



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

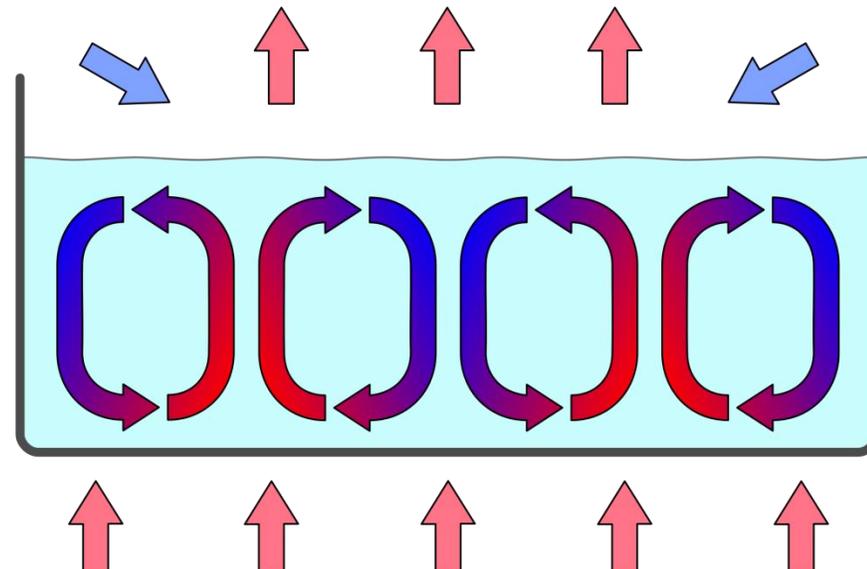
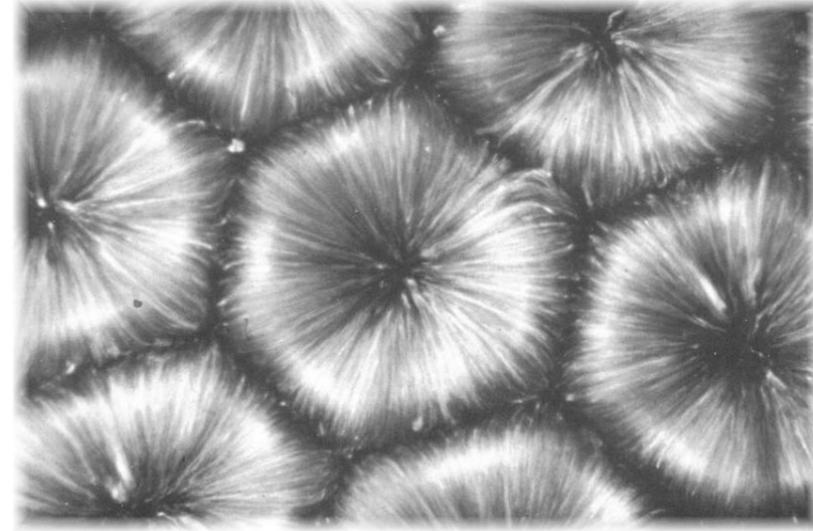
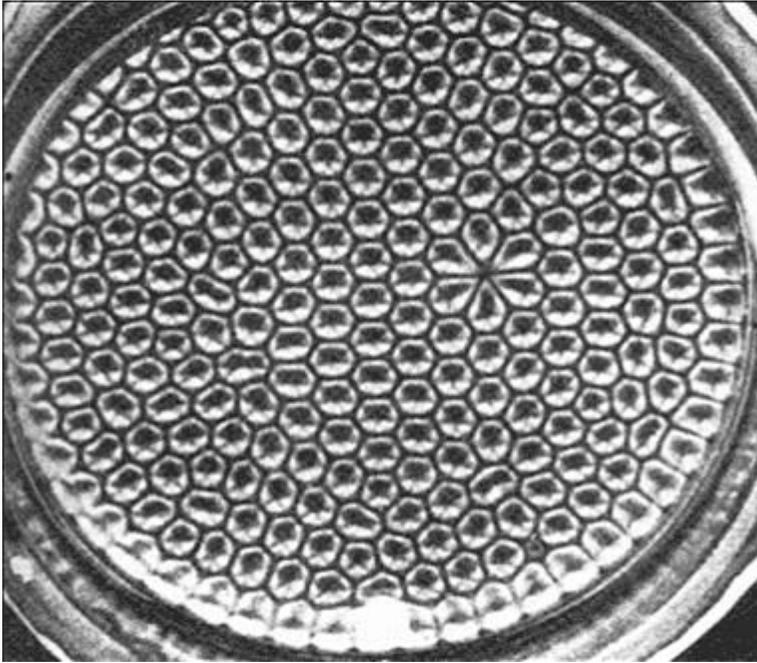
PQI 3301 – FENÔMENOS DE TRANSPORTE II

CONVECÇÃO NATURAL

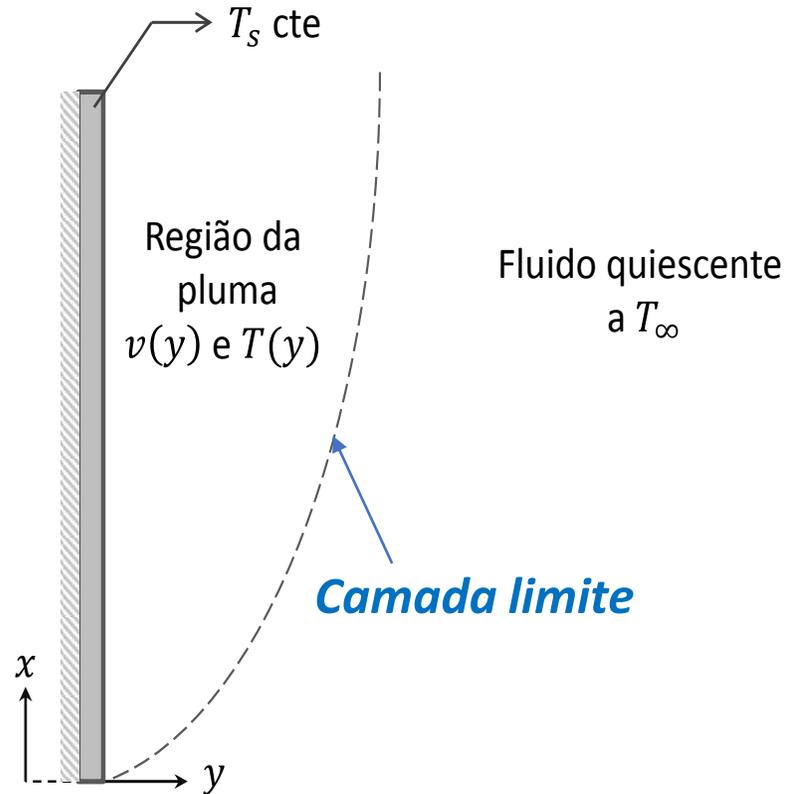
Convecção Natural



Células de Benard - Rayleigh–Bénard_convection



Convecção Natural



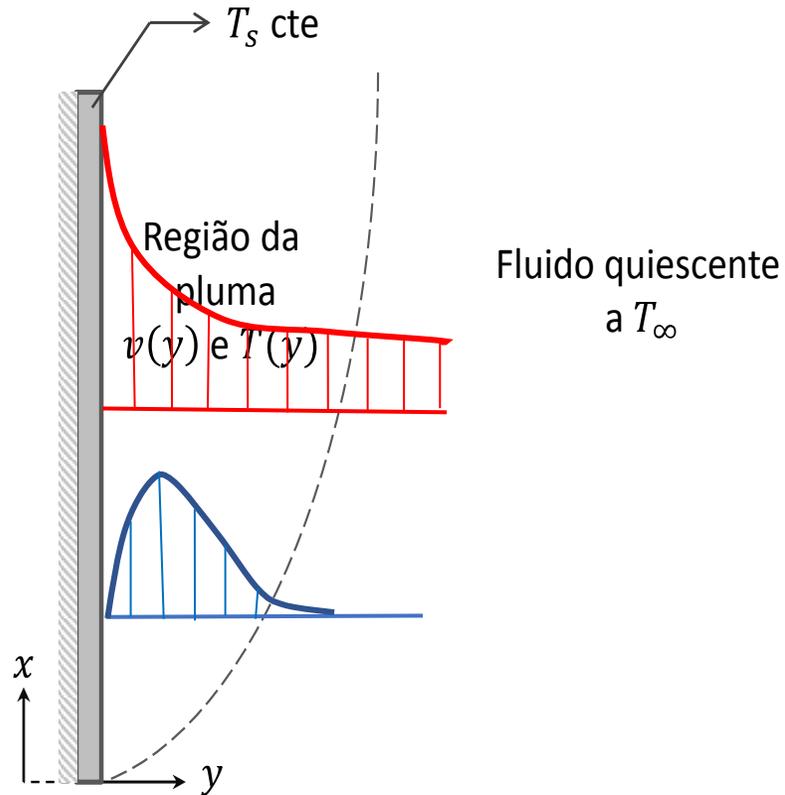
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \overline{\nabla v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overline{\nabla v} - \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{g} + \frac{\overline{\nabla P}}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overline{\nabla T} - \alpha \nabla^2 T - \frac{\dot{q}_V}{\rho c_P} = 0$$

Figura 1: Formação da pluma numa placa plana vertical.

Convecção Natural



Estado estacionário

Bidimensional

Varição na velocidade e da temperatura na direção y muito mais proeminente que na direção x

Sem dissipação Viscosa

Laminar

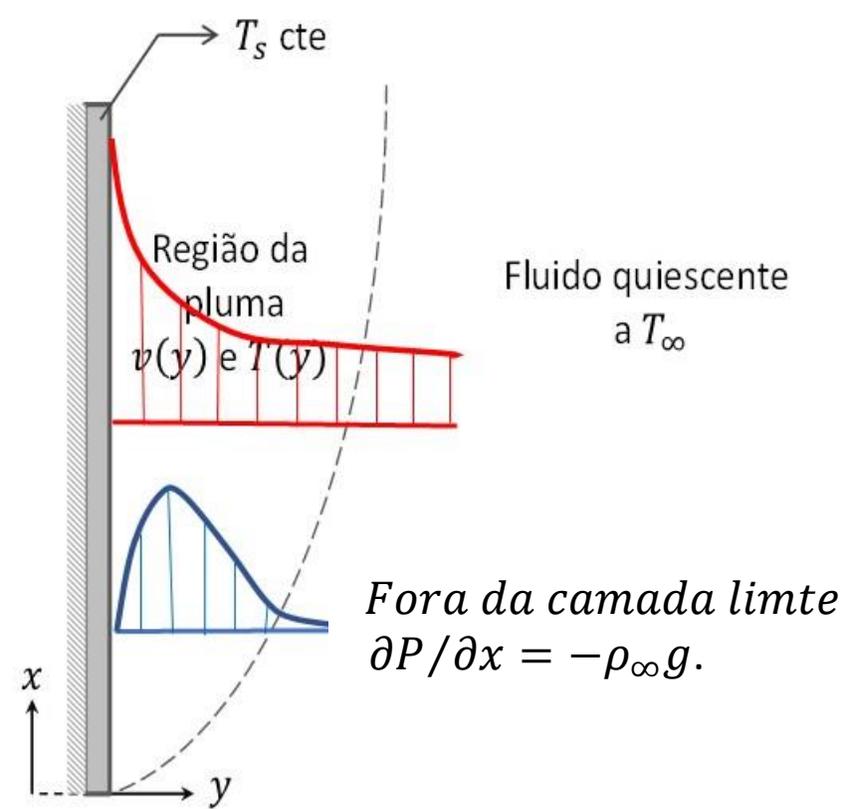
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \overline{\nabla v} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \overline{\nabla \rho} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Formação da pluma numa placa plana vertical.

Convecção Natural



NS – direção y – desconsiderada $\Rightarrow P(x,y) \approx P(x)$

$$\rho v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = \rho v \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g = \rho_\infty g - \rho g = (\rho_\infty - \rho)g$$

Coeficiente de expansão volumétrica térmica :

$$\beta = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T} \right)_P; \text{ gas ideal: } PV = nRT$$

$$\Rightarrow \tilde{\rho} = P/RT \Rightarrow \beta = \frac{RT}{P} \cdot \frac{P}{RT^2} = \frac{1}{T}$$

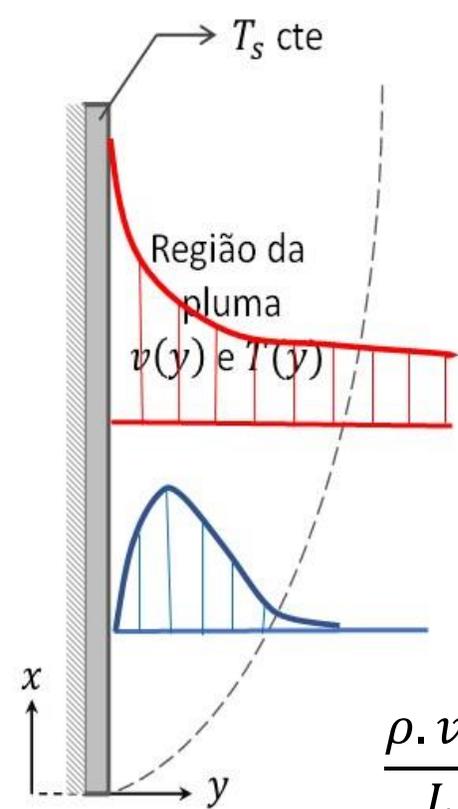
Aproximação de Boussinesq:

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta \rho}{\Delta T} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T} \right) \Rightarrow (\rho_\infty - \rho) \approx \rho \beta \cdot (T - T_\infty)$$

$$\rho v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = \rho v \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \rho g \beta \cdot (T - T_\infty)$$

$$v_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Convecção Natural



Velocidade adimensional	Posição adimensional	Diferença de temperaturas adimensional
$v_i^* = \frac{v_i}{v_0}$	$x^* = \frac{x}{L}$ $y^* = \frac{y}{L}$	$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}$
$v_0 =$ velocidade de referência	$L =$ Tamanho da placa	T_s e T_∞

$$\frac{\rho \cdot v_0^2}{L} \cdot \left(v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) = \frac{\mu \cdot v_0}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^{*2}} + g \cdot \rho \beta \cdot \theta^* (T_s - T_\infty) \quad \div \frac{\rho \cdot v_0^2}{L}$$

$$\therefore \left(v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) = \frac{\mu}{\rho v_0 L} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^{*2}} + \frac{g \beta \cdot L \cdot (T_s - T_\infty)}{v_0^2} \cdot \theta^*$$

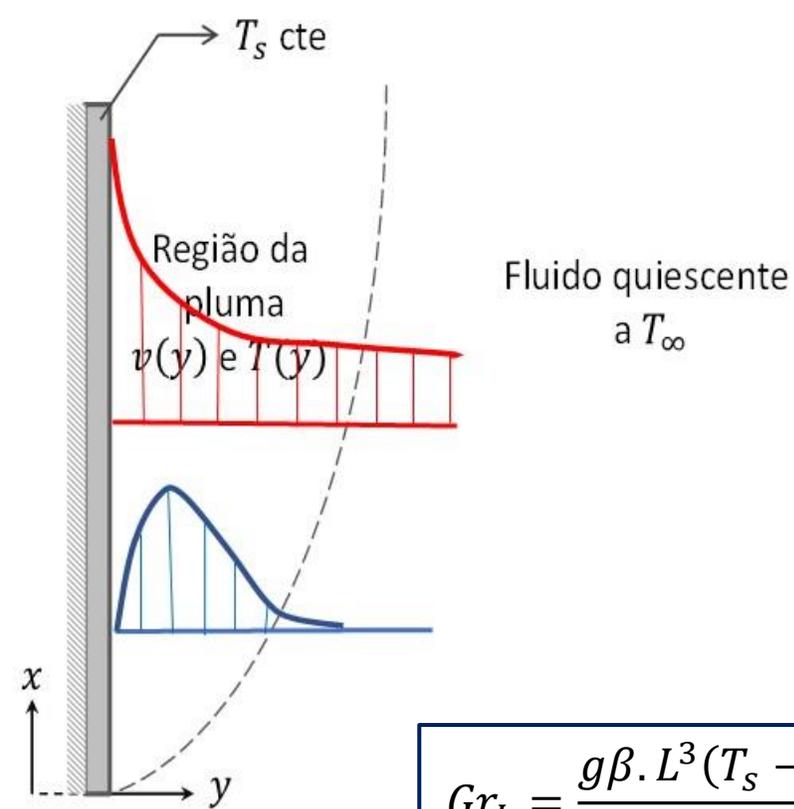
$$\frac{g \cdot \beta \rho^2 L^3 \cdot (T_s - T_\infty) / \mu^2}{\rho^2 v_0^2 L^2 / \mu^2} = \frac{Gr}{Re_L^2}$$

$$\frac{(T_s - T_\infty) \cdot v_0}{L} \cdot \left(v_x^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} + v_y^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \alpha \cdot \frac{(T_s - T_\infty)}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \quad \div \frac{(T_s - T_\infty) \cdot v_0}{L}$$

$$Gr_L = \frac{g \beta \cdot L^3 (T_s - T_\infty)}{v^2}$$

$$\therefore \left(v_x^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} + v_y^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{\alpha \cdot v_0}{L} \cdot \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}}$$

Convecção Natural



$$Gr_L = \frac{g\beta \cdot L^3(T_s - T_\infty)}{\nu^2}$$

$$\therefore \left(v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{Gr}{Re^2} \cdot \theta^*$$

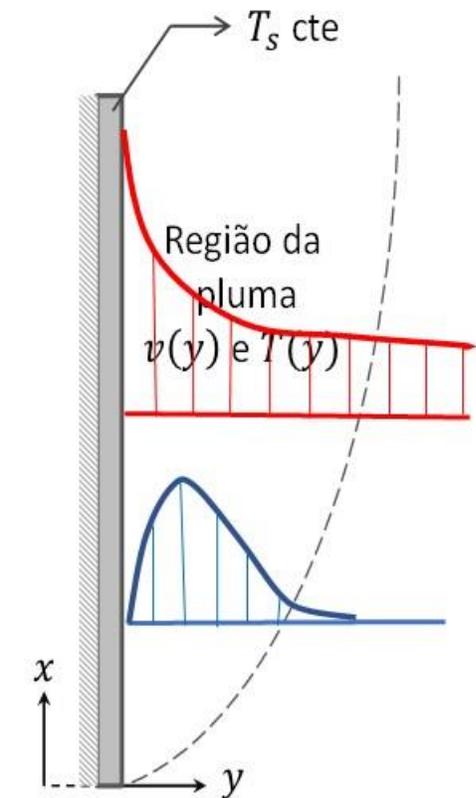
$$\therefore \left(v_x^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} + v_y^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{PrRe} \cdot \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}}$$

- Se $Gr \gg Re_L^2$, a convecção natural é predominante;
- Se $Gr \ll Re_L^2$, a convecção forçada é predominante;
- Se $Gr \approx Re_L^2$, ambas as convecções são importantes;

Condições de contorno para placa plana vertical:

- Em $y = 0$, $T = T_s$, $v_x = 0$ e $v_y = 0$ (na superfície da placa);
- Em $y = \infty$, $T = T_\infty$, $v_x = 0$ e $v_y = 0$ (longe da placa, fluido quiescente);
- Em $x = -\infty$, $T = T_\infty$, $v_x = 0$ e $v_y = 0$ (longe da placa, fluido quiescente);

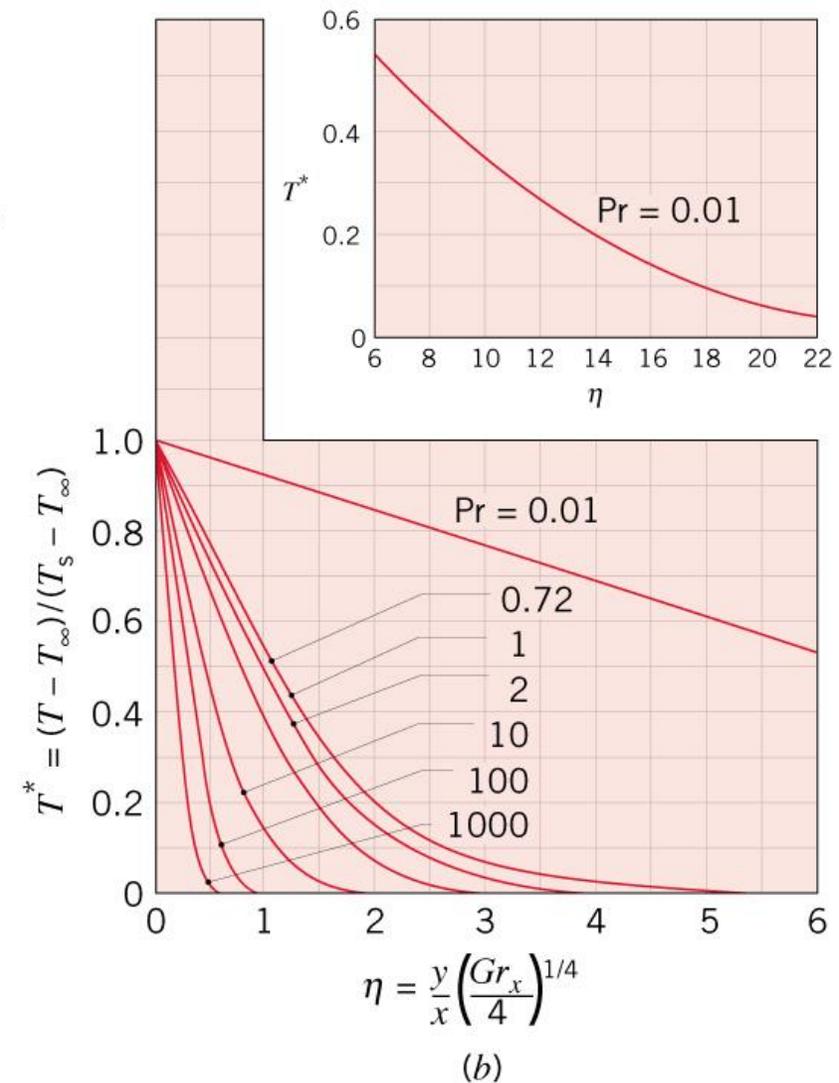
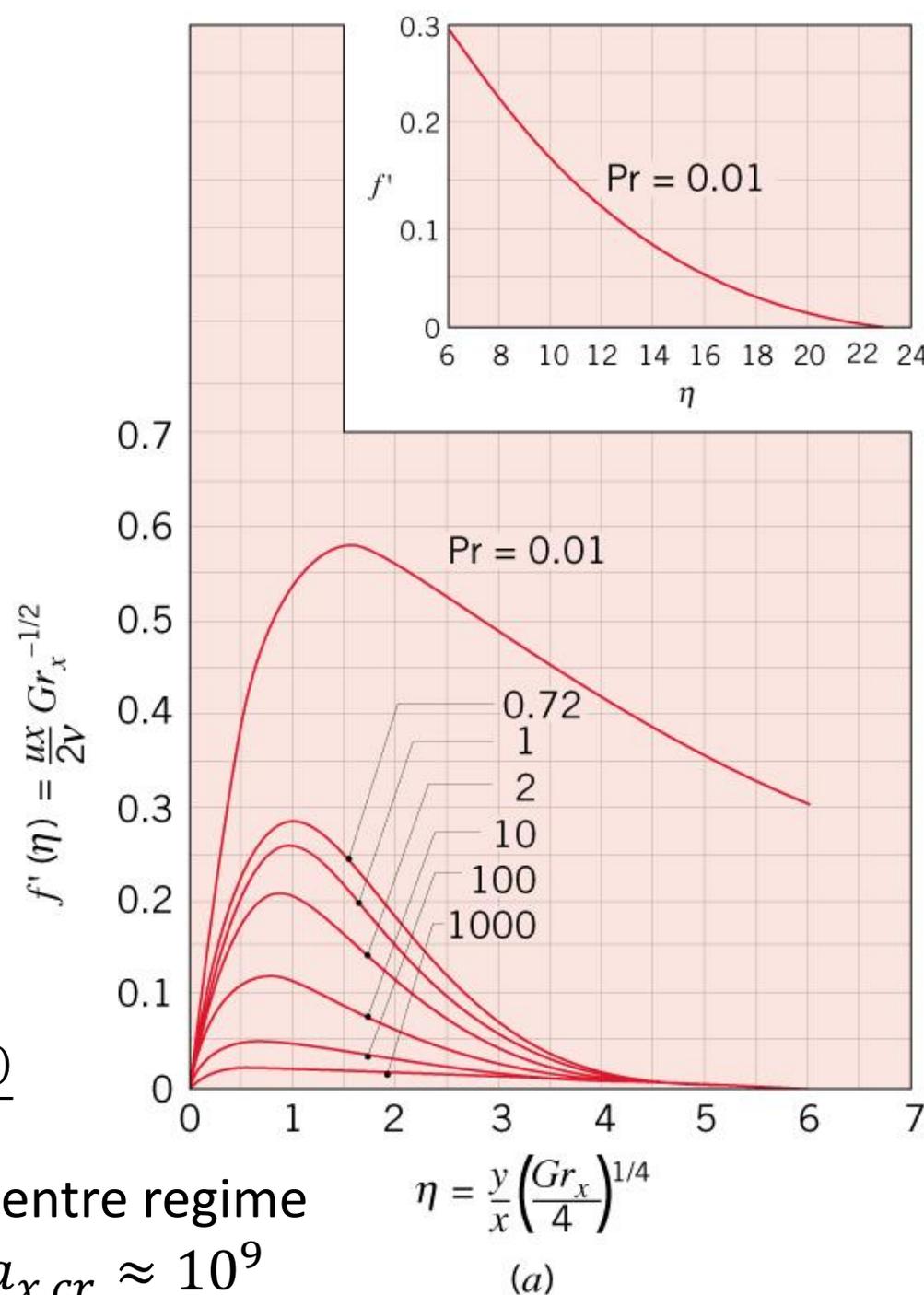
Convecção Natural



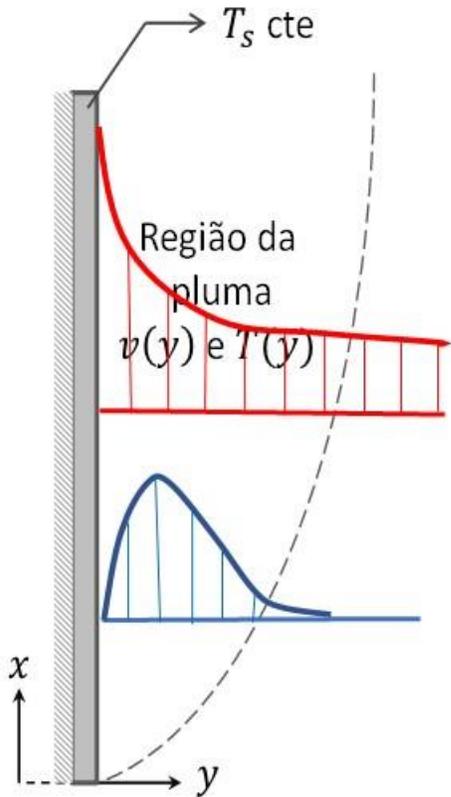
$$Gr_x = \frac{g\beta \cdot x^3 (T_s - T_\infty)}{\nu^2}$$

$$Ra_x = Gr_x \cdot Pr = \frac{g\beta \cdot x^3 (T_s - T_\infty)}{\nu\alpha}$$

Rayleigh crítico (transição entre regime laminar e turbulento) é $Ra_{x,cr} \approx 10^9$



Convecção Natural



$$Nu_x = \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{0,75.Pr^{1/2}}{(0,609+1,221.Pr^{1/2}+1,238.Pr)^{1/4}}\right) = \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} \cdot f(Pr)$$

$$Nu_L = 0,943.Gr_L^{1/4} \cdot f(Pr)$$

$$Gr_x = \frac{g\beta \cdot x^3 (T_s - T_\infty)}{\nu^2}$$

$$Ra_x = Gr_x \cdot Pr = \frac{g\beta \cdot x^3 (T_s - T_\infty)}{\nu\alpha}$$

Rayleigh crítico (transição entre regime laminar e turbulento) é $Ra_{x,cr} \approx 10^9$

Convecção Natural -Correlações

$$Nu_L = C \cdot Ra_L^n$$

- Placa plana vertical

- **Correlação mais usual:** $C = 0,59$ e $n = 1/4$ para escoamento laminar ($10^4 \leq Ra_L \leq 10^9$) e $C = 0,1$ e $n = 1/3$ para escoamento turbulento ($10^9 \leq Ra_L \leq 10^{13}$), propriedades à T_f . Note que, no escoamento turbulento, como $n = 1/3$, h independe de L .

- **Correlação de Churchill e Chu modificada:** correlação para escoamento laminar ($10^4 \leq Ra_L \leq 10^9$). As propriedades são estimadas na temperatura do filme T_f .

$$Nu_L = 0,68 + \frac{0,670 \cdot Ra_L^{1/4}}{(1 + (0,492/Pr)^{9/16})^{4/9}}$$

Convecção Natural -Correlações

- **Cilindro horizontal longo**

- *Correlação de Morgan*: recomendada para cilindros horizontais, utiliza a forma comum das correlações para convecção natural, com coeficientes C e n variando de acordo com a faixa do número de Rayleigh.

- *Correlação de Churchill e Chu*: Válida para $Ra_D \leq 10^{12}$. A mesma correlação pode ser utilizada para um cilindro na vertical, desde que $D/L \geq 35/Gr_L^{1/4}$, onde L é o comprimento do cilindro. As propriedades são estimadas na temperatura do filme

Faixa de Ra_D	C	n
$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
$10^{-2} - 10^2$	1,02	0,148
$10^2 - 10^4$	0,85	0,188
$10^4 - 10^7$	0,480	0,25
$10^7 - 10^{12}$	0,125	0,333

$$Nu_D = \left[0,6 + \frac{0,387 \cdot Ra_D^{1/6}}{(1 + (0,559/Pr)^{9/16})^{8/27}} \right]^2$$

Convecção Natural -Correlações

- **Correlações simples em função do delta T-** $h_L = b \cdot \Delta T^m \cdot L^{3m-1}$

Para temperatura em torno da ambiente (cerca de 20 °C). Onde L é o comprimento característico e b engloba dados do fluido, como sua viscosidade e coeficiente de expansão. Usar esta correlação dimensional é prático, porém requer que um conjunto de unidades consistente seja utilizado. A tabela apresenta coeficientes b e m que devem ser utilizados com unidades SI para os casos apresentados.

Geometria	Faixa de Ra	m	Ar	Água	Fluido Orgânico
			b		
Placa plana vertical	$10^4 \leq Ra_L \leq 10^9$	1/4	1,37	127	59
	$Ra_D \geq 10^9$	1/3	1,24		
Cilindro Horizontal	$10^4 \leq Ra_D \leq 10^9$	1/4	1,32		
	$Ra_D \geq 10^9$	1/3	1,24		
Placa plana horizontal	$10^5 \leq Ra_L \leq 2 \cdot 10^7$ (face p/ cima)	1/4	1,86		
	$3 \cdot 10^5 \leq Ra_L \leq 3 \cdot 10^{10}$ (face p/ baixo)	1/4	0,88		

Convecção natural, forçada e mista

Tubo vertical

Figura 6: Regimes de convecção natural, forçada e mista em tubo vertical- $10^{-2} < Pr(D/L) < 1$ – Metais, B. & Eckert, E.R.G. – J.Heat Transfer, 86, 295, 1964.

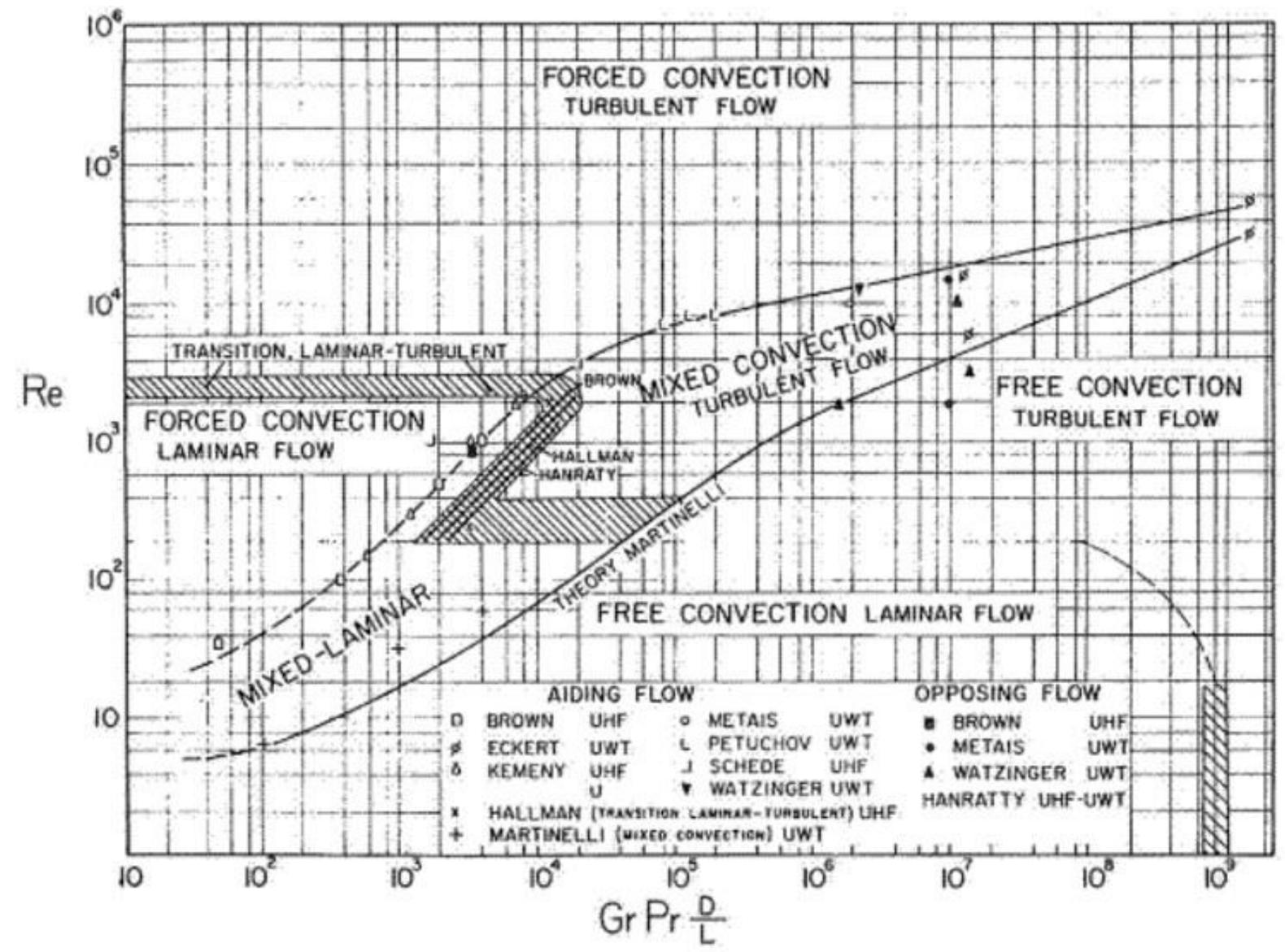


Fig. 1 Regimes of free, forced, and mixed convection for flow through vertical tubes

$$\left(10^{-2} < Pr \frac{d}{L} < 1\right)$$

Convecção natural, forçada e mista

Tubo horizontal

Figura 7: Regimes de convecção natural, forçada e mista em tubo horizontal – Metais, B. & Eckert, E.R.G. – J.Heat Transfer, 86, 295, 1964.

