

4 Pressão hidrostática

Assuntos

- Balanço de forças;
- Pressão hidrostática como escalar;
- Pressão hidrostática no oceano;
- Pressão hidrostática na atmosfera.

Referências bibliográficas

- Notas de aula;
- Nussenzweig, Herch Moysés. Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor. Vol. 2. Editora Blucher, 2018;
- Kundu, Pijush K., Ira M. Cohen, and D. W. Dowling. "Fluid Mechanics 4th."(2008): 1-277;
- Apostila do Prof. Paulo Polito.

4.1 Introdução

Por definição, a pressão é igual a força aplicada dividida pela área. Assim, como a força, a pressão também é uma grandeza vetorial. Entretanto, para os fluidos, veremos que a pressão hidrostática pode ser tratada como um escalar e, portanto, a determinação da pressão hidrostática será uma função apenas da posição no fluido.

4.2 Equilíbrio de forças

Inicialmente, vamos definir a pressão hidrostática como aquela no interior de um fluido em repouso e devido apenas ao peso da coluna do mesmo. Vamos, portanto, considerar um elemento infinitesimal com dimensões δx , δy e δz e com densidade ρ . Assim, para manter-se em repouso, teremos que na direção x o balanço de forças é dado por:

$$P\delta y\delta z = (P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta x)\delta y\delta z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

De maneira análoga podemos escrever:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

Na direção vertical deve ser incluído o peso do próprio elemento de volume no balanço. Assim, o equilíbrio é dado por:

$$\begin{aligned} P\delta x\delta y - (P + \frac{\partial P}{\partial z}\delta z)\delta x\delta y - \rho g\delta x\delta y\delta z &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z}\delta z - \rho g\delta z &= 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{aligned} \quad (4.3)$$

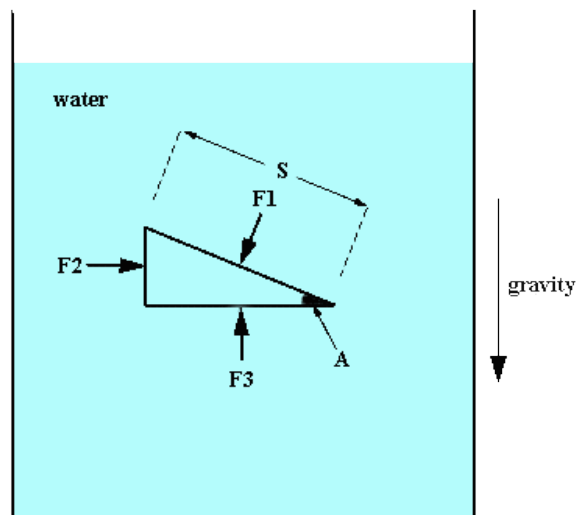
**Figure 2**

Figura 1: Prisma triangular.

Como $P = P(z)$, podemos escrever que a pressão hidrostática é dada por:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (4.4)$$

A Pressão Hidrostática será usada diversas vezes durante o curso.

Vamos mostrar agora que a pressão hidrostática é a mesma em qualquer direção. Tomando-se um prisma triangular, temos que a pressão no lado A é $\vec{P}_1 ah$, no lado B é $\vec{P}_2 bh$, e no lado C , $\vec{P}_3 ch$ (Figura 1). Assumindo que o ângulo entre a e b é θ e que a base triangular tem um ângulo reto, podemos escrever que o balanço de forças nas 2 direções é dado por:

$$ahP_1 \cos \theta = bhP_2 \quad (4.5)$$

$$ahP_1 \sin \theta = chP_3 \quad (4.6)$$

Usando a Lei dos Senos, teremos:

$$b = a \cos \theta \quad (4.7)$$

$$c = a \sin \theta \quad (4.8)$$

Desta maneira, substituindo as equações acima teremos:

$$ahP_1 \cos \theta = ahP_2 \cos \theta \Rightarrow P_1 = P_2 \quad (4.9)$$

$$ahP_1 \sin \theta = ahP_3 \sin \theta \Rightarrow P_1 = P_3 \quad (4.10)$$

E, portanto:

$$P_1 = P_2 = P_3 \quad (4.11)$$

Mostrando que a intensidade da pressão, no caso hidrostático, é a mesma para todas as direções.

4.3 Pressão hidrostática no oceano

Exercise 10:

Determine em qual profundidade no oceano a pressão devido ao peso da coluna d'água é igual a pressão atmosférica. ($P_{atm} \approx 10^5 Pa$ e $\rho_{gua} \approx 1.025 kgm^{-3}$)

Assim, uma maneira aproximada de se determinar a pressão hidrostática

com base na pressão é simplesmente assumir que a cada $10m$, a pressão aumenta uma atmosfera.

De maneira mais rigorosa, a integração da Equação 4.4, considerando uma densidade constante ($\rho = \bar{\rho}$), nos dá:

$$P = P_0 - \bar{\rho}gz \quad (4.12)$$

onde $P_0 = P(z = 0)$, ou seja, a pressão na superfície do oceano, que é igual a pressão atmosférica.

Exercise 11:

Por que não podemos fazer uma aproximação semelhante para a atmosfera?

Solução: Porque enquanto a água pode ser tratada, aproximadamente, como um fluido incompressível, o ar é um fluido compressível.

4.4 Pressão hidrostática na atmosfera

Para se determinar, aproximadamente, a pressão hidrostática na atmosfera, vamos fazer as seguintes aproximações: (i) o ar é um gás perfeito ($PV = nRT$); (ii) a temperatura da atmosfera é constante. Assim, podemos escrever:

$$\frac{\rho(z)}{P(z)} = \frac{\rho(0)}{P(0)} = \frac{\rho_0}{P_0} \quad (4.13)$$

lembrando que $\frac{\rho_0}{P_0}$ é constante. Assim, teremos:

$$\frac{dP}{dz} = -g \frac{\rho_0}{P_0} P \quad (4.14)$$

e, portanto, teremos:

$$P = ke^{-\frac{g\rho_0}{P_0}z} \quad (4.15)$$

Por fim, aplicando $P(z=0) = P_0$, teremos:

$$P = P_0 e^{-\frac{g\rho_0}{P_0}z} \quad (4.16)$$

Esta aproximação, conhecida como Lei de Halley, é bastante razoável até cerca de $1000m$ de altitude.

Exercise 12:

Assumindo que a altitude da cidade de São Paulo é de cerca de $760m$, estime a pressão atmosférica sabendo que, em Santos, $P_{atm} \approx 1010hPa$.

[Nota: $\rho_{ar}(z=0) \approx 1.2kgm^{-3}$ e $g \approx 10ms^{-2}$.]