\right]^{-1/2} \qquad \mu = 0, 1, 2 \ldots$$

$$L_z = (x p_y - y p_x)/\hbar = \frac{1}{i}\left(x \nabla_x - y \nabla_y\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{z+z^*}{2} i(\partial_z - \partial_{z^*}) - \frac{(z-z^*)}{2i}(\partial_z + \partial_{z^*})\right) = \left(z\,\partial_z - z^*\partial_{z^*}\right)$$

$$\boxed{L_z \psi_\mu = \mu \psi_\mu} \longleftarrow \text{Mostre!}$$

$$\Phi_- = \sqrt{\frac{\hbar c}{2eB}}\left(2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{eB}{2\hbar c} z^*\right) \qquad \Phi_+ = \sqrt{\frac{\hbar c}{2eB}}\left(-2\frac{\partial}{\partial z^*} + \frac{eB}{2\hbar c} z\right)$$

$$\Phi_- \psi_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{2eB}}\left(2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{eB}{2\hbar c} z^*\right) N_0 \, e^{-eBz^*z/4\hbar c} = 0$$

$$(\Phi_+)^\mu \psi_0 = \sqrt{\mu!} \, N_\mu \, z^\mu \, e^{-eBz^*z/4\hbar c}$$

Constrói todos os funções de onda dos estados fundamentais!

$$a^+ \psi_\mu = ?$$