



*Escola Superior de Agricultura
"Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo*

LCE0220 – Cálculo II

Integrais de funções contendo trinômios

Prof^ª. Cristiane Mariana Rodrigues da Silva

LCE – Depto. Ciências Exatas

cmrsilva@usp.br

LCE0220 – Cálculo II – Prof^a. Cristiane

Integração de funções contendo trinômios

Caso 1:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Completar o trinômio → quadrado perfeito

LCE0220 – Cálculo II – Profª. Cristiane

Integração de funções contendo trinômios

Exemplo a)

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-3)^2 + 1} dx$$

$$u = x - 3$$
$$du = dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \arctan(u) + C$$
$$= \underline{\underline{\arctan(x-3) + C}}$$

LCE0220 – Cálculo II – Profª. Cristiane

Integração de funções contendo trinômios

Exemplo b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}} dx$

$$\rightarrow (x+4)^2 - 1$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$u = x + 4$$
$$du = dx$$

$$= \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$$
$$= \ln |x + 4 + \sqrt{(x+4)^2 - 1}| + C$$

LCE0220 – Cálculo II – Profª. Cristiane

Integração de funções contendo trinômios

Caso 2:

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx \quad \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Completar o trinômio → quadrado perfeito

LCE0220 – Cálculo II – Profª. Cristiane

Integração de funções contendo trinômios

Exemplo c)

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-2x-5}} dx$$

$\rightarrow (x-1)^2-6$

$$= \int \frac{x-3}{\sqrt{(x-1)^2-6}} dx = \int \frac{u-2}{\sqrt{u^2-6}} du$$

$$u = x-1$$

$$du = dx$$

$$\begin{aligned} x-3+2 &= u \\ x-3 &= u-2 \end{aligned}$$

$$= \int \left[\frac{u}{\sqrt{u^2-6}} - \frac{2}{\sqrt{u^2-6}} \right] du$$

LCE0220 – Cálculo II – Profª. Cristiane

Integração de funções contendo trinômios

Exemplo c)

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{u^2-6}} du &= \int \frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + C \\ &= \sqrt{z} + C \\ &= \sqrt{u^2-6} + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= u^2 - 6 \\ dz &= 2u du \\ \frac{dz}{2} &= u \end{aligned}$$

LCE0220 – Cálculo II – Profª. Cristiane

Integração de funções contendo trinômios

Exemplo c)

$$\int \frac{-2}{\sqrt{u^2 - 6}} du =$$

$$= -2 \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 6}} du$$

$$= -2 \ln |u + \sqrt{u^2 - 6}| + C_2$$

$$u = x - 1$$

$$= \sqrt{u^2 - 6} + C_1 - 2 \ln |u + \sqrt{u^2 - 6}| + C_2$$
$$= \sqrt{(x-1)^2 - 6} - 2 \ln |x-1 + \sqrt{(x-1)^2 - 6}| + C$$

LCE0220 – Cálculo II – Prof^a. Cristiane

Bibliografia

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. Cálculo A: funções, limites, derivação, integração. 6^a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. 464p.

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2^a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. 448p.

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. Cálculo: funções de uma e várias variáveis. 2^a ed. São Paulo: Saraiva, 2012, 416p.

LEITHOLD, L. O cálculo com Geometria Analítica. 3^a ed. São Paulo: Harbra, 1994. V.1.