10 Vorticidade e circulação

Assuntos

- Definição de vorticidade;
- Definição de circulação;
- Vórtices;
- Vórtice irrotacional;
- Vórtice de Rankine.

Referências bibliográficas

- Notas de aula;
- Kundu, Pijush K., Ira M. Cohen, and D. W. Dowling. "Fluid Mechanics 4th."(2008): 1-277;
- Nussenzveig, Herch Moysés. Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor. Vol. 2. Editora Blucher, 2018;
- Apostila do Prof. Paulo Polito.

10.1 Vorticidade

Em corpos sólidos é bastante prático o conceito de momento angular, que trata de uma propriedade associada com um corpo em rotação, ou de uma partícula em um movimento circular. Para fluidos, entretanto, este conceito torna–se um pouco mais complexo devido a movimentação relativamente livre de suas partículas. Entretanto, fluidos também apresentam comportamento rotacionais e, assim, é definida a grandeza vetorial vorticidade ($\vec{\omega}$), que dá uma medida deste comportamento rotacional nos fluidos. A vorticidade é definida como o rotacional da velocidade de um fluido e, matematicamente, expressa como:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \tag{10.1}$$

Na oceanografia é bastante comum analisar a vorticidade apenas em sua componente vertical, que representa uma rotação no plano horizontal. Assim, muitas vezes, a vorticidade será tratada como:

$$\omega_k = \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot \hat{k} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{10.2}$$

De maneira direta, um fluido é considerado irrotacional se a sua vorticidade for nula ($\vec{\omega} = 0$).

10.2 Circulação

Um outro conceito importante quando abordamos fluidos em rotação é o conceito de circulação (Γ). A circulação é definida como a integral de linha, em um contorno fechado, da componente tangencial da velocidade a este contorno. Matematicamente, teremos:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot \vec{ds} \tag{10.3}$$

Note que é possível estabelecer uma relação direta entre a vorticidade e a circulação, aplicando o Teorema de Stokes (Eq. 8.4). Teremos, assim:

$$\begin{aligned} \Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot \vec{ds} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{dA} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma = \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{dA} \end{aligned} \tag{10.4}$$

10.3 Vórtice

Vórtices são fluxos fechados onde as partículas giram em torno de um ponto. Estes fluxos são normalmente circulares e podem, inclusive, movimentar–se como um todo. Normalmente são gerados por instabilidades no circulação oceânica.

10.4 Coordenadas polares planas

Para tratar problemas em que há rotação de um fluido, é bastante útil tratá–lo, normalmente, em um sistema de coordenadas polares planas (Figura 10.4). Neste sistema a posição de um objeto é dada em termos de sua distância ao centro (R) e de um ângulo, no sentido antihorário, com relação a uma radial de referência (θ). Os versores, neste sistema, são, também, perpendiculares e orientados na direção radial ($\hat{e}_R$) e tangente à radial que contêm o ponto ($\hat{e}_\theta$).

Neste sistema, teremos as seguintes relações:

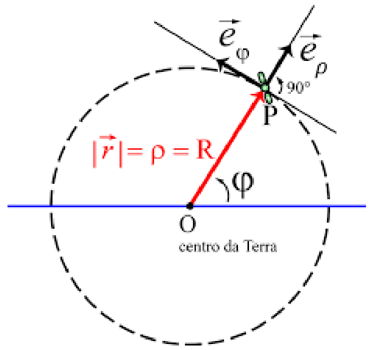

Figura 3: Sistema de coordenadas polares planas.

$$u_R = \frac{dR}{dt} \tag{10.5}$$

$$u_\theta = R\frac{d\theta}{dt} \tag{10.6}$$

$$\vec{u} = u_R\hat{e}_R + u_\theta\hat{e}_\theta \tag{10.7}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{R}\frac{\partial(RF_R)}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \tag{10.8}$$

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial \theta}\hat{e}_\theta \tag{10.9}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}RF_R - \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{10.10}$$

10.5 Rotação de corpo sólido

Dizemos que um fluido está em regime de rotação de corpo sólido quando o seu comportamento é semelhante ao de um sólido e, portanto, as partículas deste fluido, embotra em rotação, mantém as mesmas posições relativas. Assim, por definição, temos que a velocidade radial é nula e a velocidade angular (ω_0) é constante para qualquer ponto. Teremos, portanto:

$$u_R = 0 \tag{10.11}$$

$$u_\theta = R\omega_0 \tag{10.12}$$

Exercise 22:

Determine a vorticidade de um fluxo que está em regime de corpo sólido. Determine, também, a sua circulação em função do raio.

10.6 Vórtice irrotacional

Exercise 23:

Determine a vorticidade do seguinte fluxo:

$$u_R = 0$$
$$u_\theta = \frac{C}{R}$$

onde C é uma constante.

Solução: $\omega_k = 0$. Temos, assim, que, embora exista uma circulação em torno de um ponto, este fluxo é irrotacional.

Exercise 24:

Calcule a circulação deste mesmo fluxo.

Solução: $\Gamma = 2\pi C$. A questão que se apresenta, então, é como um fluxo de rotacional nulo pode ter circulação não nula (Ver Equação 10.4)? Basicamente, a vorticidade é nula fora do centro pois, no centro, a velocidade não pode ser definida. Assim, o único ponto com contribuição não nula para a circulação é no centro.

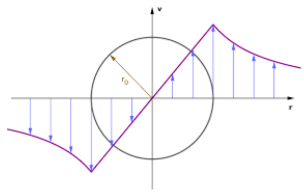

Figura 4: Vórtice de Rankine.

10.7 Vórtice de Rankine

O vórtice de Rankine é definido por uma circulação central em regime de corpo sólido e, fora desta região, um fluxo irrotacional (Figura 4). Este tipo de circulação pode ser observado em furacões e em escoamento de pias.