O conjunto dos números reais, intervalos e módulo de um número real.

Evandro R. da Silva

ICMC – USP

O conjunto dos números reais

Vamos mostrar o seguinte:

Existe um número x tal que $x \notin \mathbb{Q}$.

Teorema

A equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$, ou seja, não existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Para mostrarmos este teorema precisamos do seguinte lema:

Lema

Seja $a \in \mathbb{Z}$ fixado.
(i) Se a for impar então a^2 é impar.
(ii) Se a^2 for par então a é par.

Demonstração: (i) Se a é impar, então $a = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim
$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2n + 1$, onde $n = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, ou seja, a^2 é impar.

(ii) Suponhamos por contradição que a^2 é par e que a seja impar. Se a é impar por (i) vem que a^2 é impar, o que contraria a hipótese de que a^2 ser par. Portanto se a^2 é par então a é par.

$\square$

Demonstração do Teorema:

Suponhamos por contradição que existe $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$ com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $m.d.c.(a, b) = 1$.
Assim temos que $a^2 = 2b^2$, isto é, a^2 é par. Pelo Lema anterior vem que a tambem é par, isto é, $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.
Deste modo, temos
$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ e $a^2 = 2b^2$, o que implica $2b^2 = 4k^2$ que implica $b^2 = 2k^2$, isto é, b^2 é par. Pelo lema anterior vem que b tambem é par.
Logo, temos que a e b são pares, ou seja, 2 divide a e divide b, o que contraria a hipótese que $m.d.c.(a, b) = 1$.
Portanto, a equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$.

$\square$

Existem pontos sobre a reta Ox que não possuem abcissa racional. Deste modo, existem números que não são racionais.
Se o número não é racional, dizemos que este número é irracional.
O conjunto formado pelos números racionais e os números irracionais é chamado o conjunto dos números reais e será denotado por $\mathbb{R}$.
O conjunto dos números irracionais será denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}).$$

Em $\mathbb{R}$ estão definidas as operações

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{adição}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$.: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{multiplicação}$$

$$(x, y) \mapsto x.y$$

Temos que $(\mathbb{R}, +, .)$ é um corpo, isto é, satisfaz as mesmas propriedades em relação a adição e multiplicação que $(\mathbb{Q}, +, .)$ satisfaz.

Também, de maneira análoga ao caso dos conjuntos dos racionais, sobre $\mathbb{R}$ está definida uma relação de ordem $(\leq)$ e $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ é um corpo ordenado, chamado o corpo ordenado dos números reais.

Intervalos

Suponha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Um intervalo é um subconjunto de $\mathbb{R}$ de um dos seguintes tipos:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x \leq b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x < b\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x > a\}$

onde $+\infty$ significa que a direita de a existem infinitos números reais maiores que a e
onde $-\infty$ significa que a esquerda de b existem infinitos números reais menores que b.

- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Exemplo

1) $(-3, 2) = \{x \in \mathbb{R}; \quad -3 < x < 2\}$
2) $[10, 27] = \{x \in \mathbb{R}; \quad 10 \leq x \leq 27\}$
3) $[-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq -1\}$
4) $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R}; \quad x < 2\}$
5) $(1, 7] = \{x \in \mathbb{R}; \quad 1 < x \leq 7\}$

Exemplo

Expresse o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \quad 5x - 4 < 8x + 1\}$ *em notação de intervalo.*

solução:

$5x - 4 < 8x + 1$ *implica que* $5x < 8x + 5$ *implica que* $-3x < 5$ *implica que* $3x > -5$ *implica que* $x > -5/3$.

Portanto $A = \{x \in \mathbb{R}; \quad 5x - 4 < 8x + 1\} = (-5/3, +\infty)$

Módulo de um número real

Definição

Dado $b \in \mathbb{R}$, o módulo de b, denotado por $|b|$ é definido por

$$|b| = \begin{cases} b, & se\ b \geq 0 \\ -b, & se\ b < 0 \end{cases}$$

Exemplo

1) $|2| = 2$
2) $|-3| = -(-3) = 3$

Geometricamente, $|b|$ representa a distância do número real b até a origem 0, sobre o eixo Ox.

Temos as seguintes consequências da definição:

• 1) O módulo de um número real b é sempre maior ou igual a zero, isto é, $|b| \geq 0$ para qualquer $b \in \mathbb{R}$.
De fato:
se $b \geq 0$, $|b| = b \geq 0$.
se $b < 0$, $|b| = -b \geq 0$.

• 2) O módulo de um número real b é sempre maior ou igual a b, isto é, $|b| \geq b$ para qualquer $b \in \mathbb{R}$.
De fato:
se $b \geq 0$, $|b| = b \geq b$.
se $b < 0$, $|b| = -b \geq b$.

- 3) $|b| = 0$ se e somente se $b = 0$. (imediato da definição)

- 4) $|b|^2 = b^2$.

De fato:
se $b \geq 0$, $|b| = b$ que implica $|b|^2 = b^2$.
se $b < 0$, $|b| = -b$ que implica $|b|^2 = (-b)^2 = (-1)^2 b^2 = b^2$.