Equação de Laplace em Coordenadas Esféricas - II

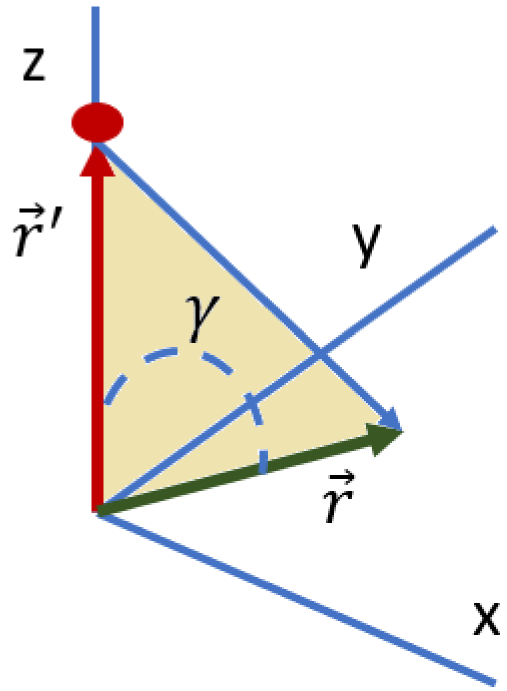
[J. D. Jackson; Classical Electrodynamics; Cap. 3]

[Carmen L.R. Braga; Notas de Física Matemática; Cap. 4

Resultado da aula passada: em problemas com simetria axial, ${}^{\partial}/_{\partial\varphi} = 0$, solução geral da Equação de Laplace é

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right] P_n(\cos\theta)$$

Vamos utilizar este resultado para desenvolver $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ em uma série em polinômios de Legendre, sabendo que $\phi(\vec{r},\vec{r}\,') = q/4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ é o potencial de uma carga q localizada em $\vec{r}\,'$, portanto solução da Equação de Laplace. Considerando a carga localizada no eixo z, a configuração tem simetria axial.



Se a posição $\vec{r}$ estiver também ao longo do eixo z, temos

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{|z-z'|} = \begin{cases} \dfrac{1}{z-z'}; z > z' \\ \dfrac{1}{z'-z}; z < z' \end{cases}$$

Para o primeiro caso, temos

$$\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-{z'}/{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{\ell=0}\left(\frac{z'}{z}\right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}\frac{{z'}^{\ell}}{z^{\ell+1}}$$

Para o segundo caso, basta fazer a troca $z \leftrightarrows z'$. Portanto, ambos podem ser escritos como $\frac{1}{|z-z'|} = \sum_{\ell=0}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}$, onde $r_>$ ($r_<$) é o maior (menor) entre z e z'. Para $\vec{r}$ fora do eixo z, basta multiplicar cada termo pelo polinômio de Legendre correspondente

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell=0}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}P_{\ell}(\cos\gamma)}$$

Polinômios Associados de Legendre e Harmônicos Esféricos

Em problemas onde não haja simetria axial, $m \neq 0$, em geral, e a dependência em θ será dada pela solução da Equação Associada de Legendre.

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0$$

Intermezzo

Para resolver esta equação, teremos que utilizar a fórmula de Liebnitz para a m derivada do produto de duas funções. Ela é facilmente obtida por indução.

$$m = 1: \;\; \frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g$$

$$m = 2: \;\; \frac{d^2}{dx^2}(fg) = f\frac{d^2g}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + \frac{d^2f}{dx^2}g$$

$$m = 3 \;\; \frac{d^3}{dx^3}(fg) = f\frac{d^3g}{dx^3} + 3\frac{df}{dx}\frac{d^2g}{dx^2} + 3\frac{d^2f}{dx^2}\frac{dg}{dx} + \frac{d^3f}{dx^3}g$$

Prosseguindo, é fácil verificar que o resultado geral é

$$\frac{d^m}{dx^m}(fg) = f\frac{d^m g}{dx^m} + m\frac{df}{dx}\frac{d^{m-1}g}{dx^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^{m-2}g}{dx^{m-2}} + \cdots + m\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\frac{dg}{dx} + \frac{d^m f}{dx^m}g$$

ou

$$\frac{d^m}{dx^m}(fg) = \sum_{n=0} \frac{m!}{n!\,(m-n)!}\frac{d^n f}{dx^n}\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}$$

Vamos utilizar este resultado para mostrar que a solução da Equação Associada de Legendre é obtida derivando m vezes a Equação de Legendre,

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_\ell}{dx^2} - 2x\frac{dP_\ell}{dx} + \ell(\ell+1)P_\ell = 0$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)\frac{d^2 P_\ell}{dx^2}\right] = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\frac{d^m P_\ell}{dx^m} - 2mx\frac{d}{dx}\frac{d^m P_\ell}{dx^m} - m(m-1)\frac{d^m P_\ell}{dx^m}$$

e

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[2x\frac{dP_\ell}{dx}\right] = 2x\frac{d}{dx}\frac{d^m P_\ell}{dx^m} + 2m\frac{d^m P_\ell}{dx^m}$$

Para simplificar a notação, vamos definir $u(x) = d^m P_\ell / dx^m$. Substituindo os dois últimos resultados na Equação de Legendre, temos

$$(1 - x^2)\frac{d^2 u}{dx^2} - 2(m + 1)x\frac{du}{dx} + [\ell(\ell + 1) - m(m + 1)]u = 0$$

Esta ainda não é a Equação Associada de Legendre para $u(x)$. Para convertê-la, vamos introduzir uma nova função $v(x) \ \rightarrow u(x) = (1 - x^2)^{-m/2} v(x)$. Então

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{dv}{dx} + \frac{mx}{1 - x^2}v\right](1 - x^2)^{-m/2}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{2mx}{1 - x^2}\frac{dv}{dx} + \frac{m}{1 - x^2 v} + \frac{m(m + 2)x^2}{(1 - x^2)^2}v\right](1 - x^2)^{-m/2}$$

Substituindo esses resultados na equação para $u(x)$, obtemos

$$(1 - x^2)\frac{d^2 v}{dx^2} - 2x\frac{dv}{dx} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right]v = 0$$

Esta é a equação Associada de Legendre. Portanto, $v(x)$ é a solução da Equação Associada de Legendre, definindo os chamados *Polinômios Associados de Legendre*,

$$v(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u(x) \implies P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\ell}{dx^m}$$

ou, usando a fórmula de Rodrigues $\Longrightarrow$ $P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell$

Notas

1. A definição do Polinômio Associado de Legendre com a fase $(-1)^m$ é arbitrária. Esta é a convenção adotada em Física Atômica
2. Como a maior potência de x em $P_\ell(x)$ é x^ℓ, o maior valor de $m = \ell$.
3. Como na Equação de Legendre só aparece m^2, valores negativos de m também são soluções. $P_\ell^{-m}(x)$ é também dado pela fórmula de Rodrigues e pode ser mostrado que

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x)$$

$$-\ell \le m \le \ell$$

Ortogonalidade

Os polinômios associados de Legendre obedecem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}^{m}(x) P_{\ell}^{m}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell'\ell}$$

Não vamos derivar essa relação; aqueles interessados em verificar como é obtida podem ver na seção 4.3 do livro da Professora Carmen Braga ou na seção 12.5 do livro do Arfken, sexta edição.

Harmônicos Esfericos

Retornando à solução geral da Equação de Laplace em coordenadas esféricas, vimos o potencial é dado por

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell,m} \left[A_{\ell,m} r^{\ell} + \frac{B_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \right] P_{\ell}^{m}(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

É conveniente combinar o produto $P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$ em uma única função normalizada. Considerando a normalização dos polinômios associados de Legendre e que

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi} e^{im_2\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{m_1 m_2}$$

os *Harmônicos Esféricos* são definidos por

$$\boxed{Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}}$$

e satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta Y^*_{\ell' m'}(\theta,\varphi) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}}$$

<u>Nota</u>

Os livros da Carmen Braga e do Arfken não incluem a fase $(-1)^m$ na definição do polinômio associado de Legendre, mas a incluem na definição de $Y_{\ell m}$.