Propriedades do módulo de um número real.

Evandro R. da Silva

ICMC – USP

Exemplo

Resolva a inequação $|x-1|-|x-2|>x$ *em* $\mathbb{R}$.

Solução: Temos que

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{se } \ x-1\geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } \ x-1<0 \end{cases}$$

,ou seja,

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{se } \ x\geq 1 \\ 1-x, & \text{se } \ x<1 \end{cases}$$

Analogamente,

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se} \quad x \geq 2 \\ 2-x, & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

Vamos agora dividir em casos:

Primeiro caso: $x \geq 2$.
Neste caso temos
$|x-1| - |x-2| = x - 1 - (x-2) > x$ que implica
$x - 1 - x + 2 > x$ que implica $1 > x$.
Portanto o conjunto solução é $S_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2 \text{ e } x < 1\} = \emptyset$

Segundo caso: $1 \leq x < 2$.
Neste caso temos
$|x-1| - |x-2| = x - 1 - (2-x) > x$ que implica
$x - 1 - 2 + x > x$ que implica $2x - 3 > x$ que implica $x > 3$.
Portanto o conjunto solução é $S_2 = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x < 2 \text{ e } x > 3\} = \emptyset$

Terceiro caso: $x < 1$.
Neste caso temos
$|x-1| - |x-2| = 1 - x - (2-x) > x$ que implica
$1 - x - 2 + x > x$ que implica $-1 > x$.
Portanto o conjunto solução é
$S_3 = \{x \in \mathbb{R}; x < 1 \text{ e } x < -1\} = (-\infty, -1)$

Portanto o conjunto solução geral para a inequação é
$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S_3 = (-\infty, -1)$.

Definição

Se a e b são números reais quaisquer a distância entre a e b denotado por $d(a, b)$ é por definição $d(a, b) = |a - b|$.

Obs: $d(a, b) = d(b, a)$. De fato
$d(a, b) = |a - b| = |-(b - a)| = |-1|\,|b - a| = |b - a| = d(b, a)$

Exemplo

1) Se $a = -1$ e $b = 5$ então $d(a, b) = |-1 - 5| = |-6| = 6$.
2) Se $a = -5$ e $b = -2$ então
$d(a, b) = |-5 - (-2)| = |-5 + 2| = |-3| = 3$.