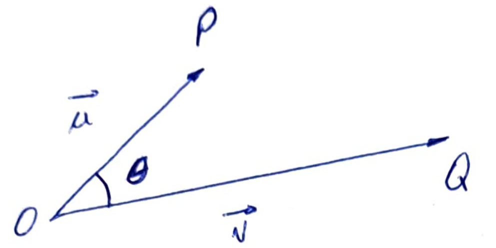
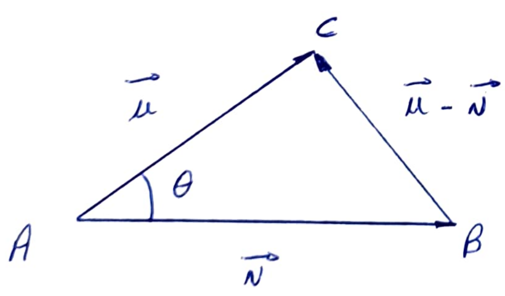
Medida angular entre dois vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Chama-se medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ($\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$) a menor medida θ do ângulo $P\hat{O}Q$ dos representantes (O,P) e (O,Q), $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente.



Note que:
- $0 \leq \theta \leq 180°$, se a unidade for grau
- $0 \leq \theta \leq \pi$ rad, se a unidade for radiano

Ângulo agudo: $0° \leq \theta < 90°$
Ângulo reto: $\theta = 90°$
Ângulo obtuso: $90° < \theta \leq 180°$



Lei dos co-senos:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$$

Do exemplo anterior, temos: $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$\therefore \quad \cancel{\|\vec{u}\|^2} + \cancel{\|\vec{v}\|^2} - \cancel{2} \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \cancel{\|\vec{u}\|^2} - \cancel{2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \cancel{\|\vec{v}\|^2}$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta}$$

- Definição (Produto Escalar)

O produto escalar entre dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ é o número real (escalar), tal que:

a) Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

sendo θ o $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$

Exemplo:

Se as coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}$ em relação a uma base ortonormal E são $(2,0,-3)_E$ e $(1,1,1)_E$, respectivamente, encontre a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1$

$= -1$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Logo, $\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{39}}$ e portanto $\underline{\overset{\measuredangle(\vec{u},\vec{v})}{\theta} = \operatorname{arcos}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{39}}\right)}$ //.

Exemplo:

Repita o exercício anterior, sendo $\vec{u} = (-2, 3, -2)_E$ e $\vec{v} = (-1, 2, 4)_E$.

$$\cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4$$

$$= 0$$

Logo, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais entre si.

Definição: (Medida angular entre dois vetores)

a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, então:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

b) Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$,

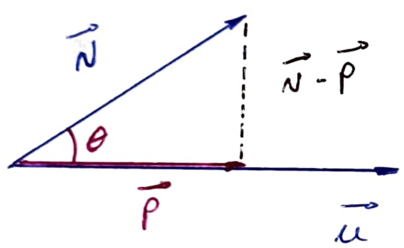
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

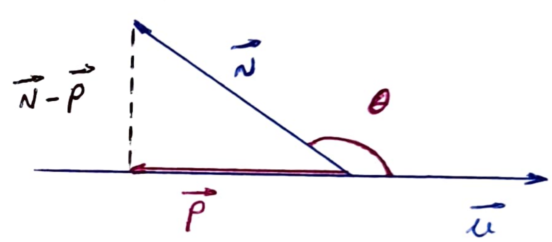
Definição (Projeção ortogonal)

Seja $\vec{u}$ um vetor não-nulo. Dado $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$, o vetor $\vec{p}$ é chamado projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, e indica-se por $\vec{p} = proj_{\vec{u}} \vec{v}$, se satisfaz as seguintes condições:

a) $\vec{p} \parallel \vec{u}$

b) $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$





Teorema: (Existência e unicidade da Projeção ortogonal)

Seja $\vec{u}$ um vetor não-nulo e $\vec{v}$ um vetor qualquer, existe uma única projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$:

$$proj_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$$

e a expressão de sua norma:

$$\| proj_{\vec{u}} \vec{v} \| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

Demonstração:

i)

Se $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\, \vec{v}$ então, pela definição, $\vec{p} \parallel \vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{p} \perp \vec{u}$. Portanto, provar que $\vec{p}$ existe e é único, é equivalente a provar que existe um único número real λ tal que:

$$\vec{p} = \lambda \vec{u} \qquad (\text{paralelos})$$

$$(\vec{v} - \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \qquad (\text{ortogonalidade})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \|\vec{u}\|^2$$

$$\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$$

$$\therefore \quad \vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} = \text{proj}_{\vec{u}}\, \vec{v}$$

ii) Norma:

$$\|\text{proj}_{\vec{u}}\, \vec{v}\| = \left\| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} \right\|$$

$$= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\|\text{proj}_{\vec{u}}\, \vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}$$

Observação:

Note que se dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são ortogonais, então são LI. Sabemos também que todo vetor $\vec{w}$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é existe α, β tais que:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

Para isso, precisamos encontrar α e β. Se tomarmos o produto escalar em ambos os lados, temos:

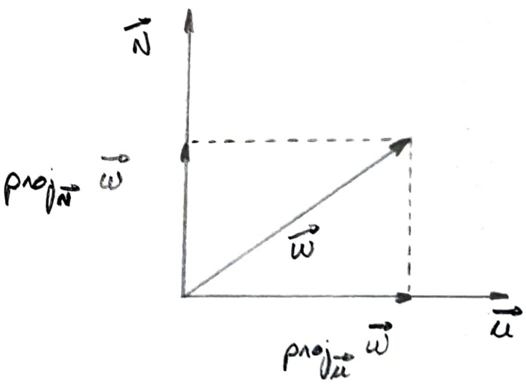
$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{u} &= (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot \vec{u} \\ &= \alpha\, \vec{u} \cdot \vec{u} + \beta \cancel{\vec{v} \cdot \vec{u}}^{\,0} \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} &= \alpha \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = \dfrac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$

Analogamente, temos

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \beta \|\vec{v}\|^2$$

Logo, $\beta = \dfrac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$



Conclusão, se $\vec{u}, \vec{v}$ são ortogonais e $\vec{w}$ é um vetor qualquer no plano formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \qquad \therefore \quad \vec{w} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} + \text{proj}_{\vec{v}} \vec{w}$$

Exemplo:

Seja E uma base ortonormal, $\vec{w} = (1,1)_E$, $\vec{u} = (-2,1)_E$ e $\vec{v} = (1,-1)_E$, escreva $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Note que $\vec{w} \perp \vec{v}$, pois $\vec{w} \cdot \vec{v} = 1.1 + 1.(-1) = 0$

logo, $$\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = -2 + 1 = -1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 - 1 = -3$

$\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = 1 + 1 = 2$

$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = 1 + 1 = 2$

$$\vec{u} = -\frac{1}{2} \vec{w} - \frac{3}{2} \vec{v}$$

logo, $\vec{w} = -2\vec{u} - 3\vec{v}$