$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[b_0 - \frac{b_0}{2}x^2 + b_3 \cdot x^3 - \frac{b_0}{8}x^4 + \frac{b_3}{10} \cdot x^5 \dots\right] \Rightarrow$$

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} b_0 \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots\right] + \frac{1}{\sqrt{x}} b_3 \left[x^3 + \frac{x^5}{10} + \dots\right] \Rightarrow$$

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} b_0 \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots\right] + \frac{b_3 \cdot x^3}{\sqrt{x}} \left[1 + \frac{x^2}{10} + \dots\right] \Rightarrow$$

$$y_2(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} b_0 \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots\right]}_{1^{\circ}\ \text{termo}} + \underbrace{b_3 \cdot x^{\frac{5}{2}} \left[1 + \frac{1}{10}x^2 + \dots\right]}_{2^{\circ}\ \text{termo}} \qquad (201)$$

Repare que a equação (200) contém duas constantes arbitrárias, b_0 e b_3, e o primeiro e o segundo termos são linearmente independentes, ou seja, ela própria já é uma solução geral. Não teria sido necessário considerar a raiz $r_1 = \frac{5}{2}$, já que com a raiz menor, obtivemos a solução. Na verdade, o segundo termo da equação (201) é a solução $y_2(x)$, apenas com um coeficiente diferente. Assim, quando nos depararmos com situações do segundo caso é aconselhável primeiro buscar uma solução com a raiz menor, pois em alguns casos o resultado será semelhante ao retratado aqui.

Veja que nada dissemos ainda a respeito dos pontos x_0 singulares irregulares. Nesse caso, não há garantias de existência de uma solução pelo método de Fröbenius.

Funções de Legendre e a Equação Diferencial Ordinária de Legendre

A equação diferencial

$$(1 - x^2)\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + n(n+1)y(x) = 0 \qquad (202)$$

é denominada equação de Legendre de ordem $\underline{n}$. Não confundir essa ordem com a ordem da E.D.O. que neste caso é 2. O parâmetro $\underline{n}$ de forma geral $\in \mathbb{C}$, mas na maioria das aplicações físicas e em especial neste curso trataremos $\underline{n}$ como um não inteiro negativo. A equação de Legendre e uma parente próxima a equação de Legendre associada surgem em vários problemas de Física, do Eletromagnetismo à Mecânica Quântica. Tipicamente, ambas surgem quando da resolução da equação de Helmholtz pelo método de separação de variáveis em coordenadas esféricas em três dimensões. Qualquer solução da equação (202) é chamada de Função de Legendre. Essa função faz parte de um grupo seleto de funções conhecidas como Funções Especiais. Uma forma de se resolver a equação (202) é através do método de série de potências desde que resolvamos em torno de um ponto ordinário. Temos que $x_0 = 0$ é ponto ordinário da equação (202). Trazendo a equação (202) a forma normal ao dividi-la por $(1-x^2)$, temos:

$$\ddot{y}(x) - \frac{2x}{(1-x^2)}\dot{y}(x) + \frac{n(n+1)}{(1-x^2)}y(x) = 0 \qquad (203)$$

Sendo $p(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)}$ e $q(x) = \frac{n(n+1)}{(1-x^2)}$. Assim, facilmente constata-se que $x_0 = 0$ é ponto ordinário da equação (203). Assim, nós podemos aplicar o metodo de série de potências. No método de série de potências, como vimos, supomos que a solução da E.D.O. pode ser escrita na forma de uma série de potências:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (204)$$

Como $x_0 = 0$, então a equação (204) pode ser reescrita como:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (205)$$

Derivando-se a equação (205) duas vezes, obtemos:

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (206)$$

e

$$\ddot{y}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-2} \qquad (207)$$

Substituindo as equações (205), (206) e (207) na equação (202), obtemos:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (208)$$

Sendo $k = n(n+1)$ que foi substituído para não fazer confusão com a variável muda n dos somatórios. Agora devemos colocar x elevado a mesma potência em todos os termos. Antes vamos reorganizar a equação (208):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (209)$$

Tomando $m = n-2$ ou $n = m+2$, temos: (Aqui vou para os demais termos tomar $n = m$)

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0 \qquad (210)$$

Como os somatórios da equação (210) se iniciam em faixas diferentes, devemos ajustar o início à mesma faixa. Assim,

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - 2a_1 . x - 2\sum_{m=2}^{\infty} m a_m x^m + Ka_0 + Ka_1 x$$

$$+ K\sum_{m=2}^{\infty} a_m x^m = 0 \qquad (211)$$

Reorganizando os termos da equação (211), temos:

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left[(m+2)(m+1)a_{m+2} + (-m(m-1) - 2m + K)a_m\right]x^m + (6a_3 - 2a_1 + Ka_1)x + (2a_2 + Ka_0)x^0 = 0$$

(212).

Por identidade polinomial obtemos as seguintes condições:

$$\begin{cases} 2a_2 + K.a_0 = 0 & (213.a) \\ 6a_3 + (K-2)a_1 = 0 & (213.b) \\ (m+2)(m+1)a_{m+2} + (-m^2 - m + K)a_m = 0 & (213.c) \end{cases}$$

Da equação (213.a), obtemos:

$$2.a_2 + K.a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{K.a_0}{2} = -\frac{n(n+1).a_0}{2.1} = -\frac{n(n+1)a_0}{2!}$$

Da equação (213.b), obtemos:

$$6a_3 + (K-2)a_1 = 0 \Rightarrow 6a_3 = (2-K)a_1 \Rightarrow a_3 = \frac{(2-n(n+1))}{1.2.3} = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

Da equação (213.c), chegamos à:

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} + \underbrace{(-m^2 - m + K)}_{=(n-m)(n+m+1)}a_m = 0 \Rightarrow (m+1)(m+2)a_{m+2} = -(n-m)(n+m+1)a_m \Rightarrow$$

$$a_{m+2} = \frac{-(n-m)(n+m+1)a_m}{(m+1)(m+2)}, \quad m \geq 2 \qquad (214)$$

A equação (214) é a equação de recorrência. Para $m = 2$, temos:

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3.4}a_2 = \frac{+(n-2)(n+3)\,n(n+1)}{3.4.2.1} = \frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{4!}a_0$$

Para $m=3$, temos:

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+3+1)}{(3+1)(3+2)}a_3 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4.5}a_3 = \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{1.2.3.4.5} \Rightarrow$$

$$a_5 = \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{5!}$$

Como estamos supondo que a solução seja do tipo $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot x^m$, então:

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot x^m = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots \Rightarrow$$

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x - \frac{n(n+1)}{2!}a_0 x^2 - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1 x^3 + \frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{4!}a_0 x^4 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1 x^5 + \dots$$

$$y(x) = \underbrace{a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \dots\right]}_{y_1(x)} + a_1 \cdot \underbrace{\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \dots\right]}_{y_2(x)}$$

(215)

e obtemos assim duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da E.D.O. de Legendre de ordem n, com raio de convergência $|x|<1$. Usando a fórmula de recorrência 215, para $m=4$, temos:

$$a_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{(5)(6)}a_4 = \frac{-n(n-4)(n-2)(n+1)(n+3)(n+5)}{1.2.3.4.5.6}a_0 = \frac{-n(n-4)(n-2)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}a_0$$

Do coeficiente a_6 e com a comparação com os coeficientes a_2 e a_4, fica fácil perceber um padrão se formando:

m	a_m	n	$P_n(x)$
0	$\frac{1}{0!}a_0$	0	$a_0 \cdot 1 = a_0 \cdot P_0(x)$
2	$\frac{n(n+1)a_0}{2!}$	2	$a_0(1-3x^2) = a_0 P_2(x)$
4	$(n-2)n(n+1)(n+3)a_0$	4	$a_0(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4) = a_0 P_4(x)$
6	$\frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}$	6	$a_0(1-21x^2+63x^4-\frac{231}{5}x^6) = a_0 \cdot P_6(x)$
$\vdots$			
α	$\frac{n(n-2)(n-4)\dots(n-2\beta+2)(n+1)(n+3)\dots(n+2\beta-1)}{\alpha!}$	n	$a_0 P_n(x) = a_0 ?$

Assim, analisando a solução $y_1(x)$, ou seja, a solução onde temos os coeficientes pares $a_0, a_2, a_4,$ $a_6, \dots$ para um determinado n par, a solução obtida será um polinômio de grau x^n. Veja na tabela que quando tomamos $n=0$, todos os coeficientes com índice par são zero, exceto a_0, ou seja, o polinômio resultante é $a_0 . x^0 = a_0 . 1 = P_0(x)$. Repare que $n=2$, todos os coeficientes com índice par são zero exceto a_0 e a_2, tal que o polinômio resultante é dado por $a_0(1-3x^2) = a_0 P_2(x)$. Para $n=4$, teremos: $a_0\left(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right)$, sendo que somente os coeficientes a_0, a_2 e a_4 são diferentes de zero. Repare que os polinômios resultantes sempre possuem grau máximo igual ao n escolhido.

E esse padrão também se repete para os coeficientes com índice ímpar e ordem $\underline{n}$ ímpar? A resposta é sim. Vamos observar o padrão formado analisando a tabela abaixo

m	a_m	n	$P_n(x)$
1	$\frac{1}{1!}a_1$	1	$a_1 . x = a_1 P_1(x)$
3	$-\frac{(n-1)(n+2)a_1}{3!}$	3	$a_1\left(x - \frac{5}{3}x^3\right) = a_1 . P_3(x)$
5 ⋮	$\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}$	5 ⋮	$a_1\left(x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5\right) = a_1 P_5(x)$
α	$\frac{(n-1)(n-3)\dots(n-2\beta+1).(n+2)(n+4)\dots(n+2\beta)}{\alpha!}$	n	$a_1 . P_n(x) = a_1$?

Veja que analisando a solução $y_2(x)$, ou seja, a solução onde temos os coeficientes com índice ímpar $a_1, a_3, a_5, \dots$, para um determinado n ímpar, a solução obtida será um polinômio de grau $\underline{n}$. Muitas vezes é vantajoso transformar a solução obtida na forma de uma série de potências em uma solução polinomial porque dessa forma teríamos a solução para todo x, sem restrições de convergência. Como vimos, quando o grau $n=m$, a equação de recursiva nos mostra que $a_{n+2} = 0$, $a_{n+4} = 0$, $a_{n+6} = 0$ se $\underline{n}$ for par tal que a solução particular $y_1(x)$ ficará na forma de um polinômio de grau. Quando $\underline{n}$ é ímpar, $a_{n+2} = 0$, $a_{n+4} = 0$, $a_{n+6} = 0$ e o mesmo ocorrerá para $y_2(x)$. Os polinômios obtidos nessas soluções são chamados de polinômios de Legendre e denotados por $P_n(x)$, sendo $\underline{n}$ a ordem da E.D.O. de Legrende correspondente ao grau do polinômio. Veja na tabela que os polinômios resultantes são multiplicados pelos coeficientes. Precisamos, dessa forma, achar uma forma de calcular esses coeficientes e determinar os polinômios de Legendre para um determinado $\underline{n}$. Uma forma é escolhermos os coeficientes a_n como:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \qquad (216)$$

a_n é escolhido ter essa forma porque posteriormente ele simplicará os cálculos e também porque normaliza os polinômios de Legendre, ou seja, $P_n(x=1) = 1$ independe do grau do polinômio. Vamos, agora, utilizar a fórmula de recorrência 214 e escrevê-la para achar o termo anterior e não mais o posterior, ou seja,

$$a_m = -\frac{(m+1)(m+2)}{(n-m)(n+m+1)} a_{m+2} \qquad (217)$$

Para n-2, teremos:

$$a_{n-2} = -\frac{(n-2+1)(n-2+2)}{(n-n+2)(n+n-2+1)} a_{n-2+2} = -\frac{(n-1)(n)}{2(2n-1)} a_n \qquad (218)$$

Substituindo a_n, dado pela equação (216), na equação (218), chegamos à:

$$a_{n-2} = -\frac{(n-1)(n)}{2(2n-1)} \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} = -\frac{(n-1)(n)\, 2n\, (2n-1) \cdot (2n-2)!}{2\,(2n-1)\; 2^n \cdot (n\,(n-1)(n-2)!)^2} =$$

$$-\frac{\cancel{(n-1)}(\cancel{2n^2})\cancel{(2n-1)} \cdot (2n-2)!}{\cancel{2} \cdot 2^n\, \cancel{(2n-1)} \cdot \cancel{n^2} \cdot (n-1)^2 [(n-2)!]^2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n \cdot (n-1)[(n-2)!]^2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n \cdot \underbrace{(n-1)\,(n-2)!}_{(n-1)!}\,(n-2)!} = \frac{(-1)^{1}(2n-2)!}{2^n (n-1)!\,(n-2)!}$$

(219)

Para n-4, teremos:

$$a_{n-4} = -\frac{(n-4+1)(n-4+2)}{(n-n+4)(n+n-4+1)} a_{n-4+2} = -\frac{(n-3)(n-2)}{4(2n-3)} a_{n-2} \qquad (220)$$

Substituindo a equação (219) na equação (220), obtemos:

$$a_{n-4} = \frac{(-1)(n-3)(n-2)}{4(2n-3)} \frac{(-1)(2n-2)!}{2^n (n-1)!\,(n-2)!} = \frac{(-1)^2 (n-2)(n-3)(2n-2)!}{4\, 2^n (2n-3)(n-1)!\,(n-2)!} = \frac{(-1)^2 \cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\overbrace{\cancel{2}\cancel{(n-1)}\cancel{(2n-3)}!}^{(2n-4)!}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot 2^n \cancel{(2n-3)}\cancel{(n-1)}(n-2)! \cdot \underbrace{\cancel{(n-2)} \cdot \cancel{(n-3)}!}_{(n-4)!}}$$

$$= \frac{(-1)^2 \cdot (2n-4)!}{2 \cdot 2^n (n-2)!\,(n-4)!} \qquad (221)$$

Dos resultados obtidos nas equações (219) e (221) nós vemos um padrão se formando. De forma a facilitar a visualização desse padrão, eles foram pontilhados em preto e vermelho nas formas de acordo com o termo correspondente. Assim, podemos concluir que uma expressão que representa o processo recursivamente é dado por:

$$a_{n-2k} = \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!\, 2^n (n-k)!(n-2k)!} \quad (222)$$

Com a obtenção da equação (222), podemos fazer a seguinte definição:

Definição: Seja $l = \frac{n}{2}$, isto é, $n = 2l$ ou $n = 2l+1$ dependendo do caso em n é par ou ímpar. Definimos o polinômio de Legendre de grau $\underline{n}$ pela fórmula:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k (2n-2k)!\, x^{n-2k}}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} \quad (223)$$

Assim, para $\underline{n}$ inteiro não negativo, a solução geral da E.D.O. de Legendre

$$(1-x^2)\ddot{y}(x) - 2x\dot{y}(x) + n(n+1)y(x) = 0$$

é dada por

$$y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x) \quad (224)$$

sendo a função $P_n(x)$ o polinômio de Legendre de ordem $\underline{n}$ e $Q_n(x)$ uma função de Legendre de segunda espécie e ordem $\underline{n}$. Se a solução tiver de ser limitada em $[-1,1]$, então:

$$y(x) = C_1 P_n(x). \quad (225)$$

Se n não é inteiro, a única solução limitada da E.D.O. de Legendre é a identicamente nula.

Voltando à equação (224) e a fórmula recursiva (214), caso $m=n$, a solução (224) acima será a combinação linear do polinômio de Legendre $P_n(x)$ (série finita) com uma série infinita. Essa segunda série, se normalizada corretamente, é a função $Q_n(x)$ e denominada como escrevemos a uma função de Legendre de segunda espécie e ordem $\underline{n}$.

Em geral mostra-se que uma segunda solução da equação de Legendre $Q_n(x)$ é dada por:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} + \sum_{j=0}^{s} \frac{2n-4j-1}{(2j+1)(n-j)} \cdot P_{n-2j-1}(x) \quad (226)$$

sendo $s = \frac{n-1}{2}$.

Polinômios de Legendre de grau mais baixo

Os primeiros polinômios de Legendre são dados por:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6)$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(-35x + 315x^3 - 693x^5 + 429x^7)$$

Função Geratriz

A função geratriz dos polinômios de Legendre é particularmente importante pois ela tem aplicação na Teoria do Potencial. Além disso, muitas propriedades dos polinômios de Legendre podem ser extraídas da seguinte relação

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot t^n \qquad (227)$$

sendo $|x| \leq 1$ e $|t| < 1$.

Prova: Para provar a equação (227) nós precisaremos relembrar uma relação fundamental na matemática conhecida como binômio de Newton:

$$(1+z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} z^n \qquad (228)$$

sendo $\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$.

Podemos reescrever $\binom{p}{n}$ como:

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}, \quad \text{para } n = 1,2,3,\dots \qquad (229)$$

Portanto, da equação (229) segue que para $p=-\frac{1}{2}$, teremos:

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1.3.5\dots(2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!\, 2.4.6\dots(2n)} =$$

$$\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}[n!]^2} \qquad (230)$$

Vamos agora proceder com a seguinte mudança de variável: $z \equiv t^2 - 2xt$. Assim, usando o resultado da equação (230), podemos reescrever a equação (228) como:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}[n!]^2} t^n (t-2x)^n \qquad (231)$$

Vamos, novamente, utilizar o binômio de Newton com a seguinte relação:

$$(t-2x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (-2x)^{n-k} \qquad (232)$$

Sabendo que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, então a equação (232) pode ser reescrita como:

$$(t-2x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (-2x)^{n-k} \qquad (233)$$

Substituindo a equação (233) na equação (231), chegamos à:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2n)!}{2^{2n} n!\, k!\, (n-k)!} t^{n+k} \cdot (2x)^{n-k} \qquad (234)$$

Para identificar o polinômio de Legendre dado pela equação (223), teremos de isolar o coeficiente de t^n. Para tal propósito, vamos utilizar a seguinte identidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_{k,n} t^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\ell} c_{k,n-k} \cdot t^n \qquad (235)$$

sendo $\ell = \frac{n}{2}$. Assim, usando a equação (235) é fácil ver que:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \cdot t^n \qquad (236)$$

"$P_n(x)$ equação (223)

e temos a equação (236) como a equação (227):

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot t^n \qquad (237)$$

Mais adiante no curso nós veremos o quão poderosa é a relação dada pela equação (237).

Fórmula de Rodrigues

A fórmula de Rodrigues é uma outra forma de expressar os polinômios de Legendre. É uma fórmula bastante útil, principalmente em problemas que envolvem o cálculo da derivada do polinômio de Legendre $P_n(x)$ e é dada por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right) \qquad (238)$$

A demonstração dessa fórmula não é complicada bastando abrir $(x^2-1)^n$ em binômio de Newton:

$$(x^2-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n n!}{(n-i)!\, i!} x^{2i} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-k)!} \qquad (239)$$

Derivando a equação (239) n vezes e dividindo-a por $2^n n!$, chegase à expressão do polinômio de Legendre.