



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA "LUIZ DE QUEIROZ"
Departamento de Matemática e Estatística

CÁLCULO II

Cássio Roberto de Melo Godoi
Samuel Tanaami

CENTRO ACADÊMICO "LUIZ DE QUEIROZ"
DEPARTAMENTO EDITORIAL
PIRACICABA

1 9 8 7



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA "LUIZ DE QUEIROZ"
Departamento de Matemática e Estatística

CÁLCULO II

Cássio Roberto de Melo Godoi
Samuel Tanaami

CENTRO ACADÊMICO "LUIZ DE QUEIROZ"
DEPARTAMENTO EDITORIAL
PIRACICABA

1 9 8 7



INSTITUTO DE SÃO PAULO
ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA, ZOOLOGIA E VETERINÁRIA
RUA DO MATÃO, 100 - JARDIM MATÃO - SÃO PAULO - SP

CÁLCULO II

PROFESSOR: DR. JOSÉ DE OLIVEIRA

ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA, ZOOLOGIA E VETERINÁRIA
DEPARTAMENTO EDITORIAL
SÃO PAULO - SP

PREFÁCIO

As presentes notas destinam-se a alunos do segundo semestre dos cursos de Engenharia Agronômica e Engenharia Florestal.

O nosso objetivo é oferecer um roteiro didático e acessível que englobe o programa de Cálculo II de maneira satisfatória. O texto deve ser, porém, complementado com algum livro constante na bibliografia.

Visando nosso objetivo, omitimos várias demonstrações por considerarmos extensas ou excessivamente técnicas. Em muitas partes apresentamos a teoria sob um ponto de vista intuitivo em lugar de um desenvolvimento lógico rigoroso.

Os autores.



ÍNDICE

	Página
^ CAPÍTULO 1 - INTEGRAL INDEFINIDA	1
1.1. Definições	1
1.2. Tabela Básica	2
1.3. Propriedades	4
CAPÍTULO 2 - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO	8
* 2.1. Integração por Substituição	8
2.2. Integração por Partes	11
2.3. Integrais de Funções Contendo um Tri- nômio Quadrado	13
2.4. Integração de Funções Racionais	18
2.5. Integração de Certas Classes de Fun- ções Trigonômétricas	25
2.6. Integração de Funções Irracionais ...	27
2.7. Integração do Tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ por Meio de Substituições Trigonômê- tricas	29
¥ CAPÍTULO 3 - A INTEGRAL DEFINIDA	33
3.1. Definições	33
3.2. Propriedades Básicas da Integral Defi- nida	38
3.3. O Teorema Fundamental do Cálculo	43
CAPÍTULO 4 - INTEGRAIS IMPRÓPRIAS	51
4.1. Integrais com Limites de Integração Infinitos	51
4.2. Integrais com Integrandos Infinitos .	55

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

1000000

	Página
CAPÍTULO 5 - FUNÇÕES GAMA E BETA	60
5.1. Função Gama	60
5.2. Função Beta	62
CAPÍTULO 6 - APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA	66
✱ 6.1. Áreas em Coordenadas Cartesianas	66
6.2. Comprimento de Arco em Coordenadas Cartesianas	70
6.3. Volumes de Sólidos de Revolução em Coordenadas Cartesianas	73
6.4. Coordenadas Polares	78
6.5. Gráficos Polares	81
6.6. Áreas em Coordenadas Polares	86
6.7. Comprimento de Arco em Coordenadas Polares	89
CAPÍTULO 7 - FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS	91
7.1. Definições	91
7.2. Derivadas Parciais	92
7.3. Incremento e Diferencial Total	99
7.4. Integrais Duplas	102
APÊNDICE A - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	112
A.1. Definições	112
A.2. Equações Diferenciais de Ordem Um ...	114
A.3. Equações com Variáveis Separadas e Separáveis	115
A.4. Equações Lineares de Ordem Um	118
APÊNDICE B - INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES A DADOS EXPERIMENTAIS: MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS	121
BIBLIOGRAFIA	130

1982

... ..
... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

... ..
... ..

CAPÍTULO 1 - A INTEGRAL INDEFINIDA

1.1. DEFINIÇÕES

No cálculo I, consideramos a seguinte situação: dada uma função $F(x)$, achar sua derivada, isto é, a função $f(x) = F'(x)$.

Consideremos, agora, o problema inverso: dada a função $f(x)$, achar uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

DEFINIÇÃO 1: A função $F(x)$ é chamada a antiderivada da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ se $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$.

EXEMPLO: Encontre a antiderivada da função $f(x) = x^3$.

Da definição acima, segue que a função $F(x) = \frac{x^4}{4}$ é uma antiderivada, uma vez que $F'(x) = x^3$.

OBSERVAÇÃO: É fácil ver que se, para uma dada função $f(x)$ existe uma antiderivada, então esta antiderivada não é única. No exemplo anterior, poderíamos tomar as seguintes funções como antiderivadas:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 2; \quad F(x) = \frac{x^4}{4} - 8, \quad \text{ou, de modo geral,}$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + C, \quad (\text{onde } C \text{ é uma constante arbitrária}), \text{ pois}$$

$$\left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = x^3.$$

Temos, na verdade, os seguintes teoremas:

TEOREMA 1: Se F é uma função tal que $F'(x) = 0$ para todos



os valores de x no intervalo $[a, b]$, então F é constante em I .

TEOREMA 2: Se F e G são duas funções tais que $F'(x) = G'(x)$ para todos os valores de x no intervalo $[a, b]$, então existe uma constante C tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo x em $[a, b]$.

TEOREMA 3: Se $F(x)$ é uma antiderivada qualquer de $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$, então a antiderivada mais geral de f em $[a, b]$ é dada por:

$$F(x) + C \quad (1)$$

onde C é uma constante arbitrária e toda antiderivada de $f(x)$ em $[a, b]$ pode ser obtida de (1) atribuindo valores específicos a C .

DEFINIÇÃO 2: Se a função $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, então a expressão $F(x) + C$ é a integral indefinida da função $f(x)$ e é denotado pelo símbolo:

$$\int f(x) dx.$$

Então, por definição,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{se} \quad F'(x) = f(x).$$

A função $f(x)$ é chamada integrando, $f(x) dx$ é o elemento de integração e $\int$ é o sinal da integral.

Portanto, uma integral indefinida é uma família de funções $y = F(x) + C$.

Da definição segue que:

$$a) (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

$$b) d(\int f(x) dx) = f(x) dx$$

$$c) \int d F(x) = \int f(x) dx = F(x) + C$$

1.2. TABELA BÁSICA

Antes de começarmos com as técnicas de inte-

gração, daremos uma tabela básica de integrais de funções simples. Ela decorre da definição acima e da tabela de derivadas do cálculo I.

$$a) \int dx = x + C$$

$$b) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$c) \int x^{-1} dx = L|x| + C$$

$$d) \int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C$$

$$e) \int e^x dx = e^x + C$$

$$f) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$g) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} L \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$h) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$i) \int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = L|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \quad (a \neq 0)$$

$$j) \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$l) \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$m) \int \operatorname{tg} x dx = -L|\cos x| + C$$

$$n) \int \operatorname{cotg} x dx = L|\operatorname{sen} x| + C$$

$$o) \int \sec x dx = L|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$$

$$p) \int \operatorname{cosec} x dx = L|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$$

1. The first part of the problem is to find the value of $f(0)$.

2. The second part is to find the value of $f'(0)$.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$(0 \neq x) \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 0}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

Answer: $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$.

$$q) \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$r) \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$s) \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$$

$$t) \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$u) \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C$$

$$v) \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C$$

EXERCÍCIOS 1.2.

1. Justifique a tabela de integrais básicas.

2. Sejam F e G antiderivadas de f e g , respectivamente. É ver
dade que:

a) FG é antiderivada de fg ?

b) F/G é antiderivada de f/g ?

Justifique.

3. Seja F uma antiderivada de f . Prove que:

a) Se F é uma função par, então f é ímpar.

b) Se F é uma função ímpar, então f é uma função par.

1.3. PROPRIEDADES

TEOREMA 1: $\int [f_1(x) + f_2(x)] \, dx = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx.$ (1)

DEM.: Derivemos ambos os lados da equação:

$$(\int [f_1(x) + f_2(x)] \, dx)' = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx)' = (\int f_1(x) \, dx)' + (\int f_2(x) \, dx)' =$$

$$f_1(x) + f_2(x).$$



As derivadas são iguais. Em outras palavras, a derivada de qualquer antiderivada do lado esquerdo é igual à derivada de qualquer função do lado direito da equação. Portanto, pelo teorema 2 da seção 1.1, capítulo I, qualquer função do lado esquerdo de (1) difere qualquer função do lado direito de (1) por uma constante. E é assim que devemos entender a equação (1).

TEOREMA 2: $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$, a constante. (2)

DEM.: Para provar (2), derivemos os dois lados de (2):

$$(\int a f(x) dx)' = a f(x)$$

$$(a \int f(x) dx)' = a (\int f(x) dx)' = a f(x)$$

As derivadas são iguais e portanto, como em (1), a diferença de quaisquer duas funções dos lados esquerdo e direito é uma constante.

TEOREMA 3: Se $\int f(x) dx = F(x) + C$, então

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (3)$$

DEM.: Derivando ambos os lados de (3), temos:

$$(\int f(ax + b) dx)' = f(ax + b)$$

$$\left(\frac{1}{a} F(ax + b) + C \right)' = \frac{1}{a} (F(ax + b))' = \frac{1}{a} F'(ax + b) \cdot a = f(ax + b).$$

EXEMPLOS:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (2x^3 - 3 \sin x + 5 \sqrt{x}) dx &= \int 2x^3 dx - \int 3 \sin x dx + \\ &+ \int 5 \sqrt{x} dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int \sin x dx + 5 \int \sqrt{x} dx = \\ &= 2 \frac{x^4}{4} - 3(-\cos x) + 5 \cdot \frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$b) \int \left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{6} + 7 \right) dx = \int \frac{6}{\sqrt[3]{x}} dx - \int \frac{\sqrt[3]{x}}{6} dx + \int 7 dx =$$

$$= 6 \int x^{-1/3} dx - \frac{1}{6} \int x^{1/3} dx + 7 \int dx =$$

$$= 6 \frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{6} \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + 7x + C$$

$$= 9 \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{8} x \sqrt[3]{x} + 7x + C$$

$$c) \int \frac{dx}{x+2} = L|x+2| + C$$

valor de $\left(\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{a} \cdot \int (ax-b) \right)$ Tabela 3
 $\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{1} \cdot L|x+2| + C$

$$d) \int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C$$

$$e) \int \sin (2x - 6) dx = -\frac{1}{2} \cos (2x - 6) + C$$

OBS.: Os três últimos exemplos decorrem direto da tabela básica e do teorema 3 acima.

EXERCÍCIOS 1.3.

1. Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int x(x+a)(x+b) dx$, a e b constantes.

b) $\int \sqrt{2px} dx$, p constante.

c) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2 + 7}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$



$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}$$

$$g) \int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$h) \int \operatorname{tg}^2 x \, dx \quad \text{Dica: } \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$i) \int (10 x^4 - 6 x^3 + 5) \, dx$$

$$j) \int \left(\frac{4}{x^7} - \frac{7}{x^4} + x \right) dx$$

$$l) \int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2} x^{-2} + 5 \right) dx$$

$$m) \int \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 dx$$

$$n) \int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$$

2. Obtenha a função que passa por (1, 1) cuja derivada é $x^2 + 1$.

3. Qual a equação do movimento de um móvel que parte do repouso e cuja velocidade no tempo t é dada por $v(t) = t^3 + 3t$?

4. A taxa de variação de temperatura T de uma solução é dada

por $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4} t + 10$, onde t é o tempo em minutos e T é medi-

da em graus Celsius. Se a temperatura é 5°C em $t=0$, obtenha uma fórmula para T em função de t .



CAPÍTULO 2 - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

2.1. INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Suponha que queiramos achar a integral $\int f(x) dx$. Suponha também, que não podemos achar diretamente a antiderivada de $f(x)$, mas sabemos que ela existe.

Vamos mudar a variável na expressão dentro do sinal da integral, pondo $x = \varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é uma função contínua com derivada contínua, tendo uma função inversa. Então, $dx = \varphi'(t) dt$.

$$\text{Provemos que } \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Do mesmo modo que anteriormente, verifiquemos que as derivadas de ambos os lados são iguais:

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x)$$

$$\text{Como } \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \quad (\text{Cálculo I}).$$

Utilizando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_x &= \left(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)] \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \\ &= f[\varphi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Às vezes é melhor escolher uma mudança de variável da forma $t = \psi(x)$ ao invés de $x = \varphi(t)$.

EXEMPLOS:

Calcule

a) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$

Fazendo a substituição $t = \sin x$, temos $dt = \cos x dx$ e

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \int \sqrt{t} \, dt = \int t^{1/2} \, dt = \frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2 \sin^{3/2} x}{3} + C.$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

Se $u = 5x - 2$, $du = 5 \, dx$ e $dx = \frac{1}{5} du$. Então,

$$\therefore \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{5} \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{u} + C =$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{5x-2} + C.$$

c) $\int x^2 e^{x^3} \, dx$

Faremos a substituição $u = x^3$. Então, $du = 3x^2 \, dx$ e

$$x^2 \, dx = \frac{du}{3}. \text{ Logo,}$$

$$\int x^2 e^{x^3} \, dx = \frac{1}{3} \int e^u \, du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

EXERCÍCIOS 2.1.

1. Aplicando substituições convenientes, calcule as seguintes integrais:

a) $\int \frac{a \, dx}{a-x}$, a constante

b) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^4}}$

c) $\int \frac{2x+3}{2x+1} \, dx$ Dica: Efetue o quociente.



$$d) \int \left(a + \frac{b}{x-a} \right)^2 dx, \quad a \text{ e } b \text{ constantes}$$

$$e) \int \frac{b dy}{\sqrt{1-y}}, \quad b \text{ constante}$$

$$f) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$g) \int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$$

$$h) \int \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} dx$$

$$i) \int \frac{\arctg x/2}{4+x^2} dx$$

$$j) \int a e^{-mx} dx, \quad a \text{ e } m \text{ constantes}$$

$$l) \int 4^{2-3x} dx$$

$$m) \int (e^t - e^{-t}) dt$$

$$n) \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx, \quad a \text{ e } b \text{ constantes}$$

$$o) \int x 7^{x^2} dx$$

$$p) \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$q) \int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$r) \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$$

$$s) \int e^x \sqrt{a-b e^x} dx, \quad a \text{ e } b \text{ constantes}$$

$$t) \int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

u) $\int \sin^2 x \, dx$ (sem usar a tabela) Dica: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

v) $\int \frac{x \, dx}{\cos^2(x^2)}$

w) $\int \tan^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3} \, dx$

x) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$

y) $\int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} \, dx$

z) $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x + 1} \, dx$

2. Aplicando as substituições indicadas, obtenha as integrais:

a) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 2}}$, $x = \frac{1}{t}$

b) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$, $x = -Lt$

c) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}$, $b = \sqrt{x+1}$

d) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, $t = \sin x$

2.2. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Este tópico está intimamente relacionado com a regra de derivação de produto de funções. Fornece um artifício extremamente simples e importante para o cálculo de integrais indefinidas.

TEOREMA: Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções diferenciáveis. Então



$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx.$$

OBSERVAÇÃO: Como $du = u'(x) dx$ e $dv = v'(x) dx$, a expressão acima pode ser escrita em sua forma mais conhecida:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

DEM.: Como

$$(u(x) v(x))' = u(x) v'(x) + u'(x) v(x) \text{ e, logo,}$$

$$u(x) v'(x) = (u(x) v(x))' - u'(x) v(x),$$

podemos escrever

$$\int u(x) v'(x) dx = \int (u(x) v(x))' dx - \int v(x) u'(x) dx \text{ e,}$$

$$\text{finalmente, } \int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx.$$

EXEMPLOS: Calcular

a) $\int x e^{2x} dx$

Seja $u = x$ e $dv = e^{2x} dx$. Então,

$$du = dx \text{ e } v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$u = 2x$
 $du = 2 dx$

Então, temos

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

b) $\int x \sec^2 x dx$

Seja $u = x$ e $dv = \sec^2 x dx$. Logo,

$$du = dx \text{ e } v = \tan x$$

Então,

$$\int x \sec^2 x dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{1}{\cos x} dx + C$$

$$+ \ln |\sec x| + C$$

$$- (-\ln |\cos x|) + C$$

c) $\int x^2 e^{2x} dx$

Seja $u = x^2$ e $dv = e^{2x} dx$. Então,

$$du = 2x dx \text{ e } v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Então,

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx$$

Para calcular a integral à direita da equação

acima, devemos novamente integrar por partes. Observando o exemplo a,

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

EXERCÍCIOS 2.2.

Calcule as integrais

a) $\int Lx dx$

b) $\int \arctg x dx$

c) $\int x \cos 3x dx$

d) $\int \frac{x}{e^x} dx$

e) $\int x 2^{-x} dx$

f) $\int x \sin x \cos x dx$

g) $\int (Lx)^2 dx$

h) $\int \frac{Lx}{x^3} dx$

i) $\int x \arctg x dx$

j) $\int e^x \sin x dx$

l) $\int \frac{\arcsen x}{x^2} dx$

m) $\int L(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$

n) $\int \arcsen x \frac{x dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$



2.3. INTEGRAIS DE FUNÇÕES CONTENDO UM TRINÔMIO QUADRADO

CASO 1

2.3.1. Vamos considerar a integral

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Primeiramente, vamos transformar o trinômio do denominador, representando-o como soma ou diferença de quadrados:

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]$$

onde $\pm k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$

O sinal depende das raízes do trinômio complexas ou reais.

Então, a integral I_1 toma a forma

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]}$$

Façamos a mudança de variável

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad du = dx. \quad \text{Então, } I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 \pm k^2} \quad \text{que são inte-}$$

grais da tabela básica.

EXEMPLO: Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

$$\text{Temos } 2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10) =$$

$$2(x^2 + 4x + 4 - 4 + 10) = 2[(x + 2)^2 + 6]$$

1ª passo: colocar a

em evidência, levando o

do integral

2ª passo: Multiplicar

e de $\frac{b}{2a}$ por 2

(se necessário)

3ª passo: somar 2

subtrair o 2º

termo ao

quadrado

4ª passo: Fatorar

obtido (geralmente)

5ª passo: agrupar

termos

restantes

em $\pm k^2$

6ª passo: chamar de "u"

o constante da parent

serem

facile

base

STUDY OF THE EFFECT OF TEMPERATURE ON THE RATE OF REACTION

1. Introduction

2.

3.

4. Results and Discussion

5. Conclusion

6. References

7. Appendix

8. Acknowledgements

9. Notes

10. Bibliography

11. Glossary

12. Index

13. Summary

14. Abstract

15. Introduction

16. Results and Discussion

17. Conclusion

18. References

19. Appendix

20. Acknowledgements

21. Notes

22. Bibliography

23. Glossary

24. Index

25. Summary

26. Abstract

Logo,

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{[(x+2)^2 + 6]}$$

Façamos a substituição $u = x + 2$, $du = dx$.

Então,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

Caso 2:

2.3.2. Consideremos uma integral de forma mais geral:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

numerosos:
1º: obter a derivada do denominador, por regra do produto
2º: no lugar de x, coloca a derivada, depois expon
3º: (se não) ou substitua por

Façamos uma transformação no numerador, de tal

forma que a expressão linear coincida com a derivada do denominador:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

4º: separar em 2 integrais, a primeira de as constantes
5º: na primeira integral, fazer substituições, usar o 2º caso

A segunda integral coincide com a integral anterior I_1 . Na primeira integral, façamos a substituição

$$u = ax^2 + bx + c, \quad du = (2ax + b) dx$$

$$\text{Temos } \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{du}{u} = L|u| + C = L|ax^2 + bx + c| + C.$$

$$\text{Então, } I_2 = \frac{A}{2a} L|ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1$$

EXEMPLO: Calcule a integral

$$I = \int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} dx$$



$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + (3+1)}{x^2-2x-5} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx + \\
 &+ 4 \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)-5-1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x-5} dx + \\
 &+ 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6}
 \end{aligned}$$

Fazendo as substituições

$$v = x^2 - 2x - 5, \quad dv = (2x - 2) dx \quad e$$

$$u = x - 1, \quad du = dx, \quad \text{temos}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} + 4 \int \frac{du}{u^2 - 6} = \frac{1}{2} L|v| + 4 \frac{1}{2\sqrt{6}} L \left| \frac{\sqrt{6} - u}{\sqrt{6} + u} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{2} L|x^2 - 2x - 5| + \frac{2}{\sqrt{6}} L \left| \frac{\sqrt{6} - (x - 1)}{\sqrt{6} + (x - 1)} \right| + c.$$

CASO 3

2.3.3. Vamos considerar a integral

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Coincide com o caso 1, a não ser pela integral da tabela básica

Pelas observações do item 2.3.1., podemos reduzir a integral I_3 a uma das integrais

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}},$$

que são integrais da tabela básica.

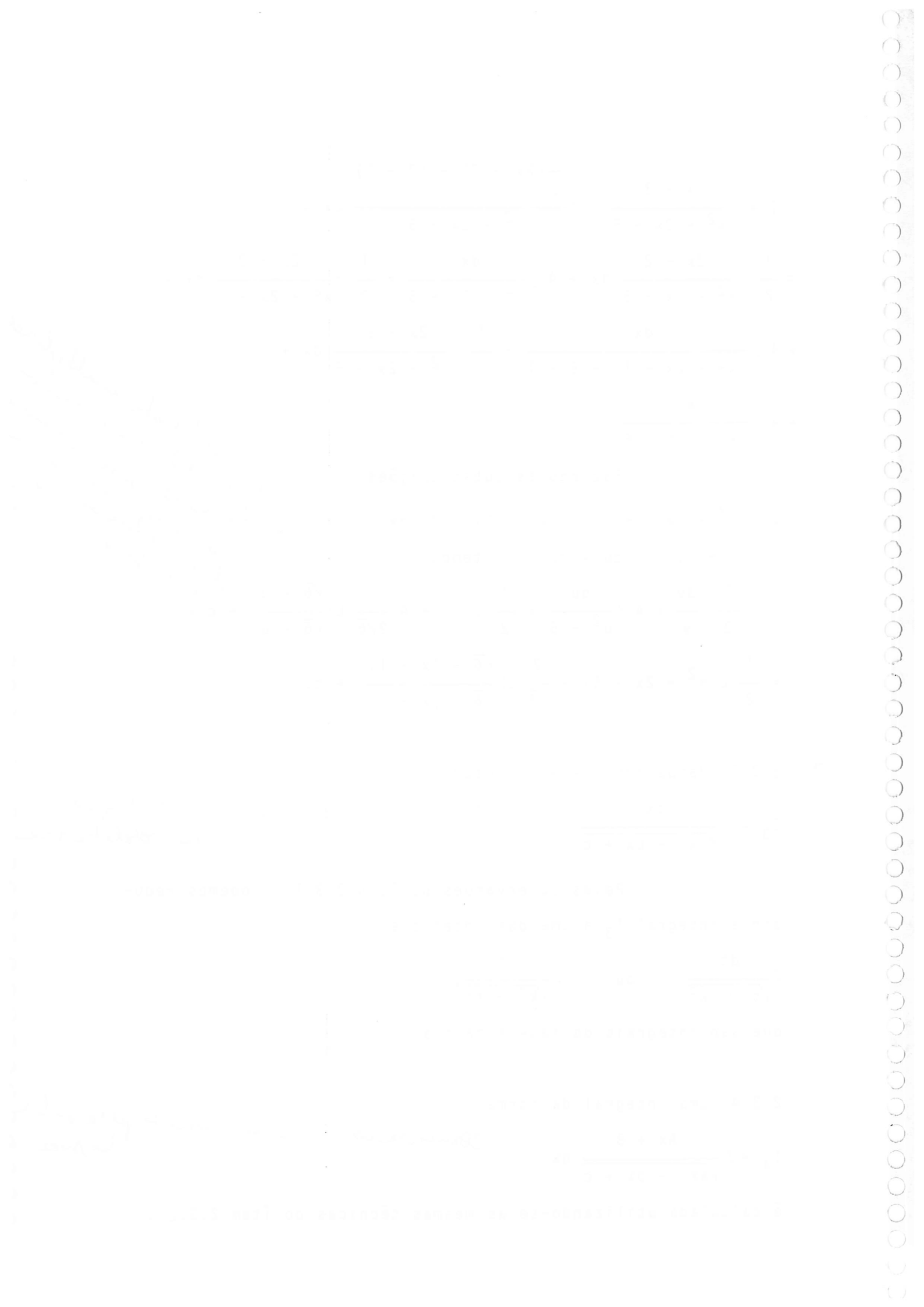
CASO 4

2.3.4. Uma integral da forma

$$I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

coincide com o caso 2, exceto pela tabela básica

é calculada utilizando-se as mesmas técnicas do item 2.3.2..



EXEMPLO: Obtenha

$$I = \int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx$$

Temos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) + (3 - 10)}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx - \\ &- 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 6}} = 5 \sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \ln |x + 2 + \\ &+ \sqrt{(x + 2)^2 + 6}| + c. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 2.3.

Calcular:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

b) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$

c) $\int \frac{x dx}{x^2 - 7x + 13}$

d) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$

g) $\int \frac{(x + 3) dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$

h) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}$

EXERCISE 12

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

Find

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 6x - 4 \quad f''(1) = 6(1) - 4 = 2$$

$$f''(2) = 6(2) - 4 = 8$$

EXERCISE 13

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 5$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 4$$

$$f'''(x) = 24x - 18$$

$$f'''(1) = 24(1) - 18 = 6$$

$$f'''(2) = 24(2) - 18 = 30$$

$$f'''(3) = 24(3) - 18 = 54$$

$$f'''(4) = 24(4) - 18 = 78$$

$$f'''(5) = 24(5) - 18 = 102$$

$$f'''(6) = 24(6) - 18 = 126$$

$$f'''(7) = 24(7) - 18 = 150$$

$$f'''(8) = 24(8) - 18 = 174$$

2.4. INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

Uma função racional é expressa como quociente de duas funções polinomiais, isto é, como $P(x)/Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Se o grau do numerador é menor que o grau do denominador, a função é chamada própria; caso contrário, é chamada imprópria.

Toda fração imprópria pode ser escrita como soma de um polinômio por uma fração própria, por meio da divisão do numerador pelo denominador, ou seja, se $P(x)/Q(x)$ é uma fração imprópria,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $M(x)$ é um polinômio e $\frac{R(x)}{Q(x)}$ é uma fração própria.

EXEMPLO: A fração imprópria $\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$ pode ser escrito como

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}$$

própria

$$\begin{array}{r} x^4 - 3 \\ x^2 + 2x + 1 \overline{) } \\ \underline{x^4 + 2x^3 + x^2} \\ -2x^3 - x^2 - 3 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 - 2x} \\ 0 + 3x^2 + 2x - 3 \\ \underline{3x^2 + 6x + 3} \\ 0 - 4x - 6 \end{array}$$

Resto:

Como é fácil integrarmos polinômios, a dificuldade em integrarmos funções racionais reside na integração de frações próprias.

DEFINIÇÃO: São chamadas frações parciais, frações próprias da forma:

i) $\frac{A}{x - a}$

ii) $\frac{A}{(x - a)^k}$ ($k \geq 2$, inteiro)

iii) $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ (as raízes do denominador são complexas)

As funções (a) e (b) são expressões como as seguintes:
 as duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

Logo, a função (b) é a mesma que a (a).
 As duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

Logo, a função (b) é a mesma que a (a).
 As duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

Logo, a função (b) é a mesma que a (a).
 As duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

Logo, a função (b) é a mesma que a (a).
 As duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

Logo, a função (b) é a mesma que a (a).
 As duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

Logo, a função (b) é a mesma que a (a).
 As duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

Logo, a função (b) é a mesma que a (a).
 As duas funções polinomiais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, onde
 a (a) tem grau 2, e a (b) tem grau 2, mas o termo de grau 2
 tem de ser o mesmo, e a (b) tem de ter o mesmo termo de grau 1.
 Logo, a função (b) é a mesma que a (a).

$$\text{iv)} \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} \quad (k \geq 2, \text{ raízes do denominador complexas})$$

A integração de frações parciais não apresenta dificuldades, como será visto a seguir:

$$\text{i)} \int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \int \frac{A}{(x - a)^k} dx &= A \int (x - a)^{-k} dx = A \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k + 1} + C = \\ &= \frac{A}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \quad \text{já visto na seção anterior}$$

$$\text{iv)} \text{ A integral } \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx \text{ não será vista por não fazer parte dos objetivos do curso.}$$

Suponhamos que temos uma função racional própria

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Assumiremos que os coeficientes dos polinômios são reais e que a função dada é não redutível (isto é, o numerador e o denominador não têm raízes comuns).

Teoremas garantem que toda função racional própria pode ser decomposta em uma soma de frações parciais. Essas frações parciais são determinadas pelas raízes do denominador $Q(x)$. Listamos, agora, os casos possíveis:

CASO 1: As raízes do denominador são reais e distintas, ou seja, $Q(x) = (x - a)(x - b) \dots (x - d)$.

Aqui a fração própria $P(x)/Q(x)$ é decomposta em frações parciais da seguinte forma:

1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $f(x)$ is an odd function and that

$$f(x) = \arctan x$$

for all $x \in \mathbb{R}$. The second part of the paper is devoted to the study of the function $g(x)$ defined by the equation

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $g(x)$ is an even function and that

$$g(x) = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

for all $x \in \mathbb{R}$. The third part of the paper is devoted to the study of the function $h(x)$ defined by the equation

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $h(x)$ is an even function and that

$$h(x) = \frac{1}{5} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

for all $x \in \mathbb{R}$. The fourth part of the paper is devoted to the study of the function $k(x)$ defined by the equation

$$k(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^8} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $k(x)$ is an even function and that

$$k(x) = \frac{1}{7} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

for all $x \in \mathbb{R}$. The fifth part of the paper is devoted to the study of the function $l(x)$ defined by the equation

$$l(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^{10}} dt$$

for $x \in \mathbb{R}$. It is shown that $l(x)$ is an even function and that

$$l(x) = \frac{1}{9} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d}$$

EXEMPLO:

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

CASO 2: As raízes do denominador são reais e algumas delas são múltiplas, ou seja,

$Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-d)^\delta$, $\alpha, \beta, \dots, \delta$ inteiros maiores ou iguais a um.

Neste caso, a fração $P(x)/Q(x)$ é decomposta em frações parciais como

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \\ & + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \dots + \frac{D}{(x-d)^\delta} + \dots + \frac{D_{\delta-1}}{(x-d)} \end{aligned}$$

EXEMPLO:

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3 (x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

CASO 3: Entre as raízes do denominador, existem raízes complexas distintas (não repetidas).

Essas raízes complexas vem em duplas conjugadas, que dão origem a trinômios do 2º grau. Assim,

$$Q(x) = (x^2 + px + q)(x^2 + \ell x + s) \dots (x-a)^\alpha \dots (x-d)^\delta$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ é decomposta em

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \frac{Fx + G}{x^2 + \ell x + s} + \dots + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \dots + \\ & + \frac{D}{(x-d)^\delta} + \frac{D_1}{(x-d)^{\delta-1}} + \dots + \frac{D_{\delta-1}}{(x-d)} \end{aligned}$$



EXEMPLO:

$$\frac{x}{(x^2 + x + 1)(x - 1)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + x + 1)} + \frac{A}{(x - 1)}$$

CASO 4: Entre as raízes do denominador, existem raízes complexas múltiplas.

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\mu \cdot (x^2 + lx + s)^\gamma \dots (x - a)^\alpha \dots (x - d)^\delta$$

Não estudaremos este caso.

As constantes desconhecidas na decomposição podem ser determinadas reduzindo-se as frações a um denominador comum e igualando-se os coeficientes dos numeradores obtidos. Um modo de facilitar a obtenção destas constantes é atribuir-se valores convenientes à variável x após a redução ao denominador comum.

EXEMPLO:

$$\frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3 (x - 2)} = \frac{A}{(x + 1)^3} + \frac{A_1}{(x + 1)^2} + \frac{A_2}{(x + 1)} + \frac{B}{(x - 2)}$$

Reduzindo-se ao denominador comum e igualando-se os numeradores, temos:

$$x^2 + 2 = A(x - 2) + A_1(x + 1)(x - 2) + A_2(x + 1)^2(x - 2) + B(x + 1)^3, \forall x \quad (1)$$

$$\text{Se } x = 2, \quad 6 = 27B \Rightarrow B = \frac{2}{9}$$

$$\text{Se } x = -1, \quad 3 = -3A \Rightarrow A = -1$$

Reagrupando-se o lado direito de (1), temos:

$$x^2 + 2 = (A_2 + B)x^3 + (A_1 + 3B)x^2 + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)x + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B)$$

Então $A_2 + B = 0$

$A_1 + 3B = 1$

$A - A_1 - 3A_2 + 3B = 0$

$-2A - 2A_1 - 2A_2 + B = 2$

Logo, $A_2 = -\frac{2}{9}$ e $A_1 = \frac{1}{3}$

Resumindo, suponhamos que queiramos calcular a integral de uma fração racional

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, ou seja, $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Se a dada fração é imprópria, representamos como soma de um polinômio $M(x)$ e uma fração própria $P_1(x)/Q(x)$. Essa fração própria pode ser representada como soma de frações parciais. Então, a integração de uma função racional reduz-se à integração de um polinômio e diversas frações parciais.

EXEMPLOS:

a) Calcule $\int \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3 (x - 2)} dx$

Pelo exemplo acima,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3 (x - 2)} dx &= -\int \frac{dx}{(x + 1)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x + 1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x + 1} + \\ &+ \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x - 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{9} L|x + 1| + \\ &+ \frac{2}{9} L|x - 2| + C = -\frac{2x - 1}{6(x + 1)^2} + \frac{2}{9} L \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

b) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

Decompondo e integrando em frações parciais, temos



$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

PARTE COMPLETA

Consequentemente, $x = (Ax + B)(x - 1) +$

$$+ C(x^2 + 1)$$

$$\text{Se } x = 1, \quad 1 = 2C, \quad C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x = 0, \quad 0 = -B + C, \quad B = \frac{1}{2}$$

Reagrupando o lado direito da expressão acima,

temos $x = (A + C)x^2 + (-A + B)x - B + C$ e, logo,

$$0 = A + C \quad \text{e} \quad A = -\frac{1}{2} \quad \text{Então,}$$

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} =$$

$$= -\frac{1}{4} L|x^2 + 1| + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} L|x - 1| + C$$

EXERCÍCIOS 2.4.

Resolver as integrais:

a) $\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x - 2)} \, dx$

b) $\int \frac{x \, dx}{(x + 1)(x + 3)(x + 5)}$

c) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \, dx$



$$d) \int \frac{x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$$

$$e) \int \frac{dx}{(x - 1)^2 (x - 2)}$$

$$f) \int \frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$$

$$g) \int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2 (x + 4)^2}$$

$$h) \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

$$i) \int \frac{x^2 - 5x + 8}{(x^2 + 2x - 3)^2} dx$$

$$j) \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$$

$$l) \int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$$

$$m) \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$n) \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$o) \int \frac{dx}{x(x + 1)^2}$$

$$p) \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2 (x + 1)^2} dx$$

$$q) \int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx$$

$$r) \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$



$$s) \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx$$

$$t) \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}$$

2.5. INTEGRAÇÃO DE CERTAS CLASSES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

CASO 1
2.5.1. Consideremos uma integral da forma

$\int R(\sin x, \cos x) dx$, isto é, uma função racional de seno e cosseno.

Mostraremos que esta integral, pela substituição $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ sempre se reduz a uma integral de função racional. Expressemos $\sin x$ e $\cos x$ em termos de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ou se

ja, em termos de t :

RELACÃO:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right)}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right)} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

RELACÃO:

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right)}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Além disso, $x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$ e $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$

Substituindo as expressões acima na integral,

obtemos uma integral de uma função racional:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2}$$

EXEMPLO:

Obtenha $I = \int \frac{dx}{4 - 5 \operatorname{sen} x}$

Fazendo-se a substituição $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, temos

$$I = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{4 - 5 \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2 dt}{2(1+t^2) - 5t} = \int \frac{dt}{2t^2 - 5t + 2}$$

Resolvendo-se esta integral de função racional

(ver seção 2.4.) obtemos

$$I = \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} \right| + C$$

2.5.2. Se o integrando depende apenas de $\operatorname{tg} x$, então a substituição

$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$ reduz esta integral

a uma integral de uma função racional.

EXEMPLO: Calcule $I = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

Fazendo a substituição $\operatorname{tg} x = t$, temos

$$I = \int t^3 \frac{dt}{1+t^2} = \int t \, dt - \int \frac{t}{1+t^2} \, dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |1+t^2| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln |1+\operatorname{tg}^2 x| + C$$

EXERCÍCIOS 2.5.

Resolver:



$$a) \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$$

$$b) \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$c) \int \frac{\sin x \, dx}{1 + \sin x}$$

$$d) \int \sec^8 x \, dx$$

$$e) \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$$

$$f) \int \tan^4 x \sec^4 x \, dx$$

$$g) \int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$h) \int \frac{dx}{\cos x - \sin x + 1}$$

2.6. INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES IRRACIONAIS

2.6.1. Integrais do tipo

$$\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \dots, x^{p_n/q_n}) \, dx.$$

Nesses casos, pela substituição $x = t^q$, onde q é o mmc dos inteiros $q_1, q_2, \dots, q_n$, obtemos uma integral de função racional.

EXEMPLO: Encontre $I = \int \frac{\sqrt{x} \, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$

Colocamos $x = t^6$. Então $dx = 6t^5 \, dt$ e

$$I = \int \frac{x^{1/2} \, dx}{1 + x^{1/3}} = \int \frac{t^3 (6t^5 \, dt)}{1 + t^2} = 6 \int \frac{t^8}{1 + t^2} \, dt =$$

$$= 6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt =$$



12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

$$\begin{aligned}
 &= 6 \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 - t + \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \right) + C = \\
 &= \frac{6}{7} x^{7/6} - \frac{6}{5} x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^{1/6} + C
 \end{aligned}$$

2.6.2. Integraes da forma

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{p_n/q_n} \right] dx$$

Nesses casos, a substituição

$$\frac{ax + b}{cx + d} = t^q,$$

onde $q = \operatorname{mmc} \{q_1, \dots, q_n\}$, fornece uma integral de função racional.

EXEMPLO: Ache

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(2x-1)^{1/2} - (2x-1)^{1/4}} \rightarrow 2x-1 = t^4 \rightarrow x = \frac{t^4+1}{2} \rightarrow dx = \frac{4t^3}{2} dt = 2t^3 dt$$

Fazendo a substituição $2x - 1 = t^4$, temos $dx = 2t^3 dt$ e

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2t^3 dt}{t^2 - t} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t - 1} = 2 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln |t - 1| + C \\
 &= t^2 + 2t + 2 \ln |t - 1| + C = \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt[4]{2x - 1} + 2 \ln |\sqrt[4]{2x - 1} - 1| + C
 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 2.6.

Calcule:

a) $\int \frac{x dx}{3 + \sqrt{x}}$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$$

$$c) \int \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} dx$$

$$d) \int \frac{x dx}{(2x + 3)^{3/2}}$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+2} - 1} dx$$

$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$$

$$g) \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$$

$$h) \int \frac{3 + \sqrt{x+2}}{4 - \sqrt[4]{x+2}} dx$$

2.7. INTEGRAÇÃO DO TIPO $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ POR MEIO DE SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sejam integrais do tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (1)$$

Veremos um método que reduz a integral acima para uma integral do tipo

$$\int R(\sin z, \cos z) dz, \quad \text{isto necessariamente!! nas equações} \quad (2)$$

já estudadas na seção 2.5.

Completando o quadrado do trinômio dentro da raiz, temos

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

Façamos a mudança de variável

Exercício 1

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Então,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

Vejam os possíveis casos:

CASO 1: $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0$

Chamando de $a = m^2$ e $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$, temos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$$

Assim, a integral (1) reduz-se a

$$\int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt,$$

que reduz-se a uma integral do tipo (2) por meio da substituição

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z.$$

CASO 2: $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0.$

Então, se $a = m^2$ e $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2} \quad \text{e a integral (1) reduz-se a}$$

$$\int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt,$$

que, por meio da substituição $t = \frac{n}{m} \sec z$, reduz-se a uma

integral do tipo (2).

CASO 3: $a < 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0.$ Então, $a = -m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = n^2$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 t^2} \quad \text{e a integral (1) se reduz a (2)}$$

por meio de $t = \frac{n}{m} \operatorname{sen} z$.



CASO 4: $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$.

Neste caso, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ é um complexo, qual-
quer que seja x , o que não nos interessa.

EXEMPLOS:

a) Encontre $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

Atenção: Use a resolução dos exercícios antes de fazer o problema, pois há muitas dicas.

Temos $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 = (x+1)^2 + 1$

Pondo $x+1 = \frac{1}{\tan z}$, temos $dx = \sec^2 z dz$ e

$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{(x+1)^2 + 1} = \sqrt{\tan^2 z + 1} = \sqrt{\sec^2 z} = \sec z$,

e, logo,

$I = \int \frac{\sec^2 z dz}{\tan^2 z \sec z} = \int \frac{\cos z}{\sin^2 z} dz = -\frac{1}{\sin z} + C = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C$

Verifique se a resposta é correta.

b) Calcule $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Fazendo a substituição $x = \sin z$, $dx = \cos z dz$,

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{\cos^2 z} = \cos z$ e, logo,

$I = \int \frac{\sin^5 z}{\cos z} \cos z dz = \int \sin^5 z dz = -\frac{3x^4 + 4x^2 + 8}{15} \sqrt{1-x^2} + C$

EXERCÍCIOS 2.7.

Calcule:

a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

b) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Diferença de potências. Se não substituir pelo ex. de par. seguinte.

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15} [15-10(1-x^2)+3(1-x^2)^2] + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15} [15-10x^2+3(1-x^2)^2] + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15} [3x^4+4x^2+8] + C$

$= \int \sin^4 z \cos z dz = \int (1-\cos^2 z)^2 \cos z dz$

$u = \cos z, du = -\sin z dz, \sin z dz = -du$

$= \int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4) du =$

$= -du + \frac{2}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5$

$= -\cos z + \frac{2}{3} \cos^3 z = \frac{1}{5} \cos^5 z + C$

$= -\cos z (1 - \frac{2}{3} \cos^2 z + \frac{1}{5} \cos^4 z) + C$

$= -\cos z \left(\frac{15-10\cos^2 z+3\cos^4 z}{15} \right) + C$

$= -\sqrt{1-x^2} [15-10(1-x^2)+3(1-x^2)^2] + C$



$$c) \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$d) \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$e) \int \frac{(x^2 + x + 1) dx}{x \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f) \int \frac{dx}{x \sqrt{2 + x - x^2}}$$

$$g) \int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x \sqrt{1 + x + x^2}} dx$$

$$h) \int \sqrt{x^2 - 4} dx$$

$$i) \int \frac{dx}{(1 + x^2) \sqrt{1 - x^2}}$$

$$j) \int \frac{dx}{(1 - x^2) \sqrt{1 + x^2}}$$

$$a) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$$

$$b) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}}$$

$$c) \int x^3 \sqrt{7 + x^2} dx$$

$$d) \int \frac{dx}{x \sqrt{25 - x^2}}$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$$

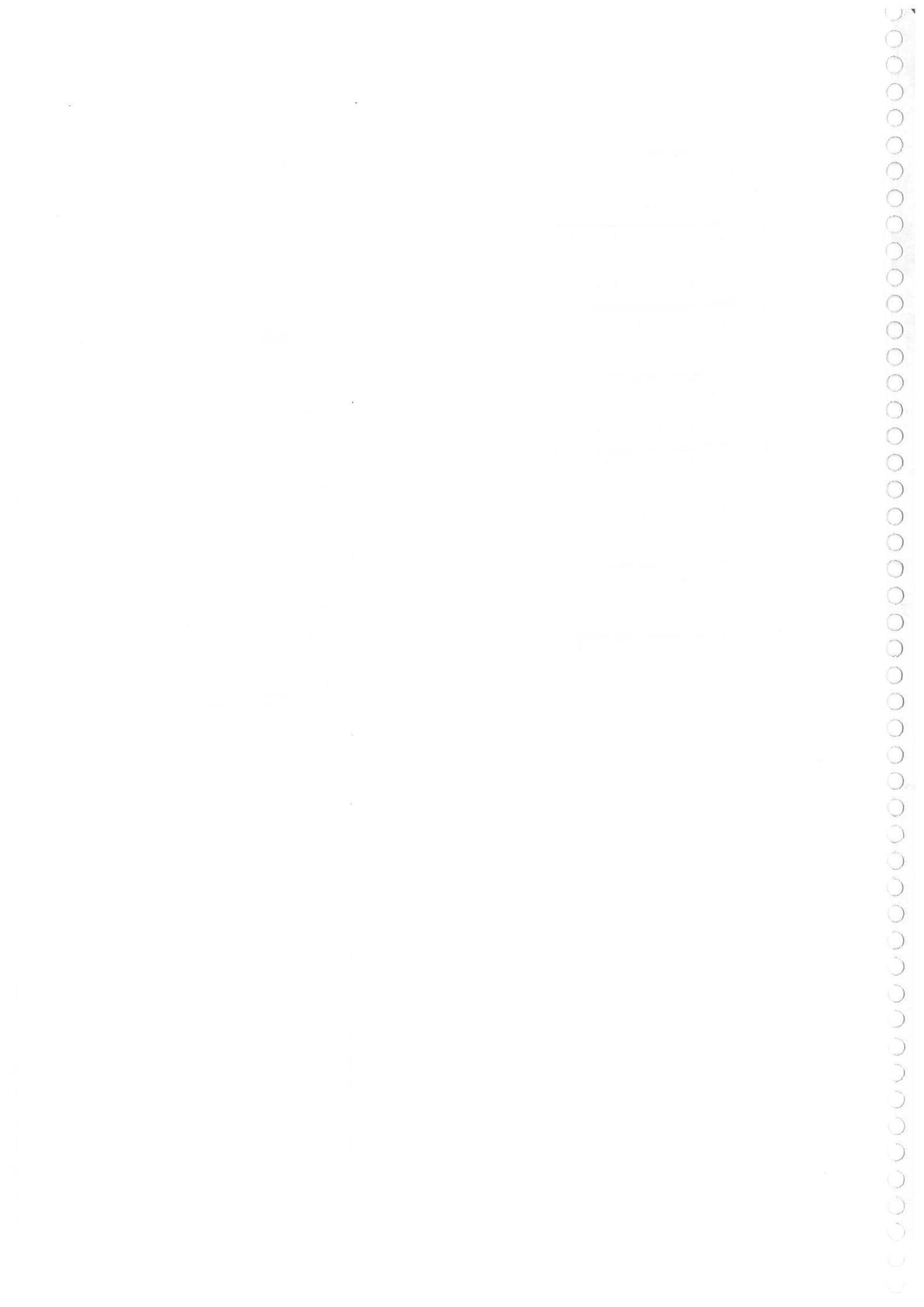
$$f) \int \frac{x^5}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$g) \int (x+2) \sqrt{x^2 + 4x} dx$$

$$h) \int \sqrt{55 + 6x - x^2} dx$$

$$i) \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$j) \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}}$$



CAPÍTULO 3 - A INTEGRAL DEFINIDA

3. 1. DEFINIÇÕES

Seja a função $y = f(x)$ contínua, definida no intervalo $[a, b]$. Divida o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos pelos pontos de divisão

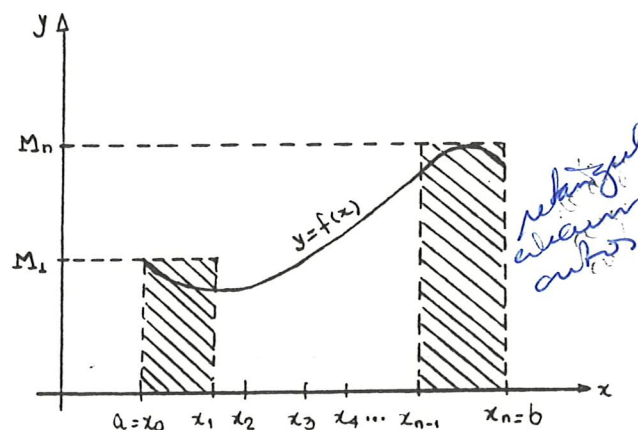
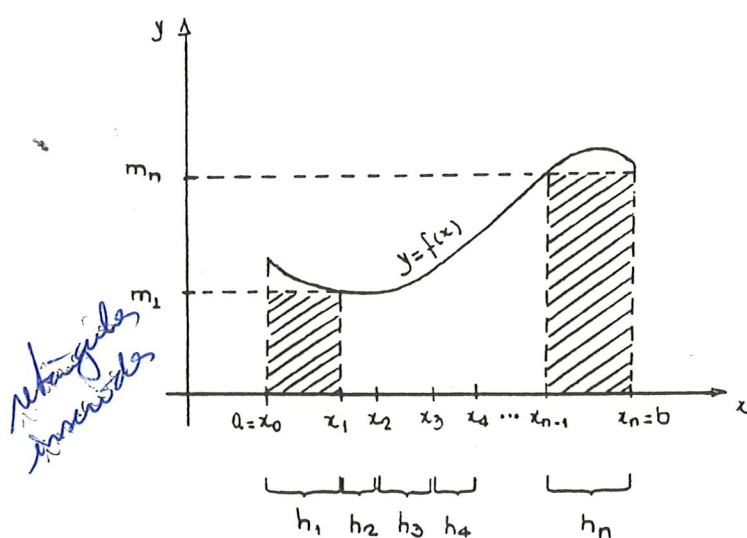
$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b, \quad \text{onde}$$

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

$$\text{e sejam } x_1 - x_0 = h_1, \quad x_2 - x_1 = h_2, \dots, x_n - x_{n-1} = h_n$$

Denotemos por m_i e M_i ao menor e ao maior valor da função $f(x)$ no sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, respectivamente, e por μ_n ao valor máximo de h_i , $1 \leq i \leq n$

$$[\mu_n = \max \{h_1, h_2, \dots, h_n\}].$$



Formemos as somas

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= m_1 h_1 + m_2 h_2 + \dots + m_n h_n = \sum_{i=1}^n m_i h_i \\ \overline{S}_n &= M_1 h_1 + M_2 h_2 + \dots + M_n h_n = \sum_{i=1}^n M_i h_i \end{aligned} \quad \text{e}$$

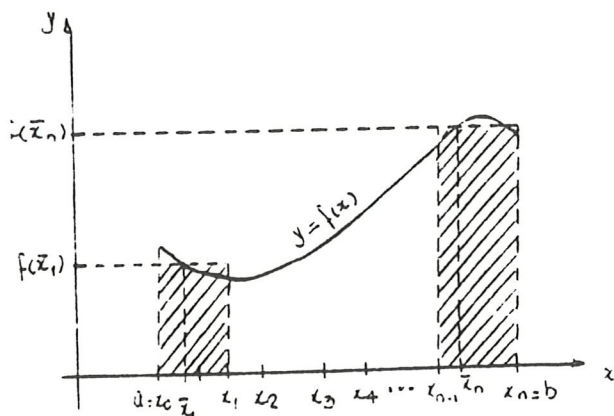
Handwritten note: "Áreas com a notação".

chamadas de soma inferior e soma superior, respectivamente.

Essas somas correspondem às somas das áreas dos retângulos inscritos e circunscritos, respectivamente (ver figuras). Elas fornecem estimativas por falta e por excesso, respectivamente, da área sob o gráfico de $y = f(x)$ de a até b .

Em cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tomemos um ponto arbitrário $\bar{x}_i$ e formemos a soma

$$S_n = f(\bar{x}_1) h_1 + f(\bar{x}_2) h_2 + \dots + f(\bar{x}_n) h_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) h_i$$



Como $m_i \leq f(\bar{x}_i) \leq M_i$, $\forall i$, $\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n$.

A soma S_n , chamada soma de Riemann da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, depende dos sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e também da escolha dos pontos $\bar{x}_i$.

Vamos considerar as diferentes partições do intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tal que $\mu_n \rightarrow 0$. Obviamente, $n \rightarrow \infty$.

menor o tamanho do sub-intervalo

Escolhendo valores apropriados de $\bar{x}_i$, é possível, para cada partição, formar a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) h_i.$$

Suponhamos que essa soma se aproxime de I para uma dada partição, quando $\mu_n \rightarrow 0$. Se para qualquer partição

1. The first part of the report is a general introduction to the subject of the study. It discusses the importance of the study and the objectives of the research. It also provides a brief overview of the methodology used in the study.

2. The second part of the report is a detailed description of the study area. It includes information about the location of the study area, the population of the study area, and the characteristics of the study area. It also discusses the data sources used in the study.

3. The third part of the report is a description of the methodology used in the study. It includes information about the data collection methods, the data analysis methods, and the statistical tests used in the study.



4. The fourth part of the report is a discussion of the results of the study. It includes information about the findings of the study, the implications of the findings, and the limitations of the study. It also discusses the conclusions drawn from the study.

5. The fifth part of the report is a conclusion. It summarizes the main findings of the study and provides a final statement about the study.

6. The sixth part of the report is a list of references. It includes a list of the sources used in the study.

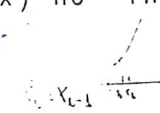
7. The seventh part of the report is an appendix. It includes additional information about the study, such as raw data, detailed calculations, and other supporting materials.

do intervalo $[a, b]$ tal que $\mu_n \rightarrow 0$, e para qualquer escolha de pontos $\bar{x}_i$ a soma $\sum f(\bar{x}_i) h_i$ aproxima-se do mesmo limite I , dizemos que a função $f(x)$ é integrável no intervalo $[a, b]$; o limite I é chamado a integral definida da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. É denotado por

$\int_a^b f(x) dx$ e escrevemos $\lim_{\substack{\mu_n \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) h_i = \int_a^b f(x) dx$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) h_i$

pontos de
mínimo de
cada subintervalo



O limite acima indicado deve ser entendido da seguinte forma:

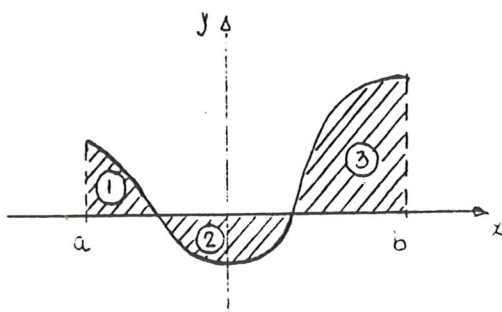
Afirmar que $\lim_{\mu_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) h_i = I$ significa

ca que, para cada número positivo ε , existe um número $\delta > 0$ (dependendo de ε) tal que

$\left| \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) h_i - I \right| < \varepsilon$ é válido para toda partição com $\mu_n < \delta$

Geometricamente, então, o valor $\int_a^b f(x) dx$ representa a área da região situada entre o gráfico da função e o eixo x , sendo que esta área é contada positivamente ou negativamente, conforme essa região esteja situada acima ou abaixo do eixo x .

Por exemplo, seja f dada pelo gráfico abaixo:



Então,

$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3$

DEFINIÇÃO: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$, desde que a última integral exista.

DEFINIÇÃO: $\int_a^a f(x) dx = 0$, se $f(a)$ existe.

Citaremos agora, alguns teoremas de existência das integrais definidas de Riemann.

TEOREMA 1: Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

TEOREMA 2: Se f é uma função limitada e seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

TEOREMA 3: Se f é definida e integrável em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

TEOREMA 4: Se f é integrável em $[a, b]$ e se h é também definida em $[a, b]$ e satisfaz $h(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$ exceto num número finito de pontos, então h é também integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

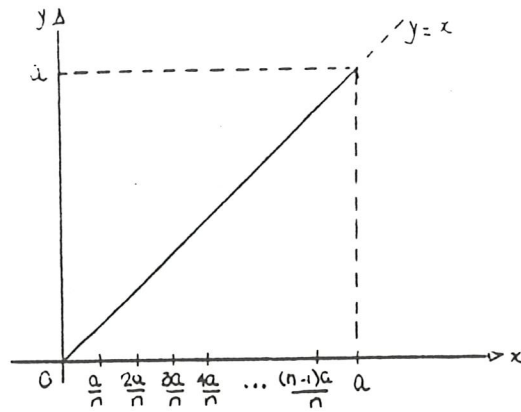
EXEMPLO: Calcular $\int_0^a x dx$, fazendo $h_r = \frac{a}{n}$ e $\bar{x}_r = \frac{a}{n}$.

Temos:

devido por $f(\bar{x}_r) = x$

r	I_r	$\bar{x}_r$	$f(\bar{x}_r)$	h_r
1	$\left[0, \frac{a}{n}\right]$	$\frac{a}{n}$	$\frac{a}{n}$	$\frac{a}{n}$
2	$\left[\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}\right]$	$\frac{2a}{n}$	$\frac{2a}{n}$	$\frac{a}{n}$
3	$\left[\frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}\right]$	$\frac{3a}{n}$	$\frac{3a}{n}$	$\frac{a}{n}$
...	...	...	...	...
$(n-1)$	$\left[\frac{(n-2)a}{n}, \frac{(n-1)a}{n}\right]$	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{a}{n}$
n	$\left[\frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n}\right]$	$\frac{na}{n}$	$\frac{na}{n}$	$\frac{a}{n}$





$$S_n = \frac{a}{n} \left[\frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \frac{3a}{n} + \dots + \frac{(n-1)a}{n} + \frac{na}{n} \right] =$$

$$= \frac{a^2}{n^2} [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n] = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Portanto, } \int_0^a x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2} \frac{n^2 + n \left(\frac{1}{n^2}\right) a^2}{n^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^2}{2}$$

EXERCÍCIOS 3.1.

1. Calcular as somas superior, inferior e de Riemann para a função $y = x^2 + 3$, considerando

$x_0 = 0$	$x_3 = 9/4$	$\bar{x}_1 = 1/4$	$\bar{x}_4 = 4$
$x_1 = 1/2$	$x_4 = 5,0$	$\bar{x}_2 = 1$	
$x_2 = 3/2$		$\bar{x}_3 = 2$	

2. Calcular, pela soma superior, as integrais das funções que se seguem, considerando em cada caso, a sub-divisão do intervalo em n sub-intervalos de iguais amplitudes.

a) $y = x^2 + 3$ $[0, 4]$ $h_r = \frac{4}{n}$

b) $y = x - 1$ $[1, 5]$ $h_r = \frac{4}{n}$

c) $y = x^3 + 2x$ $[0, 3]$ $h_r = \frac{3}{n}$

*nao
mostrando
a subdivisao*



3. Calcular, pela soma inferior, as integrais das funções que se seguem, nos intervalos e respectivas amplitudes indicadas.

a) $y = x^2 - 2$ $[0, 5]$ $h_r = \frac{5}{n}$

b) $y = x^3$ $[0, a]$ $h_r = \frac{a}{n}$

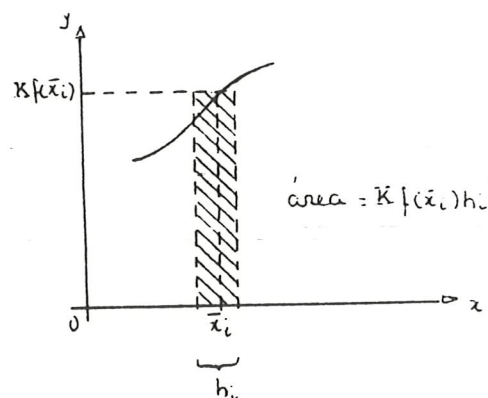
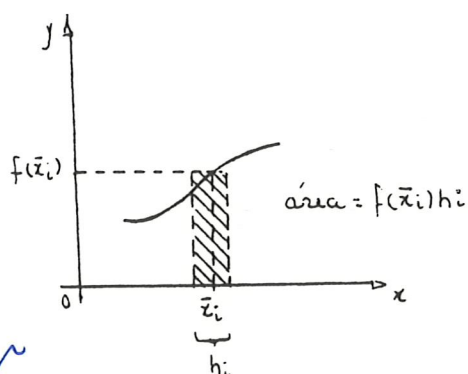
c) $y = 2x + 3$ $[2, 6]$ $h_r = \frac{4}{n}$

3.2. PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL DEFINIDA

As propriedades básicas da integral definida podem ser deduzidas a partir da definição dada na seção anterior. Na maioria dos casos, não apresentamos tais provas.

TEOREMA 1: Se f é uma função integrável no intervalo $[a, b]$ e K é um número constante, então Kf é também integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b Kf(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$.

A figura abaixo mostra a razão geométrica para a propriedade:



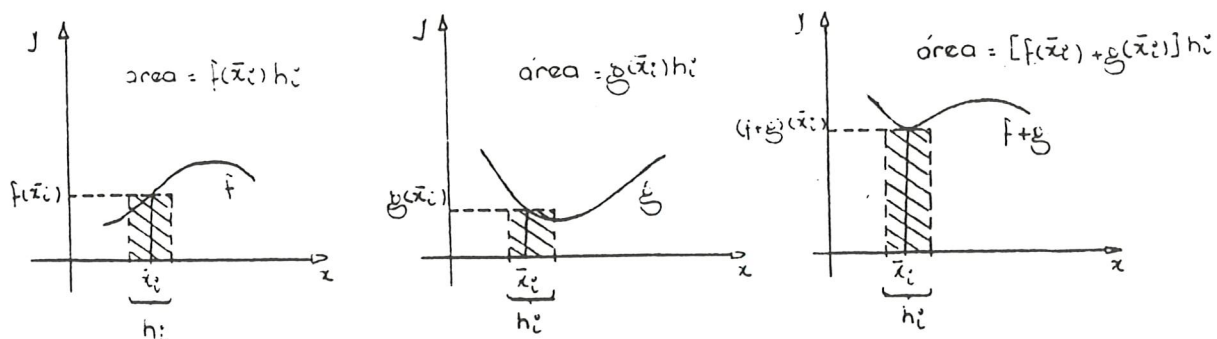
EXEMPLO: Dado que $\int_0^2 f(x) dx = 5$, calcule $\int_0^2 4f(x) dx$.

Pelo teorema 1, $\int_0^2 4f(x) dx = 4 \int_0^2 f(x) dx = 4 \cdot 5 = 20$.

TEOREMA 2: Se f e g são funções integráveis no intervalo $[a, b]$, então $f + g$ é também integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

A razão geométrica é apresentada abaixo:



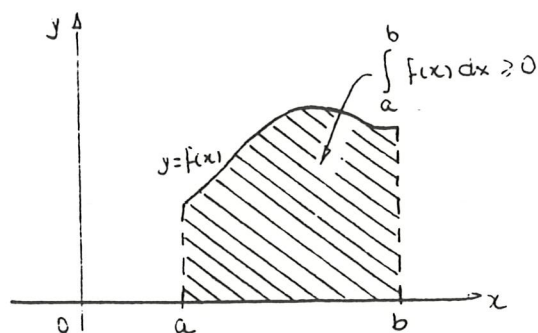
Exemplo **EXEMPLO:** Dados que $\int_{-7}^{13} f(x) dx = 8$ e $\int_{-7}^{13} g(x) dx = -15$, calcule $\int_{-7}^{13} [f(x) + g(x)] dx$.

Pelo teorema 2,

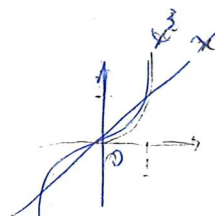
$$\int_{-7}^{13} [f(x) + g(x)] dx = \int_{-7}^{13} f(x) dx + \int_{-7}^{13} g(x) dx = 8 + (-15) = -7$$

TEOREMA 3: Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ para todos os valores de x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

O teorema 3 é, geometricamente, evidente, por definição.



Exemplo **EXEMPLO:** Mostre que $\int_0^1 x^3 dx \leq \int_0^1 x dx$.



Sabemos que, para $0 \leq x \leq 1$, $x^3 \leq x$. Assim,

$$x - x^3 \geq 0.$$

Pelo teorema 3, $\int_0^1 (x - x^3) dx \geq 0$, isto é,



Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

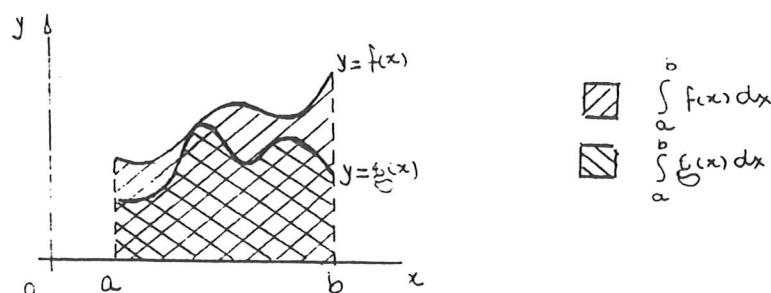


Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

$$\int_0^1 x \, dx - \int_0^1 x^3 \, dx \geq 0 \quad \text{e, portanto,} \quad \int_0^1 x^3 \, dx \leq \int_0^1 x \, dx$$

TEOREMA 4: Se f e g são funções integráveis no intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x)$ é válido para todos os valores de x no intervalo $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

A figura abaixo apresenta uma interpretação geométrica do teorema 4, quando $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$.



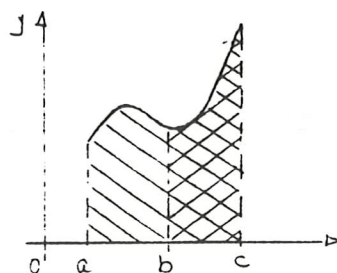
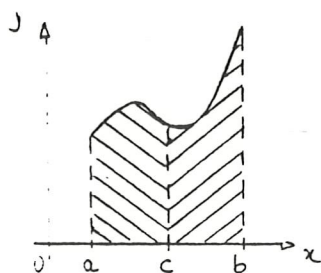
TEOREMA 5: Se f é integrável no intervalo $[a, b]$, então $|f|$ também o será e

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

TEOREMA 6: Para quaisquer três números a , b e c a igualdade

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

é verdadeira, se as integrais existirem.



EXEMPLO: Define-se a função f pela equação

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{para } x < 0 \\ x - 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

apresenta
se des
tempo

1. The first part of the paper discusses the importance of the study and the objectives of the research. It also provides a brief overview of the methodology used in the study.

2. The second part of the paper presents the results of the study. It includes a detailed description of the data collected and the analysis performed. The results are presented in a clear and concise manner, with appropriate use of tables and figures.

3. The third part of the paper discusses the implications of the study and the conclusions drawn from the results. It also provides a brief overview of the limitations of the study and the areas for future research.



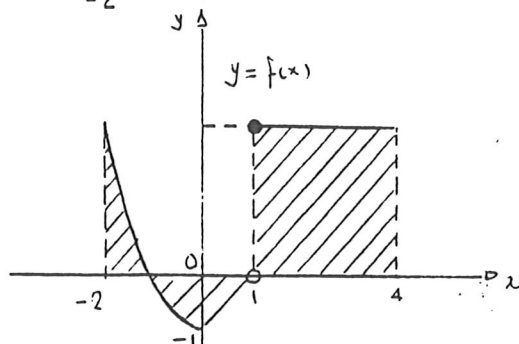
4. The fourth part of the paper discusses the implications of the study and the conclusions drawn from the results. It also provides a brief overview of the limitations of the study and the areas for future research.



5. The fifth part of the paper discusses the implications of the study and the conclusions drawn from the results. It also provides a brief overview of the limitations of the study and the areas for future research.

6. The sixth part of the paper discusses the implications of the study and the conclusions drawn from the results. It also provides a brief overview of the limitations of the study and the areas for future research.

Assuma que $\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$, que $\int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$ e que $\int_a^b dx = (b - a)$. Use o teorema 6 para calcular $\int_{-2}^4 f(x) dx$.

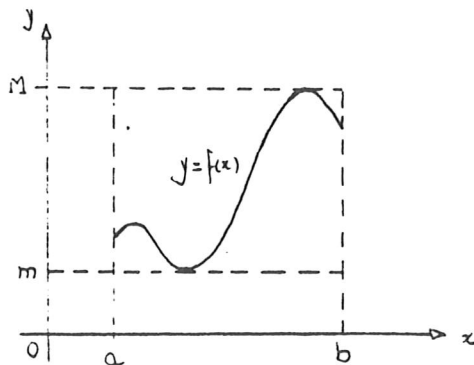


$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = \\
 &= \int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx + \int_0^1 (x - 1) dx + \int_1^4 3 dx = \\
 &= \int_{-2}^0 x^2 dx - \int_{-2}^0 1 dx + \int_0^1 x dx - \int_0^1 1 dx + \\
 &\quad + 3 \int_1^4 1 dx = \\
 &= \frac{1}{3} [0^3 - (-2)^3] - [0 - (-2)] + \frac{1}{2} [1^2 - 0^2] - \\
 &\quad - (1 - 0) + 3(4 - 1) = \\
 &= \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 1 + 9 = \frac{55}{6}.
 \end{aligned}$$

TEOREMA 7 (TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS): Suponhamos que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então, existe um número c em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c)$$

DEM:



Se m e M são, respectivamente, o menor e o maior valor de $f(x)$ em $[a, b]$, então,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \text{ou}$$

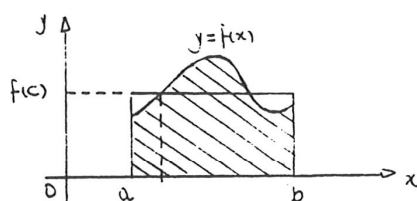
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Como f é contínua, toma todos os valores intermediários entre m e M . Portanto, para algum valor c ,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

OBS.: O valor $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ é chamado valor médio de f em $[a, b]$.

A condição $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$ significa que a área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é igual à do retângulo cuja base é o intervalo $[a, b]$ e cuja altura é $f(c)$ (figura abaixo).



área sob a curva = área do retângulo

EXEMPLO: Dado que $\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$, encontre o valor c

tal que $\int_1^3 x^2 dx = (3-1) f(c)$.

$$\text{Temos que } \int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}.$$

Logo, queremos encontrar c tal que $\frac{26}{3} = 2 \cdot f(c)$

$$\text{ou } f(c) = \frac{13}{3} \quad \text{ou } c^2 = \frac{13}{3} \quad \text{Logo, } c = \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$$

Desprezamos $-\sqrt{\frac{13}{3}}$ pois ele não se encontra no intervalo $[1, 3]$.

$$\text{Portanto, } \int_1^3 f(x) dx = (3 - 1) f\left(\sqrt{\frac{13}{3}}\right)$$

EXERCÍCIOS 3.2.

1. Use as propriedades básicas da integral para justificar cada afirmativa:

a) $\int_0^3 (4 + 3x - x^2) dx \geq 0$

b) $\int_0^1 x^4 dx \leq \int_0^1 x dx$

c) $\int_5^1 \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx - \int_0^5 \sqrt{x^2 + 1} dx$

d) $\int_3^4 \frac{dx}{1+x^2} - \int_5^5 \frac{dx}{1+x^2} = \int_6^4 \frac{dt}{1+t^2} + \int_3^6 \frac{dy}{1+y^2}$

2. Suponha que f e g são funções integráveis em $[a, b]$ tais que $|f(x) - g(x)| \leq K$ para todo número x em $[a, b]$ onde K é uma constante positiva e que $\int_a^b dx = (b - a)$. Prove que

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| \leq K (b - a).$$

3. Pode-se mostrar que $\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{39}{4}$. Determine um número c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio para esta integral.

3.3. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (NEWTON-LEIBNIZ)

TEOREMA 1: Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[b, c]$ e suponhamos que a é um número fixo neste intervalo. De fine-se a função g com domínio $[b, c]$ por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } x \in [b, c]$$

Então g é diferenciável em (b, c) e $g'(x) = f(x)$.

DEM: Vamos dar ao argumento x um incremento Δx . Então,

$$g(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

(teorema 6 - seção 3.2.).

O incremento da função $g(x)$ é igual a

$$\begin{aligned} \Delta g &= g(x + \Delta x) - g(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \\ &\quad - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

Pelo teorema 7, seção 3.2.,

$$\Delta g = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) (x + \Delta x - x) = f(c) \Delta x,$$

onde c está entre x e $x + \Delta x$.

$$\text{Logo, } \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{f(c) \Delta x}{\Delta x} = f(c).$$

$$\text{Então, } g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c)$$

$$\text{Mas, } c \rightarrow x \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0 \text{ e, então } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c)$$

e, devido à continuidade de $f(x)$,

$$\lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

$$\text{Portanto, } g'(x) = f(x)$$

EXEMPLOS: Calcule $g'(x)$, onde:

$$a) g(x) = \int_0^x \sqrt{4 + t^6} dt.$$

$$\text{Diretamente do teorema, } g'(x) = \sqrt{4 + x^6}$$

$$b) g(x) = \int_x^5 \sqrt{1 + t^4} dt$$

$$g(x) = \int_x^5 \sqrt{1 + t^4} dt = - \int_5^x \sqrt{1 + t^4} dt = - \int_5^x \sqrt{1 + t^4} dt$$

Logo, $g'(x) = -\sqrt{1+x^4}$

c) $g(x) = -x \int^x \frac{dt}{3+t^2}$

Temos $g(x) = -x \int^0 \frac{dt}{3+t^2} + 0 \int^x \frac{dt}{3+t^2} =$

$$= \underbrace{0 \int^{-x} \frac{dt}{3+t^2}}_{g_1(x)} + \underbrace{0 \int^x \frac{dt}{3+t^2}}_{g_2(x)}$$

$g_1(x) = 0 \int^{-x} \frac{dt}{3+t^2}$; se $u = -x$, $g_1(u) = 0 \int^u \frac{dt}{3+t^2}$
Regra da cadeia

Logo, $g'_1(x) = \frac{d}{dx} g_1(x) = \frac{dg_1}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{3+u^2} (-1) = \frac{1}{3+x^2}$

$g_2(x) = 0 \int^x \frac{dt}{3+t^2} \Rightarrow g'_2(x) = \frac{1}{3+x^2}$

Portanto, $g'(x) = g'_1(x) + g'_2(x) = \frac{1}{3+x^2} + \frac{1}{3+x^2} = \frac{2}{3+x^2}$

ALICHO
IMPROVAVEL

TEOREMA 2: Se $F(x)$ é uma antiderivada da função contínua $f(x)$, então vale

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Aparentação como
 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

OBS.: Adotaremos a notação

$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \left[F(x) \right]_a^b$

DEM.: Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. Pelo teorema 1, a

função $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ é também uma antiderivada de $f(x)$. *já que*

Então, eles diferem por uma constante, isto é,

$g'(x) = f(x)$

$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad \forall x$

Se $x = a$, $\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$, ou

$0 = F(a) + C \quad \text{e} \quad C = -F(a)$

Logo, $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. (válido p/ $x \neq a$)

Pondo $x = b$, obtemos a fórmula de Newton-Leibniz (por analogia)

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

ou mudando a variável de integração por x ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{EXEMPLOS: a) } \int_1^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = 0 - (-1 + 1) = 0$$

$$\text{c) } \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx &= \int_{1/2}^4 x^3 dx - 6 \int_{1/2}^4 x^2 dx + \\ &+ 9 \int_{1/2}^4 x dx + \int_{1/2}^4 1 dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 9 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_{1/2}^4 = \\ &= (64 - 128 + 72 + 4) - \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{679}{64} = 10,609375 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \int_{-3}^4 |x + 2| dx$$

Escrevemos $f(x) = |x + 2|$ como $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{se } x < -2 \end{cases}$

Aplicando o teorema 6, seção 3.2, temos

$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 |x + 2| dx &= \int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx + \int_{-2}^4 (x + 2) dx = \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^4 = \frac{1}{2} + 18 = \frac{37}{2} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 1: Quando utilizamos a técnica de substituição em integrais definidas, mudando a variável de x para $u = g(x)$, por exemplo, devemos, não apenas mudar o integrando como fizemos para uma integral indefinida, mas também devemos mudar os limites de integração de modo que a integral assuma a forma $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$.

EXEMPLOS: a) $\int_0^1 x \sqrt{9 - 5x^2} dx$

Fazendo a mudança de variável $u = 9 - 5x^2$, temos

$$du = -10x dx \quad \text{ou} \quad x dx = -\frac{1}{10} du.$$

Também, se $x = 0$, $u = 9$ e

se $x = 1$, $u = 4$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{9 - 5x^2} dx &= \int_9^4 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{10}\right) du = -\frac{1}{10} \int_9^4 \sqrt{u} du = \\ &= \frac{1}{10} \int_4^9 u^{1/2} du = \frac{1}{10} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_4^9 = \frac{1}{15} [9^{3/2} - 4^{3/2}] = \frac{19}{15} \end{aligned}$$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$

Fazendo a substituição $t = \cos x$, temos

$$dt = -\sin x dx, \quad \sin x dx = -dt.$$

Além disso, se $x = 0$, $t = \cos 0 = 1$ e

$$\text{se } x = \frac{\pi}{2}, \quad t = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx &= \int_1^0 -t^2 dt = -\int_1^0 t^2 dt = -\left[\frac{t^3}{3} \right]_1^0 = \\ &= -\left(0 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 2: A integração por partes de integrais definidas é semelhante ao caso já visto em integrais indefinidas:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

EXEMPLO: Use a integração por partes para calcular $\int_1^e x^2 Lx dx$.

Fazendo $u = Lx$ e $dv = x^2 dx$, temos

$$du = \frac{dx}{x} \quad \text{e} \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 Lx dx &= Lx \frac{x^3}{3} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 3.3.

1. Ache as derivadas das seguintes funções:

a) $g(x) = \int_1^x Lt dt \quad (x > 0)$

b) $g(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$

c) $g(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$

2. Ache os pontos de extremo da função

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{na região} \quad x > 0.$$

3. Calcule as integrais:

a) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$

b) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$

$$c) \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$$

$$d) \int_2^6 \sqrt{x-2} dx$$

$$e) \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$$

$$f) \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$$

$$g) \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2}$$

$$h) \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$i) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$j) \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l) \int e^{2x} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$m) \int_1^e \frac{\sin(Lx)}{x} dx$$

$$n) \int_0^3 |3-x^2| dx$$

$$o) \int_1^{32} \frac{1 + \sqrt[5]{t^2}}{\sqrt[3]{t}} dt$$

$$p) \int_0^1 \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+2}} dx$$

$$q) \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$r) \int_0^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

improprias pois não
são definidas em $x=0$ e $x=1$ (integ.)

4. Calcular os valores das integrais seguintes, aplicando as substituições indicadas:

$$a) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}; \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$b) \int_1^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{2 + 4x}}; \quad 2 + 4x = t^2$$

$$c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}; \quad x = \operatorname{tg} t$$

$$d) \int_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z \sqrt{z^2 + 1}}; \quad z = \frac{1}{x}$$

$$e) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}; \quad \sin x = t$$

5. a) Seja f contínua em $[-a, a]$. Se f é uma função par, mostre que $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$ e interprete o resultado geometricamente.

b) Seja f contínua em $[-a, a]$. Se f é uma função ímpar, mostre que $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$ e interprete o resultado geometricamente.

6. Aplicando a fórmula para integração por partes, calcule as seguintes integrais:

$$a) \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

$$b) \int_1^e Lx \, dx$$

$$c) \int_0^1 x^3 e^{2x} \, dx$$

$$d) \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

CAPÍTULO 4 - INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

4.1. INTEGRAIS COM LIMITES DE INTEGRAÇÃO INFINITOS

Como exemplo inicial, considere a região R sob o gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, à direita de $x = 1$ (Figura 1.a).

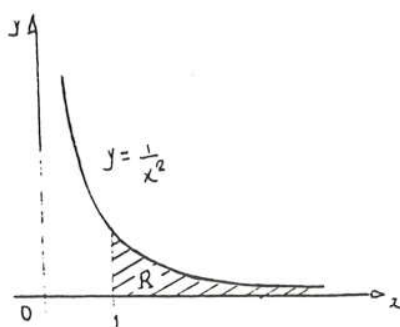


Fig 1.a

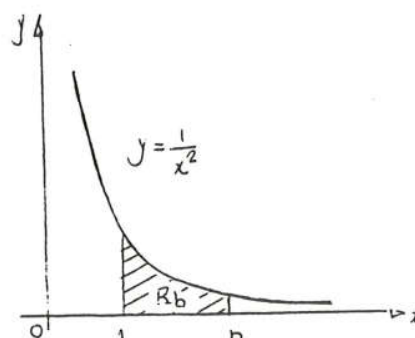


Fig 1.b

Note que a região R se estende indefinidamente para a direita, sendo, portanto, ilimitada.

Seja, agora, R_b a região limitada sob o gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ entre $x = 1$ e $x = b$ (Figura 1.b). A área de

R_b é dada por:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

(Handwritten note: $-\frac{1}{b} - (-\frac{1}{1}) = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$)

Para valores muito grandes de b , a região limitada R_b pode ser considerada como uma boa aproximação da região ilimitada R . De fato, pode-se esperar que:

$$\text{Área de } R = \lim_{b \rightarrow \infty} (\text{Área de } R_b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$$

De modo geral temos a definição:

DEFINIÇÃO: Se existe um limite finito



$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

então este limite é chamado a integral imprópria da função $f(x)$ no intervalo $[a, +\infty)$ e é denotado pelo símbolo $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Então, por definição,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

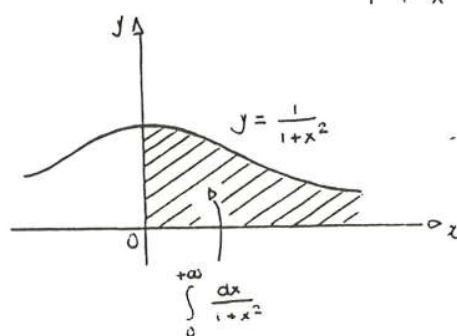
Neste caso, é dito que a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge. Em caso contrário, ela é dita divergente.

Similarmente, definimos as integrais impróprias de outros intervalos infinitos:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

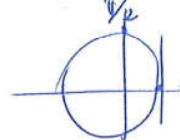
EXEMPLOS: a) Calcule a integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$



$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1+x^2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) &= 1 \\ \text{de } x=0, y=1 & \\ (\text{não tem A.V.}) & \end{aligned}$$

Pela definição de integral imprópria,

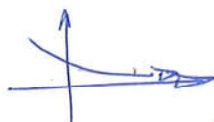
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$y = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x \rightarrow \text{fc exp. com } \frac{1}{e} < 1, \text{ logo, decrescente}$$

53.

$$b) \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left. -e^{-x} \right|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-e^0 - (-e^{-a})) = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^{-a} - 1) = +\infty \end{aligned}$$

Logo, $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$ é divergente.

Em muitos casos, é suficiente determinarmos se uma dada integral converge ou diverge, e estimarmos seu valor. Os seguintes teoremas serão úteis nestes casos:

TEOREMA 1: Se para todo x ($x \geq a$) a desigualdade $0 \leq f(x) \leq g(x)$ é válida e se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ também converge e $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$.

EXEMPLO: Investigue a integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \quad \text{quanto à convergência.}$$

Temos que, se $1 \leq x$,

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \quad (\text{ver exemplo inicial})$$

Conseqüentemente, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ converge e seu valor é menor que 1.

TEOREMA 2: Se para todo x ($x \geq a$) é válida a desigualdade $0 \leq g(x) \leq f(x)$ e se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ também diverge.

EXEMPLO: Verifique se a seguinte integral converge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx.$$



Notamos que $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Mas, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = +\infty$ e conseqüente

Handwritten notes: $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\sqrt{x}}{1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{1}) = +\infty$

mente, a integral dada também diverge.

Nos dois teoremas, consideramos integrais impróprias de funções não-negativas. Para o caso de uma função $f(x)$ que muda de sinal num intervalo infinito, temos o seguinte teorema:

TEOREMA 3: Se a integral $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, então a integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ também converge.

EXEMPLO: Investigue a convergência da integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx.$$

Aqui, o integrando é uma função que assume valores positivos e negativos. Notamos que

Handwritten notes: $\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|$ (since $|\sin x| \leq 1$)

Handwritten notes: $\int_1^b \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

Mas, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

Portanto, a integral $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ converge

e a integral dada também.

EXERCÍCIOS 4.1.

1. Calcule as integrais impróprias (ou estabeleça sua divergência)

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

$$d) \int_0^{+\infty} x \sin x \, dx$$

$$e) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$f) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$g) \int_0^{+\infty} Lx \, dx$$

$$h) \int_1^{\infty} 2^{-x} \, dx$$

$$i) \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$$

$$j) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx$$

$$l) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16 + x^2}$$

2. Teste a convergência das seguintes integrais:

NÃO a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}$

$$b) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$$

NÃO c) $\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$

4.2. INTEGRAIS COM INTEGRANDOS INFINITOS

Como exemplo inicial, considere a região ilimi-



tada R sob a curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ à direita do eixo y e à esquerda da reta vertical $x = 9$ (Figura 1.a).

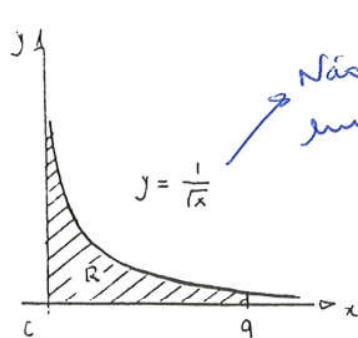


Fig. 1.a

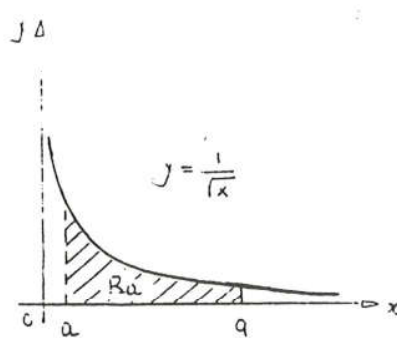


Fig. 1.b

Uma aproximação para essa região ilimitada R é fornecida pela região limitada R_a sob a curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre $x = a$ e $x = 9$, sendo a um número positivo pequeno (Figura 1.b).

Quando $a \rightarrow 0^+$, R_a se aproxima de R e escrevemos $R = \lim_{a \rightarrow 0^+} R_a$. De um modo geral, temos a definição:

DEFINIÇÃO: Suponha a função f definida no intervalo $(a, b]$ e integrável em todo intervalo da forma $[a + c, b]$. Então, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{a+c}^b f(x) dx$$

Se $\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{a+c}^b f(x) dx$ existe e é finito, dizemos

que a integral imprópria $\int_a^b f(x) dx$ é convergente; caso contrário, ela é dita divergente.

De forma análoga,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_a^{b-c} f(x) dx$$

Qualquer a int. pode ser impropria se o limite não existir e não houver a/ qdo ele é infinito

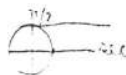
no caso em que $f(b)$ não é definido e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

no caso em que $f(c)$ não é definido, $a < c < b$.

EXEMPLOS:

a) Calcule $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$



$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ não definido quando $\cos x = 0$ ou seja,

$$x = \arccos \frac{0}{1} = \frac{\pi}{2}$$

A integral é imprópria porque o integrando não é definido no limite superior $\frac{\pi}{2}$. Assim,

$$\int_0^{\pi/2} \sec x dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi/2 - c} \sec x dx =$$

$$= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[L |\sec x + \operatorname{tg} x| \Big|_0^{\pi/2 - c} \right] =$$

$$= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left\{ L \left| \sec \left(\frac{\pi}{2} - c \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - c \right) \right| - L |\sec 0 + \operatorname{tg} 0| \right\} = +\infty, \text{ pois}$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \sec \left(\frac{\pi}{2} - c \right) = +\infty \text{ e } \lim_{c \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - c \right) = +\infty$$

Portanto, a integral imprópria é divergente.

b) Calcule $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

O integrando não é definido em $x = 3$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_0^{3-c} \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = -\lim_{c \rightarrow 0^+} \left[2 \sqrt{3-x} \right]_0^{3-c} = \\ &= -\lim_{c \rightarrow 0^+} (2\sqrt{c} - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Para determinar a convergência de integrais im

próprias com integrandos infinitos, usa-se frequentemente teoremas similares aos citados na seção anterior:

TEOREMA 1: Se no intervalo $[a, c]$ as funções $f(x)$ e $g(x)$

não são definidas em c e em todos os pontos do intervalo é válida a desigualdade $g(x) \geq f(x) \geq 0$, e $\int_a^c g(x) dx$ converge, então $\int_a^c f(x) dx$ também converge.

TEOREMA 2: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções não definidas em c do intervalo $[a, c]$. Se é válida a desigualdade $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\int_a^c g(x) dx$ diverge, então $\int_a^c f(x) dx$ também diverge.

TEOREMA 3: Seja $f(x)$ definida em $[a, c]$, descontínua apenas no ponto c . Se a integral imprópria $\int_a^c |f(x)| dx$ converge, então a integral $\int_a^c f(x) dx$ também converge.

EXERCÍCIOS 4.2.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

a) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int_0^1 Lx dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$

f) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x Lx}$

g) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$

h) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em a . Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

TEOREMA 1.1 (Critério de Continuidade). Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então, f é contínua em a se, e somente se, para qualquer sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow a$, temos $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Exemplo 1.1. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é contínua em a . De fato, seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow a$. Então, $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow a^2 = f(a)$.

Exercício 1.1. Prove que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ é contínua em a .

$$\begin{array}{r} 12 \\ 45 \overline{) 540} \\ \underline{45} \\ 90 \\ \underline{90} \\ 0 \end{array}$$

$$i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$j) -\sqrt{3} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$$



CAPÍTULO 5 - FUNÇÕES GAMA E BETA

5.1. FUNÇÃO GAMA

DEFINIÇÃO: Seja $\alpha > 0$. A integral imprópria convergente

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ é chamada função gama.

PROPRIEDADES:

a) $\Gamma(1) = 1$

DEMONSTRAÇÃO: Por definição,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-b} + 1] = 1\end{aligned}$$

b) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha+1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^{\alpha} e^{-x} dx\end{aligned}$$

Fazendo $u = x^{\alpha}$ e $dv = e^{-x} dx$, temos

$du = \alpha x^{\alpha-1} dx$ e $v = -e^{-x}$ e, integrando partes,

$$\begin{aligned}\int_0^b x^{\alpha} e^{-x} dx &= -x^{\alpha} \cdot e^{-x} \Big|_0^b + \alpha \int_0^b e^{-x} x^{\alpha-1} dx = -\frac{b^{\alpha}}{e^b} + \\ &+ \alpha \int_0^b x^{\alpha-1} e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{\alpha}}{e^b} = 0$ (aplicando L'Hospital),

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \alpha \int_0^b x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \\ &= \alpha \cdot \Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

c) $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO: (A rigor, deveríamos usar a indução matemática). Basta observar que

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

⋮

OBSERVAÇÃO: Mostraremos adiante que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

EXEMPLOS:

a) Calcule $\Gamma(6)$

$$\Gamma(6) = 5! = 120$$

b) Calcule $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ $\frac{5}{2} = \alpha + 1$; $\alpha = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

c) Calcule $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx$ $\frac{3}{2} = \alpha + 1$; $\alpha = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx = \Gamma(5) = 4! = 24$$

d) Calcule $\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$

Fazendo a substituição $x = \frac{t}{2}$, temos

$$dx = \frac{1}{2} dt, \text{ e se } x = 0, \quad t = 0$$

$$x \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty$$

$$\text{Logo, } \int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^6 \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2^7} \int_0^{\infty} t^6 e^{-t} dt = \frac{1}{2^7} \cdot \Gamma(7) = \frac{6!}{2^7}$$

EXERCÍCIOS 5.1.

1. Resolver:

a) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-(x/3)} dx$

b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-(\sqrt{x}/2)} dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

e) $\int_0^1 \frac{x e^{(-x/(1-x))}}{(1-x)^3} dx$

f) $\int_0^{\pi/2} \sec^3 x \operatorname{tg} x \cdot e^{1-\sec x} dx$

g) $\int_{1/2}^{\infty} \frac{[L(2x)]^3 \cdot e^{-L(2x)}}{x} dx$

h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-[(x-m)^2/2\sigma^2]} dx$ DICA: $y = \frac{x-m}{\sigma \sqrt{2}}$

2. Calcular a integral

$$\int_1^{\infty} (Lu)^{3/2} u^{-2} du \quad \text{pela substituição } u = e^x.$$

5.2. FUNÇÃO BETA

DEFINIÇÃO: A função beta é definida por

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad m > 0, \quad n > 0.$$

Importante Se $m \geq 1$ e $n \geq 1$, a integral é própria.Se $m > 0$ e $n > 0$ e ou $m < 1$ ou $n < 1$, a integral é imprópria, mas convergente.*pois x e $(1-x)$ estarão no denominador, e como a integral é definida no intervalo $[0, 1]$ poderemos ter problemas no denominador.*

PROPRIEDADES:

$$a) B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m > 0, \quad n > 0.$$

$$b) B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} t \cos^{2n-1} t \, dt$$

DEM.: Faça a substituição

$$x = \sin^2 t, \quad dx = 2 \sin t \cos t \, dt$$

$$\text{Então,} \quad x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad e$$

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)^{m-1} \cdot$$

$$(1 - \sin^2 t)^{n-1} 2 \sin t \cos t \, dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} t \cos^{2n-1} t \, dt$$

$$c) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2} t \cos^{2n-2} t \sin t \cos t \, dt$$

DEM.: Da propriedade a,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad (1)$$

Da propriedade b,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} t \cos^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} t \, dt = 2 \int_0^{\pi/2} dt =$$

$$= 2 \frac{\pi}{2} = \pi. \quad (2)$$

Igualando (1) e (2), temos

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \quad e, \text{ portanto,} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

EXEMPLOS:

$$a) \text{ Calcule } \int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$$



$$\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx = B(5, 4) = \frac{\Gamma(5) \Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4! \cdot 3!}{8!}$$

b) Calcule $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$

Se $x = 2t$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$ e $dx = 2 dt$
 $x = 2 \Rightarrow t = 1$

Logo,

$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}} = \int_0^1 \frac{4t^2 \cdot 2dt}{\sqrt{2-2t}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \int_0^1 t^2 (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot B\left(3, \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{2}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{64 \sqrt{2}}{15}$$

c) Obter $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x dx$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x dx = \frac{1}{2} B\left(2, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(2) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{2}{35} \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}$$

$2m-1=3 \Rightarrow m=2$
 $2n-1=4 \Rightarrow n=5/2$

EXERCÍCIOS 5.2.

1. Resolver as integrais:

a) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$

b) $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

d) $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)^3} dx$

e) $\int_0^3 x^4 \sqrt{9-x^2} dx$

$\frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{105}{16} \sqrt{\pi}$

$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{105}{16} \sqrt{\pi}$

$$f) \int_1^e \frac{(Lx)^4 (1 - Lx)}{5x} dx$$

$$g) \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$$

$$h) \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x \cos^5 2x \, dx$$

$$i) \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \, dx$$

$$j) \int_0^{\pi/2a} \cos^2 ax \, dx \quad (a \neq 0)$$

$$l) 2 \int_0^{\pi/3} \sin^4 \frac{3x}{2} \cos^2 \frac{3x}{2} \, dx$$

2. Calcular as integrais utilizando as substituições indicadas:

$$a) \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2} + x \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x \right)^{3/2} dx, \quad t = \frac{1}{2} + x$$

$$b) \int_{1/5}^{2/5} (5x - 1)^{1/2} (2 - 5x)^{3/2} dx, \quad x = \frac{u + 1}{5}$$

CAPÍTULO 6 - APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

6.1. ÁREAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Já vimos que se f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então a área sob o gráfico de f de a até b é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{Figura 1})$$

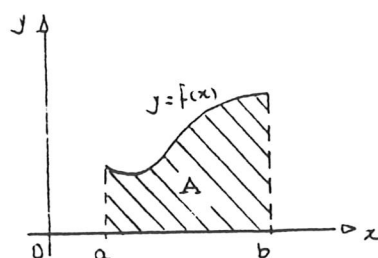


Fig. 1

Se $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, então a área da região limitada pelo eixo x e o gráfico de f , entre a e b , é dada por

$$A = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{Figura 2})$$

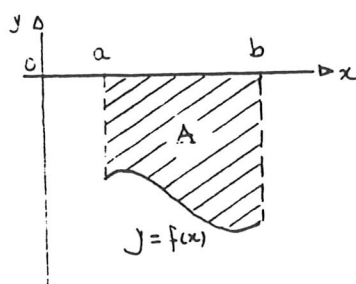


Fig. 2

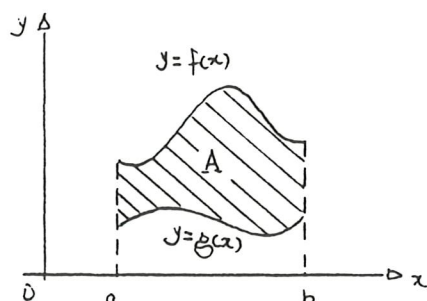
Se f muda de sinal em $[a, b]$ um número finito de vezes, escreva a área A como soma finita de áreas, conforme haja mudança de sinal da função (usando as observações acima).

intersecção = interseção

67.

Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, então a área A da região delimitada pelos gráficos de f , g , $x = a$ e $x = b$ é dada por:

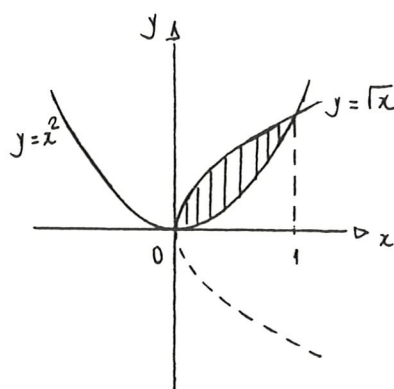
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{Figura 3})$$



EXEMPLOS:

Fig 3

a) Determine a área da região limitada pelos gráficos das equações $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Os pontos de interseção das curvas são:

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Logo,

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} u^2$$

unidades ao quadrado

$\Rightarrow \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - 0 + 0 \right] = \frac{11}{3}$

b) Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y = x+6$,

$$y = x^3 \text{ e } y = -\frac{x}{2}$$

Mathematics - Geometry

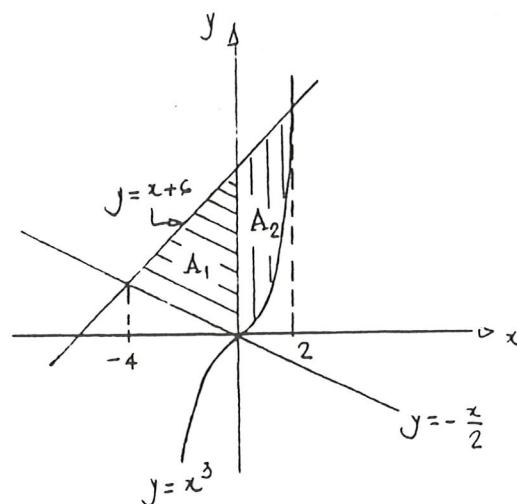
1. A circle with center O and radius 5 cm. A chord AB is drawn such that the distance from the center O to the chord AB is 3 cm. Find the length of the chord AB.



2. A right-angled triangle ABC, where the right angle is at vertex C. The side AC = 6 cm and the side BC = 8 cm. Find the length of the hypotenuse AB.



3. A circle with center O and radius 10 cm. A chord AB is drawn such that the distance from the center O to the chord AB is 6 cm. Find the length of the chord AB.



Pontos de intersecção:

$$x + 6 = x^3 \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x + 6 = -\frac{x}{2} \Rightarrow 2x + 12 = -x \Rightarrow x = -4$$

ITERAÇÕES

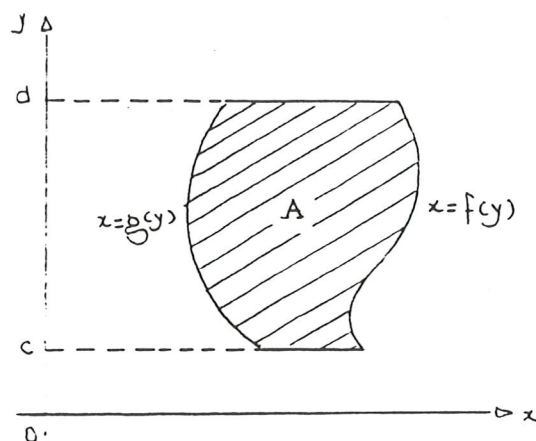
x	$y = x^3$	$y = -\frac{x}{2}$
-4	-64	2
2	8	-1
3	27	-1.5

$$\begin{aligned} \text{Logo, } A &= A_1 + A_2 = -4 \int_0^2 \left(x + 6 + \frac{x}{2} \right) dx + \int_0^2 (x + 6 - x^3) dx = \int_{-4}^0 \left(\frac{3}{2}x + 6 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} -4 \int_0^2 (3x + 12) dx + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{2} + 6x \right)_{-4}^0 + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[3 \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-4}^0 + 2 + 12 - 4 = -12 + 24 + 10 = 22 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Às vezes, é preciso determinar a área A de uma região delimitada pelos gráficos de $y = c$ e $y = d$ e de duas equações da forma $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com $f(y) \geq g(y)$ $\forall y \in [c, d]$. De modo análogo ao que acabamos de ver

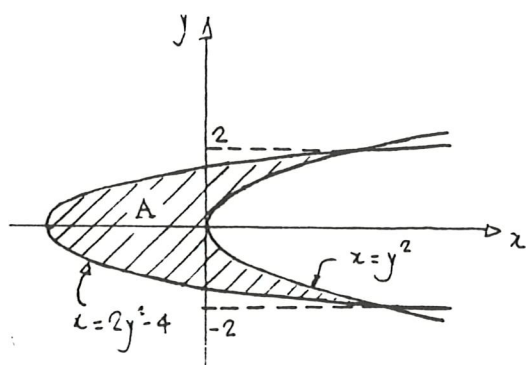
$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$, onde agora y é considerado a variável independente.





EXEMPLO:

Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das equações $2y^2 = x + 4$ e $x = y^2$. *(Proceder de forma análoga, mas com eixo x, hehehe)*



$$\begin{aligned} 2y^2 &= x + 4 \\ x &= 2y^2 - 4 \\ \text{para } 2y^2 - 4 &= 0 \\ 2y^2 &= 4 \\ y^2 &= 2 \\ y &= \pm \sqrt{2} \\ \text{Se } y &= 0, x = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= y^2 \\ \downarrow \text{para } (y, x) \\ \text{em } (0, 0) \\ (1, 1) \\ (-1, 1) \end{aligned}$$

Intersecções:

$$2y^2 - 4 = y^2 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } A &= \int_{-2}^2 [y^2 - (2y^2 - 4)] dy = \\ &= \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Handwritten calculation: $\left[8 - \frac{8}{3} - (-8) + \left(-\frac{8}{3}\right) \right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}$

EXERCÍCIOS 6.1.

1. Calcular a área compreendida entre a curva



Handwritten notes in cursive script, mostly illegible due to fading. The text is organized into several lines and paragraphs, with some words appearing to be mathematical or scientific in nature. There are also some small, faint diagrams interspersed with the text.

Handwritten notes in cursive script, continuing from the previous section. The text is also mostly illegible due to fading. There are some small, faint diagrams interspersed with the text.

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 3 \\ 8 - \frac{2}{3}x, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

e o eixo das abscissas.

2. Calcular a área delimitada pelas curvas:

a) $y = 3x^2 + 2$; $y = 0$; $x = -2$ e $x = 1$.

b) $y = x^3$; $y = 8$ e $x = 0$

c) $y^2 = 9x$; $y = 3x$

d) $y = x^2 - 3x + 2$; $y = -x^2 + x + 2$

e) $y = 4 - x^2$; $y = 0$

f) $y = \frac{a^2}{x}$; $x = \frac{a}{2}$; $x = a$ e $y = 0$

g) $y = x^2 - 6x + 8$; $y = x + 2$

3. Calcular a área do segmento de círculo de equação

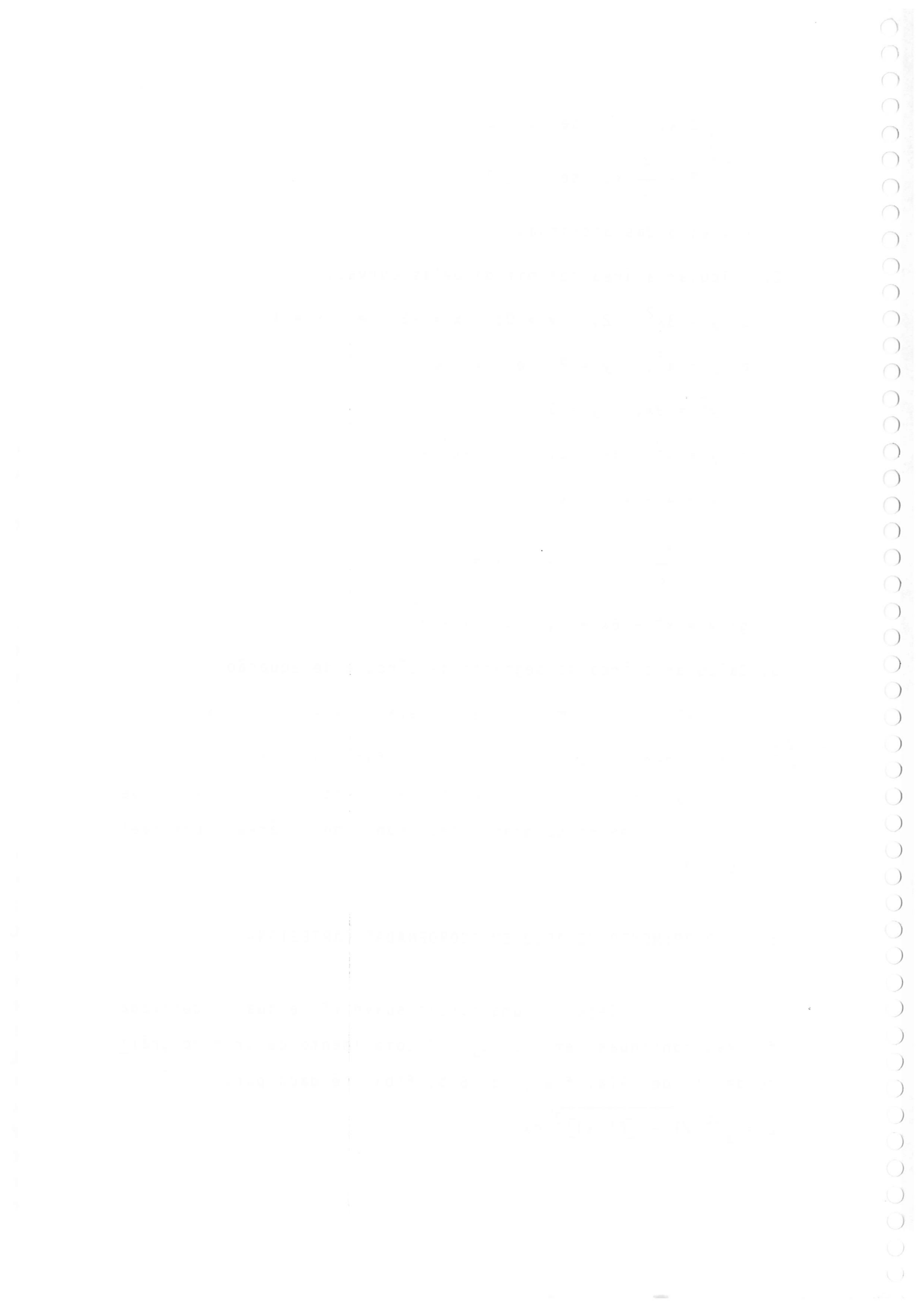
$y^2 + x^2 = 36$ limitado pelas retas $x = 0$ e $x = 3$.

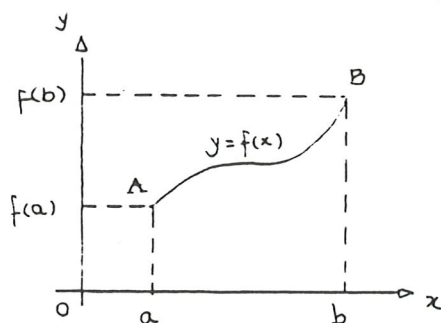
4. Determinar a equação do membro da família de curvas dadas por $y = a - bx^2$ que passam pelo ponto $(1, 1)$ e que corta o primeiro quadrante fechando a menor área possível ($b > 0$).

6.2. COMPRIMENTO DE ARCO EM COORDENADAS CARTESIANAS

Seja f uma função suave (f e sua derivada f' são contínuas) em $[a, b]$. O comprimento de arco do gráfico de f de $A(a, f(a))$ a $B(b, f(b))$ é dado por:

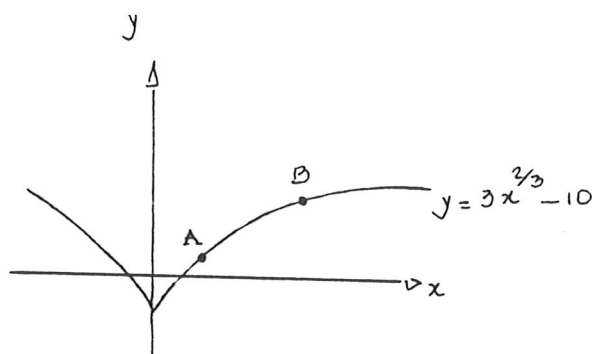
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$





EXEMPLOS:

- a) Se $f(x) = 3x^{2/3} - 10$, determine o comprimento do arco do gráfico de f do ponto $A(8, 2)$ ao ponto $B(27, 17)$.



Como $f'(x) = 2x^{-(1/3)} = \frac{2}{x^{1/3}}$, temos

$$L = \int_8^{27} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x^{1/3}}\right)^2} dx = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{2/3}}} dx =$$

$$= \int_8^{27} \frac{\sqrt{x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}} dx.$$

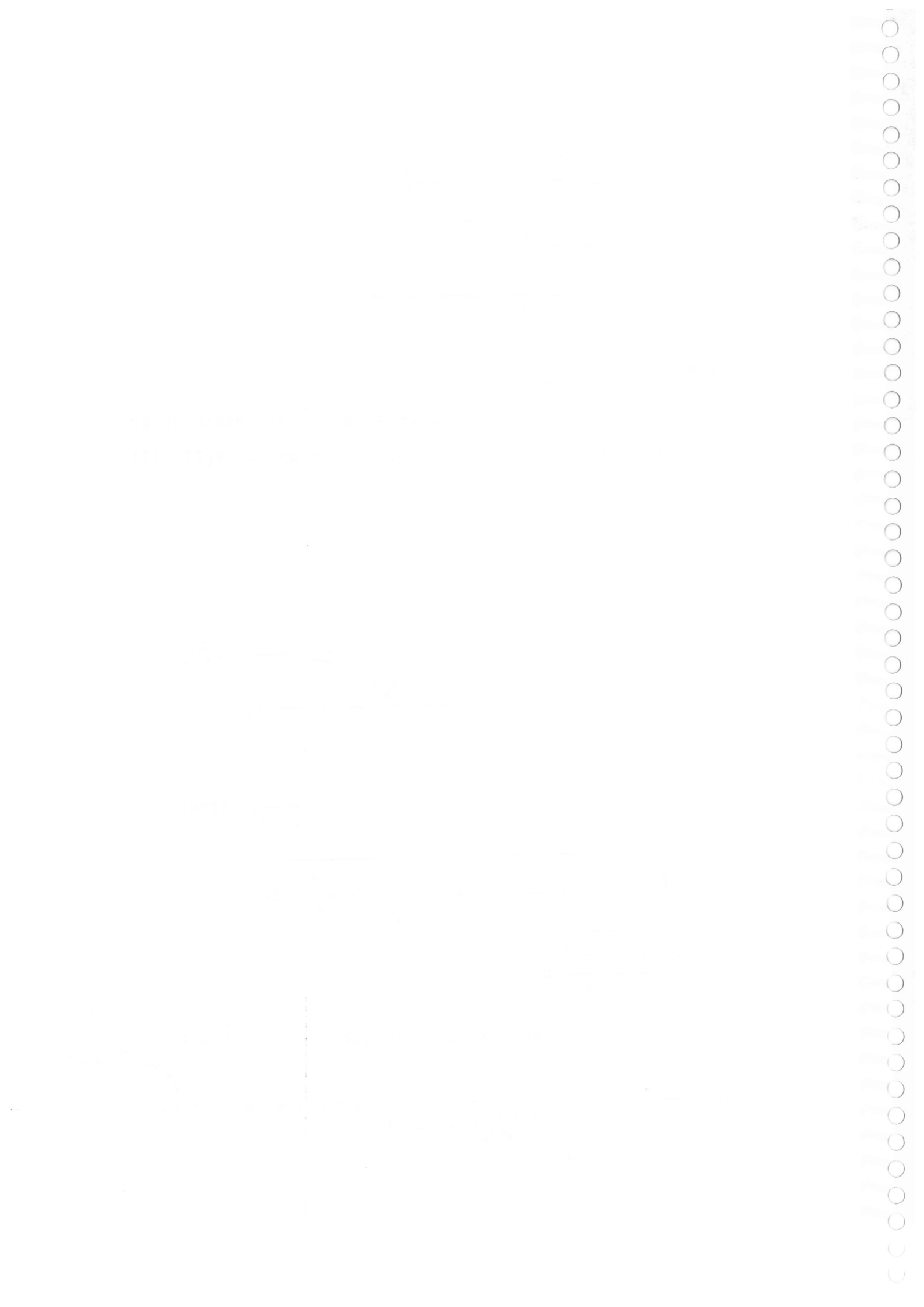
Fazendo a substituição $u = x^{2/3} + 4$,

$$du = \frac{2}{3} x^{-(1/3)} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} dx, \text{ temos que se } x = 8, \quad u = 8$$

e se $x = 27$, $u = 13$. Assim,

$u = (2^3)^{2/3} + 4 = 4 + 4 = 8$

$u = (3^3)^{2/3} + 4 = 9 + 4 = 13$



$$L = \frac{3}{2} \int_8^{13} \sqrt{u} \, du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_8^{13} = \frac{2}{3} (13^{3/2} - 8^{3/2}) \approx 24,2 \, u$$

b) Determine o comprimento da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$

Vamos achar o comprimento da quarta parte da circunferência

(1º quadrante), de equação

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{Logo } y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Temos } y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Logo, } \frac{1}{4} L = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \int_0^r \frac{r \, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Portanto, } L = 2\pi r \, u = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi r$$

EXERCÍCIOS 6.2.

1. Pesquisar na bibliografia a demonstração da fórmula vista nesta seção.

2. Achar o comprimento dos arcos de curvas dados pelas equações que se seguem e de conformidade com os intervalos considerados:

a) $y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2}, \quad x \in [0, 3]$

b) $9y = 4x^3, \quad x \in [0, 3]$

c) $y = 3x, \quad x \in [2, 6]$

d) $y = -\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} L |x + \sqrt{x^2 - 1}|, \quad x \in [1, 3]$

e) $y = Lx, \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

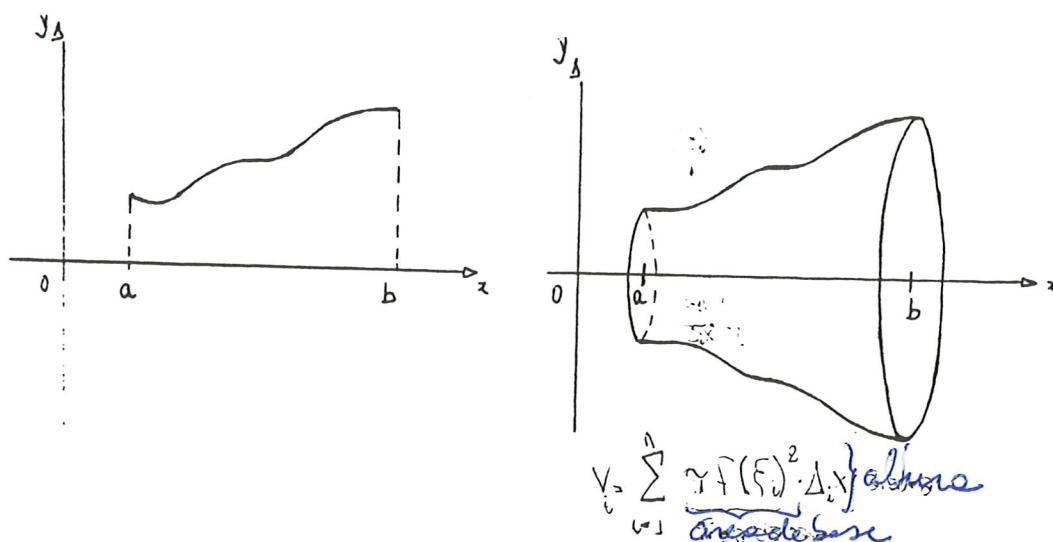
f) $y = 4 \int^x \sqrt{t - 1} \, dt, \quad x \in [4, 9]$



$$g) y = \int_0^x t \sqrt{t^2 + 2} dt, \quad x \in [0, 2]$$

6.3. VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS

Fazendo-se uma região plana girar em torno de uma reta do plano, o sólido resultante é chamado sólido de revolução. A reta em torno da qual se processa a revolução é chamada eixo de revolução.



Seja f contínua em $[a, b]$. O volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos de f , de $x = a$, de $x = b$ e do eixo x é dado por

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f(\xi_i)^2 \Delta x$$

EXEMPLOS:

- a) Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x , da região sob o gráfico de f de -1 a 1 .

Page 1 of 1

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

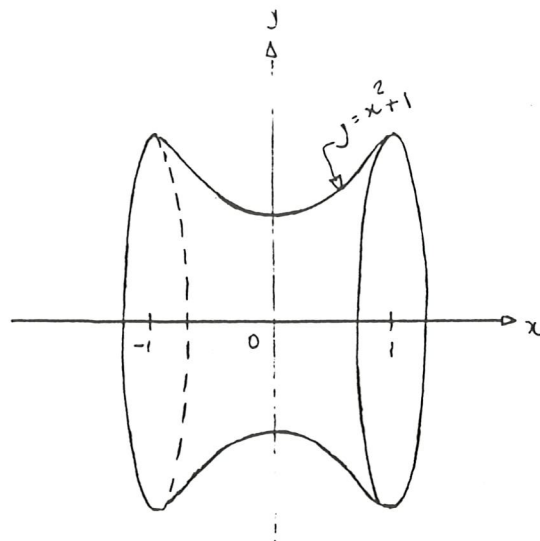
2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

2000-01-01 to 2000-01-01

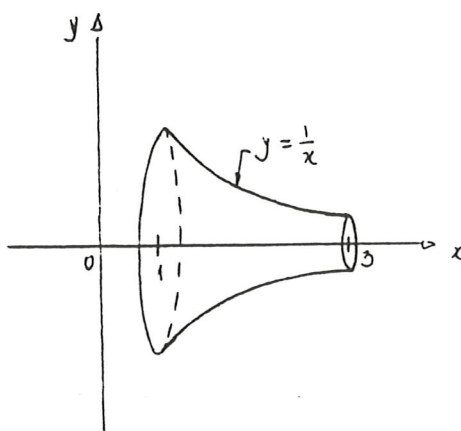
2000-01-01 to 2000-01-01



Temos $V = \int_{-1}^1 \pi (x^2 + 1)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{56\pi}{15}$

Handwritten calculation: $\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \pi \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) = \pi \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + 2 \right) = \pi \left(\frac{3+10+15}{15} \right) = \pi \left(\frac{28}{15} \right)$

b) Idem, $f(x) = \frac{1}{x}$, de 1 a 3

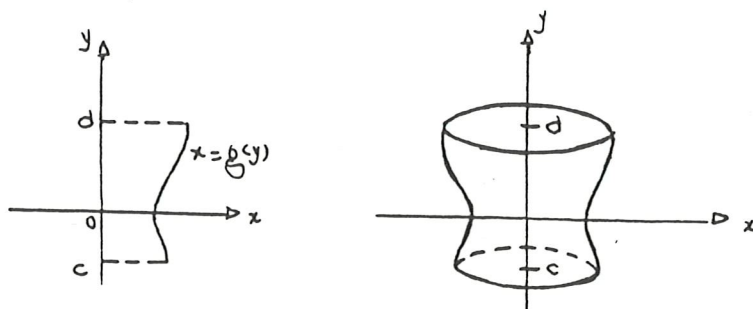


Temos $V = \int_1^3 \pi \frac{1}{x^2} dx = \pi \int_1^3 x^{-2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = \frac{2\pi}{3}$

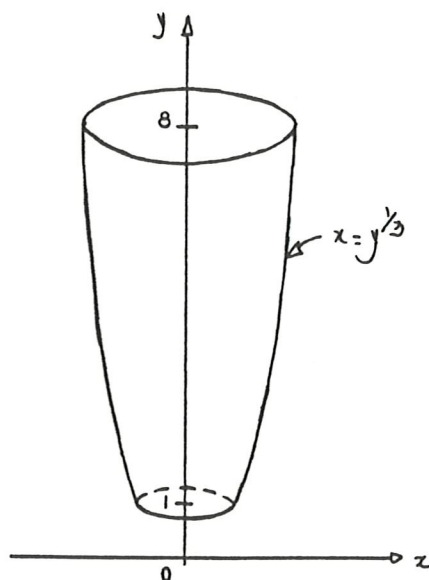
Handwritten calculation: $\pi \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \pi \left(\frac{2}{3} \right)$

De igual modo, se $x = g(y)$ é contínua em $[c, d]$, o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos de g , de $y = c$, de $y = d$ e do eixo y é dado por

$$V = \int_c^d \pi [g(y)]^2 dy$$



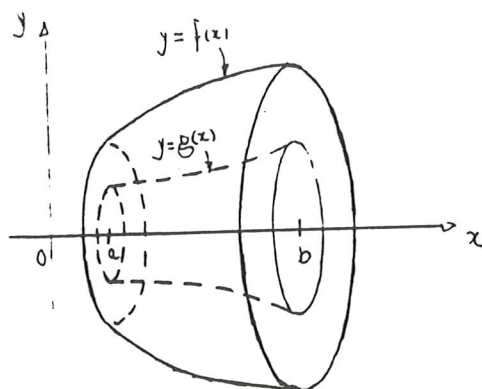
EXEMPLO: Faz-se girar em torno do eixo y a região limitada pelo referido eixo e pelos gráficos de $y = x^3$, $y = 1$ e $y = 8$. Calcular o volume do sólido assim gerado.



Temos $x = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } V &= \int_1^8 \pi (y^{1/3})^2 dy = \pi \int_1^8 y^{2/3} dy = \pi \left. \frac{y^{5/3}}{\frac{5}{3}} \right|_1^8 = \frac{3\pi}{5} \left. y^{5/3} \right|_1^8 \\ &= \frac{93}{5} \pi \quad \begin{aligned} &= \frac{3\pi}{5} (8^{5/3} - 1^{5/3}) \\ &= \frac{3\pi}{5} (2^5 - 1) = \frac{3\pi}{5} (32 - 1) = \frac{93\pi}{5} \end{aligned} \end{aligned}$$

Consideremos, agora, uma região limitada pelos gráficos de $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos de duas funções contínuas f e g , com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ $x \in [a, b]$. Fazendo-se esta região girar em torno do eixo x , obtêm-se um sólido como o ilustrado a seguir:

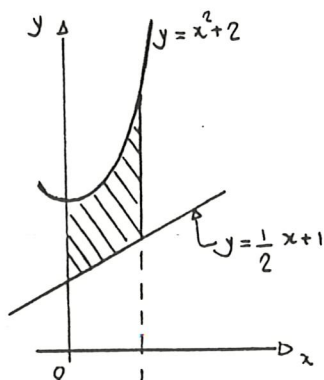


Pode-se obter o volume V do sólido subtraindo-se do volume gerado pela região maior, o volume gerado pela região menor, ou seja,

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx - \int_a^b \pi [g(x)]^2 dx =$$

$$= \int_a^b \pi \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

EXEMPLO: Faz-se girar em torno do eixo x a região limitada pelos gráficos de $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$. Determinar o volume do sólido resultante.



$$V = \int_0^1 \pi \left[(x^2 + 2)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 \right] dx = \int_0^1 \pi \left[x^4 + 4x^2 + 4 - \frac{1}{4}x^2 - x - 1 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \pi \left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3 \right) dx = \frac{79\pi}{20} u^3.$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{15}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 3 \right)$$

$$= \pi \left(\frac{4 + 25 - 10 + 60}{20} \right) = \pi \frac{79}{20} = \frac{79\pi}{20}$$



Step 1: Find the volume of the solid.

The volume of the solid is the volume of the cylinder minus the volume of the cone.

The volume of the cylinder is

$$V_{\text{cylinder}} = \pi r^2 h = \pi (2)^2 (4) = 16\pi$$

The volume of the cone is

EXAMPLE: Find the volume of the solid.

Step 1: Find the volume of the solid.

The volume of the solid is the volume of the cylinder minus the volume of the cone.



$$V_{\text{solid}} = V_{\text{cylinder}} - V_{\text{cone}} = 16\pi - \frac{1}{3}\pi(2)^2(4) = \frac{16}{3}\pi$$



$$V_{\text{solid}} = V_{\text{cylinder}} - V_{\text{cone}} = 16\pi - \frac{1}{3}\pi(2)^2(4) = \frac{16}{3}\pi$$

$$V_{\text{solid}} = \frac{16}{3}\pi$$

EXERCÍCIOS 6.3.

1. Ver na bibliografia a demonstração da fórmula da seção em questão.
2. Determinar o volume de cada um dos sólidos gerados pelas curvas, dadas nas condições que se seguem e girando em torno do eixo das abscissas:
 - a) $y = 3$ $x \in [1, 5]$
 - b) $y = x^2$ $x \in [1, 3]$
 - c) $y^2 = 6x$ $x \in [1, 4]$
 - d) $y = 2 + 3x$ $x \in [0, 3]$
 - e) $y = \sqrt{9 - x^2}$ $x \in [1, 2]$
 - f) $y = \sin x$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
3. Calcular o volume do sólido em cada caso apresentado a seguir, girando o segmento de curva em torno do eixo y .
 - a) $x = 2$ $y \in [0, 4]$
 - b) $y = 2x + 1$ $y \in [1, 5]$
 - c) $y = \sqrt{6x}$ $y \in [0, 6]$
 - d) $y = \arccos x^2$ $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
4. Calcule o volume do sólido gerado pela área delimitada pelas curvas $y = 1 + x^2$ e $y = x + 3$, quando ele gira em torno do eixo x .
5. Seja o gráfico abaixo:





EXERCÍCIO 1

1. O objetivo principal da administração é a obtenção da máxima eficiência na utilização dos recursos disponíveis.

2. A administração é uma ciência que estuda o comportamento humano no trabalho e busca a melhor forma de organizar as atividades para a obtenção dos objetivos da organização.

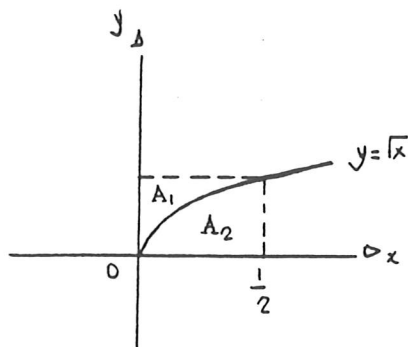


3. A administração é uma atividade que envolve a tomada de decisões e a implementação de planos para a obtenção dos objetivos da organização.



4. A administração é uma ciência que estuda o comportamento humano no trabalho e busca a melhor forma de organizar as atividades para a obtenção dos objetivos da organização.

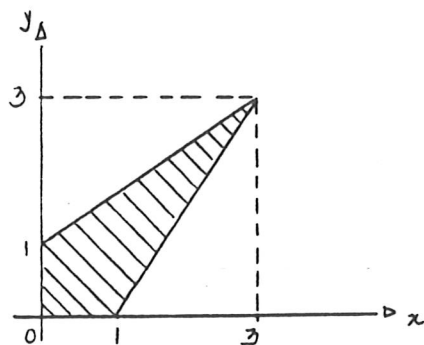
5. A administração é uma ciência que estuda o comportamento humano no trabalho e busca a melhor forma de organizar as atividades para a obtenção dos objetivos da organização.



Calcular os volumes obtidos pela revolução de:

- a) A_2 em torno do eixo x .
- b) A_2 em torno do eixo y .
- c) A_1 em torno do eixo x .
- d) A_1 em torno do eixo y .

6. Calcular o volume do sólido obtido pela revolução da figura abaixo em torno do eixo x :



6.4. COORDENADAS POLARES

A fim de estabelecer um sistema de coordenadas polares no plano, escolhemos um ponto fixo O , chamado polo, e um semi-eixo com origem O denominado eixo polar.



2. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da

curva em torno do eixo x .

3. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da

curva em torno do eixo y .

4. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da

curva em torno do eixo x , considerando a região delimitada pela

curva e o eixo x .

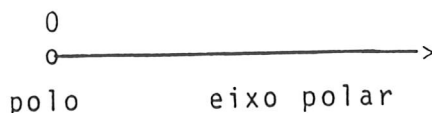


5. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da

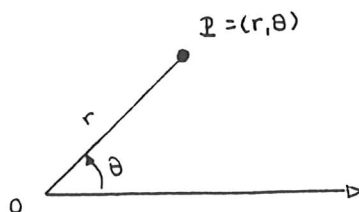
região em torno do eixo x .

6. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da

região em torno do eixo y .



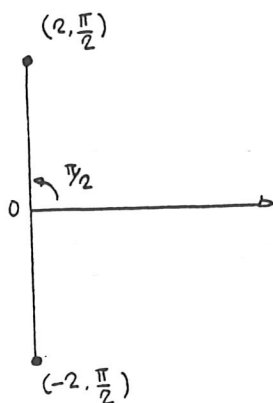
A posição de um ponto P no plano pode ser especificada por dois números: o número r , que expressa a distância de P do polo, e o número θ , que é o ângulo formado pelo segmento OP e o eixo polar. Como de costume, ângulos positivos são medidos no sentido anti-horário.



OBSERVAÇÕES:

- a) É conveniente admitir r negativo, convencionando que o ponto $(-r, \theta)$ está localizado a $|r|$ unidades do polo, mas numa semi-reta oposta a de θ , isto é, $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$.

EXEMPLO:



- b) Ao contrário do sistema de coordenadas cartesianas, um ponto P tem muitas representações diferentes no sistema de coordenadas polares.



2010 10 10

1. O presente documento tem por objetivo informar a todos os interessados sobre a realização do concurso público para o cargo de Auxiliar Administrativo, no âmbito da Prefeitura Municipal de São João del-Rei, Minas Gerais.

2. O edital de abertura do concurso encontra-se disponível no site da Prefeitura Municipal de São João del-Rei, no endereço eletrônico: www.sjodelrei.mg.gov.br.

3. O prazo para inscrição é de 10 (dez) dias, a contar da publicação do edital.

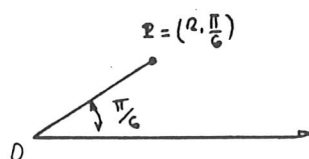
4. O valor da taxa de inscrição é de R\$ 10,00 (dez reais).

5. O candidato deverá apresentar, no ato da inscrição, o seguinte documento: comprovante de pagamento da taxa de inscrição, emitido em nome do candidato.

6. O candidato deverá comparecer ao local de realização da prova no dia 15/10/2010, às 8h00min.

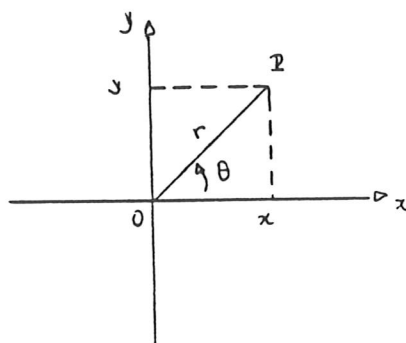
7. O candidato deverá apresentar, no ato da realização da prova, o seguinte documento: carteira de identidade com foto atualizada.

EXEMPLO:



$$P = \left(2, \frac{\pi}{6}\right) = \left(2, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \left(-2, \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi\right)$$

c) Vejamos como as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas retangulares estão relacionadas. Faça a origem do sistema de coordenadas cartesianas coincidir com o polo e a direção positiva do eixo x com o eixo polar.



Temos $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

EXEMPLOS:

a) Converta as coordenadas polares dadas para coordenadas cartesianas:

$$\text{a1) } (4, 30^\circ) \quad \text{a2) } \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{a1) } (x, y) &= (4 \cos 30^\circ, 4 \sin 30^\circ) = \left(4 \frac{\sqrt{3}}{2}, 4 \cdot \frac{1}{2}\right) = \\ &= (2\sqrt{3}, 2). \end{aligned}$$

$$a2) (x, y) = \left(-2 \cos \frac{5\pi}{6}, -2 \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \left(-2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right), -2 \cdot \frac{1}{2} \right) = (\sqrt{3}, -1)$$

b) Converta as coordenadas cartesianas dadas para coordenadas polares com $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$

$$b1) (2, 2)$$

$$b2) (5, -5/\sqrt{3})$$

$$b1) r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \text{tg} \theta = \frac{2}{2} = 1. \quad \text{Como}$$

$$-\pi < \theta \leq \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, as coordenadas polares são $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right)$

$$b2) r = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{10}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \text{tg} \theta = \frac{(-5/\sqrt{3})}{5} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Como } -\pi < \theta \leq \pi, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}.$$

Logo, as coordenadas polares são $\left(10/\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6} \right)$.

6.5. GRÁFICOS POLARES

O gráfico de uma equação polar consiste em todos os pontos P do plano que têm pelo menos um par de coordenadas polares (r, θ) satisfazendo a equação.

O esboço de um gráfico polar pode ser feito através das mesmas técnicas utilizadas ao se esboçar os gráficos cartesianos. É útil encontrar as intersecções do gráfico com o eixo e com algumas semi-retas especiais, como $\theta = \pm(\pi/2)$, $\theta = \pm(\pi/4)$ e assim sucessivamente. A simetria do gráfico pode ser de especial utilidade.



1. O primeiro passo é a identificação dos dados disponíveis para a análise.

2. Em seguida, é necessário estabelecer os objetivos da pesquisa e a metodologia a ser utilizada.

3. A coleta de dados deve ser realizada de forma sistemática e organizada.

4. Após a coleta, os dados devem ser organizados e classificados de acordo com as variáveis de estudo.

5. A análise estatística é realizada para identificar padrões e tendências nos dados.

6. Os resultados da análise devem ser apresentados de forma clara e objetiva, utilizando gráficos e tabelas.

7. Por fim, é necessário interpretar os resultados e tirar conclusões sobre o tema em estudo.

8. A conclusão deve ser baseada nos dados coletados e na análise realizada.

9. O trabalho deve ser revisado e corrigido antes da apresentação final.

10. A apresentação final deve ser feita de forma clara e organizada, destacando os pontos principais.

11. O trabalho deve ser entregue no prazo estabelecido e em formato adequado.

12. A avaliação do trabalho deve ser feita com base nos critérios estabelecidos.

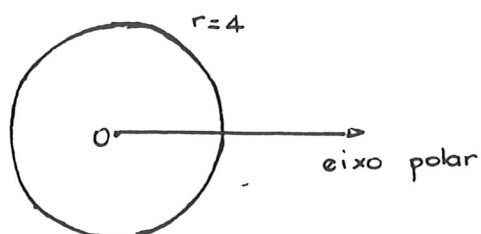
13. O feedback recebido deve ser utilizado para melhorar o trabalho em futuras ocasiões.

14. O trabalho deve ser arquivado e mantido em uma pasta organizada.

15. O trabalho deve ser apresentado de forma clara e organizada, destacando os pontos principais.

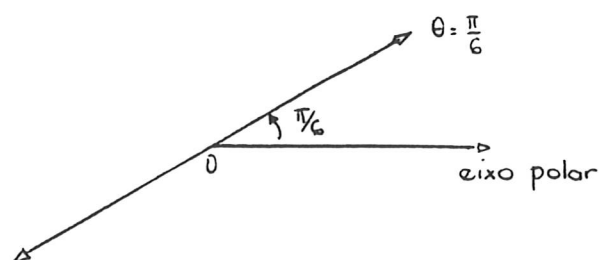
EXEMPLOS:

a) $r = 4$



b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

O gráfico consiste em uma reta passando em O e determinando um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ rad com o eixo polar.

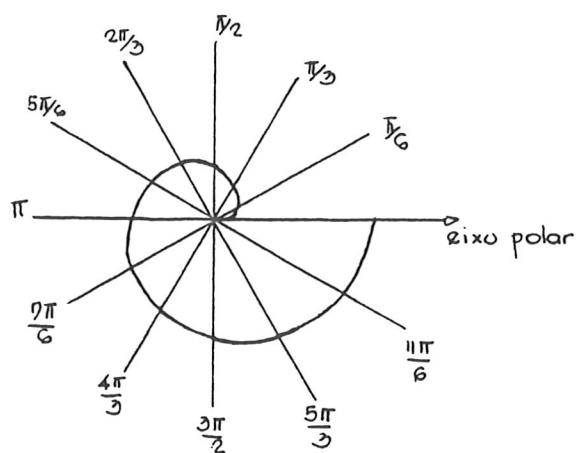


c) Esboce o gráfico de $r = 1 + \frac{6}{\pi} \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A tabela abaixo mostra alguns valores escolhidos para θ entre 0 e 2π e os valores de r correspondentes:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Gráfico :



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400	1401	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1415	1416	1417	1418	1419	1420	1421	1422	1423	1424	1425	1426	1427	1428	1429	1430	1431	1432	1433	1434	1435	1436	1437	1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445	1446	1447	1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1459	1460	1461	1462	1463	1464	1465	1466	1467	1468	1469	1470	1471	1472	1473	1474	1475	1476	1477	1478	1479	1480	1481	1482	1483	1484	1485	1486	1487	1488	1489	1490	1491	1492	1493	1494	1495	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

OBSERVAÇÃO: A simetria do gráfico de uma equação polar pode ser freqüentemente constatada fazendo-se substituições convenientes na equação e testando para ver se a nova equação é equivalente à original. A tabela seguinte mostra algumas substituições que acarretam a simetria indicada:

Substituição	Uma equação equivalente implica
θ por $-\theta$	Simetria em relação à reta obtida pela extensão do eixo polar (Figura 1).
θ por $\pi - \theta$	Simetria em relação à reta sobre o eixo $\pi/2$ (Figura 2).
θ por $\pi + \theta$	Simetria em relação ao polo (Figura 3).

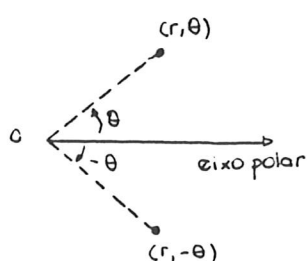


Fig 1

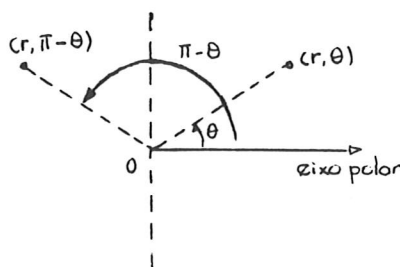


Fig 2

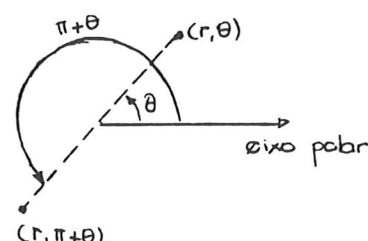


Fig 3

EXEMPLO: Esboce o gráfico da equação polar $r = 2(1 - \cos \theta)$.

O gráfico é simétrico somente em relação ao eixo polar, pois substituindo θ por $-\theta$ vem $r = 2[1 - \cos(-\theta)]$ que é equivalente à equação original.

...to the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

...the ... of the ...

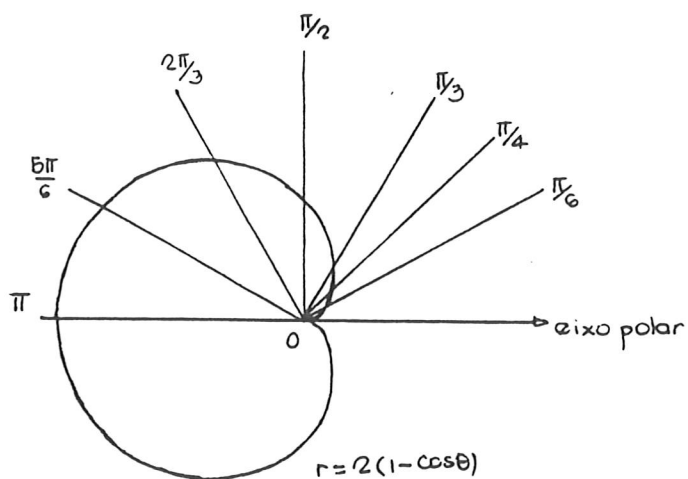
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...



...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...
...the ... of the ...

Gráfico:

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$2 - \sqrt{3} \approx 0,27$
$\frac{\pi}{4}$	$2 - \sqrt{2} \approx 0,59$
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	3
$\frac{5\pi}{6}$	$2 + \sqrt{3} \approx 3,73$
π	4

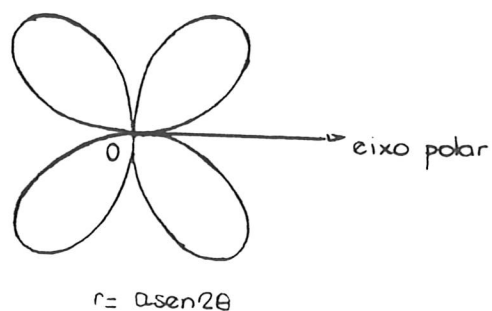
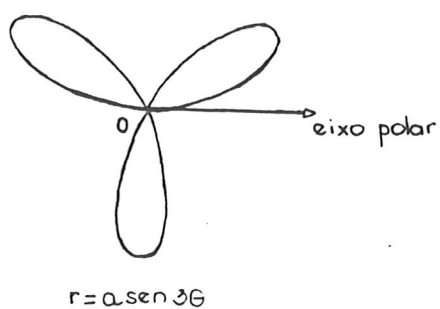


O gráfico é chamado cardióide.

Outras curvas polares notáveis:

a) Rosácea de N folhas: $r = a \sin k \theta$ ou $r = a \cos k \theta$,

onde $N = \begin{cases} k, & \text{se } k \text{ é inteiro ímpar} \\ 2k, & \text{se } k \text{ é inteiro par} \end{cases}$



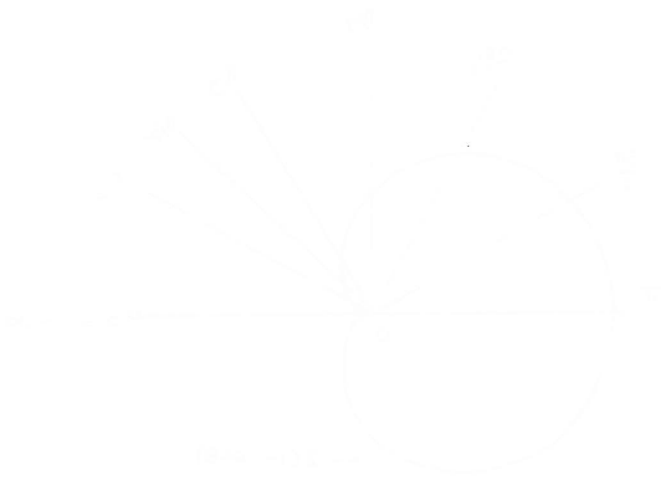
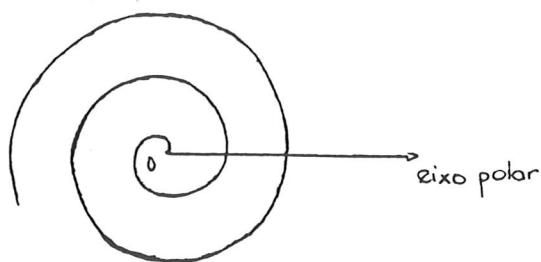


Figure 1

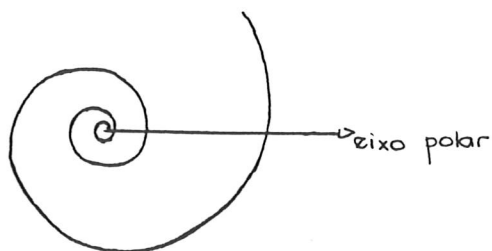


Figure 2

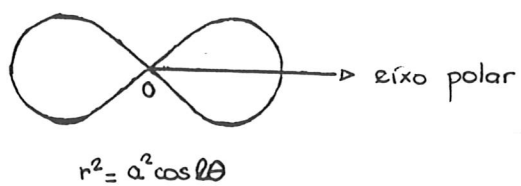
b) Espiral de Arquimedes: $r = a\theta$, $\theta \geq 0$



c) Espiral logarítmica: $r = e^{a\theta}$



d) Lemniscata: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ou $r^2 = a^2 \sin 2\theta$



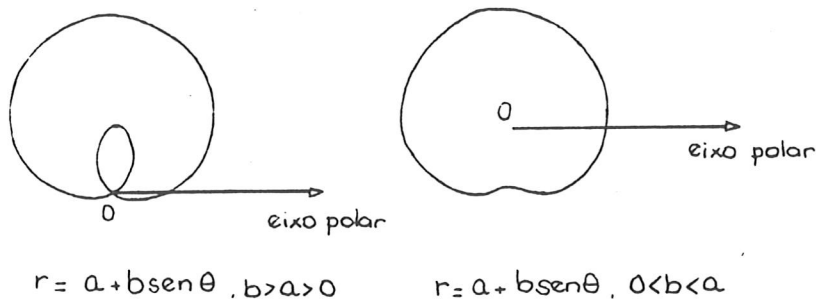
11-22-74 10:00 AM - 11:00 AM 11-22-74 10:00 AM - 11:00 AM



11-22-74 10:00 AM - 11:00 AM 11-22-74 10:00 AM - 11:00 AM



e) Limaçon: $r = a \pm b \cos \theta$ ou $r = a \pm b \sin \theta$



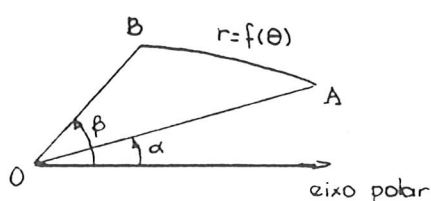
EXERCÍCIOS 6.5.

Esboce os gráficos das equações abaixo, discutindo a simetria:

- a) $r = 4 \cos \theta$
- b) $r = 2 \sin \theta$
- c) $r = 2$
- d) $r = 2 \sin 3 \theta$ (rosácea de três folhas)
- e) $r = 2 \cos 2 \theta$ (rosácea de quatro folhas)
- f) $r = 2 \sin 4 \theta$ (rosácea de oito folhas)
- g) $r = 2(1 - \sin \theta)$ (cardiôide)
- h) $r = 3 + 4 \sin \theta$ (limaçon)
- i) $r = 3 - 2 \cos \theta$ (limaçon)
- j) $r^2 = 8 \cos 2 \theta$ (Lemniscata)
- l) $9\theta = Lr$ (espiral logarítmica)

6.6. ÁREAS EM COORDENADAS POLARES

Suponha que temos uma curva dada pela equação $r = f(\theta)$, onde $f(\theta)$ é contínua quando $\alpha \leq \theta \leq \beta$



1. The first part of the report is devoted to a general description of the project.



EXPERIMENTAL

The experimental part of the report is devoted to a detailed description of the experimental results.

1. The first part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
2. The second part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
3. The third part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
4. The fourth part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
5. The fifth part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
6. The sixth part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
7. The seventh part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
8. The eighth part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
9. The ninth part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.
10. The tenth part of the experimental part is devoted to a description of the experimental results.

The experimental results are presented in the following tables:

Table 1. Experimental results for the first part of the report.

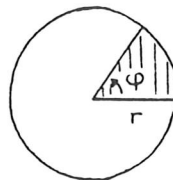
The experimental results for the second part of the report are presented in the following tables:

Table 2. Experimental results for the second part of the report.



Recordemos como calcular a área de um setor circular. A área A do setor pode ser calculada por:

$$\frac{2\pi}{\varphi} = \frac{\pi r^2}{A}$$

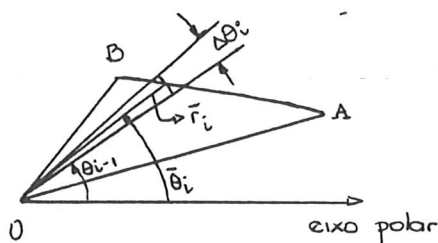


Assim, resolvendo a regra de três,

$$A = \varphi \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \varphi$$

Vamos, agora, determinar a área do setor OAB limitado pela curva $r = f(\theta)$ e pelos raios vetores $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.

Divida a área por raios vetores $\theta_0 = \alpha$, $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n = \beta$ em n partes. Denote por $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$ os ângulos entre os raios vetores. Denote por $\bar{r}_i$ o comprimento de um raio vetor correspondendo a algum ângulo $\bar{\theta}_i$ entre θ_{i-1} e θ_i .



Consideremos o setor circular com raio $\bar{r}_i$ e ângulo central $\Delta\theta_i$. Sua área será

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} \bar{r}_i^2 \cdot \Delta\theta_i.$$



1. The first part of the report is devoted to a description of the

experimental setup and the results of the measurements.



2. The second part of the report is devoted to a description of the

$$I = \frac{1}{2} \pi r^2 \sin^2 \theta$$

3. The third part of the report is devoted to a description of the

theoretical calculations and the comparison with the experimental results.

4. The fourth part of the report is devoted to a description of the

conclusions and the prospects for further research.

5. The fifth part of the report is devoted to a description of the

acknowledgments and the references.

6. The sixth part of the report is devoted to a description of the



7. The seventh part of the report is devoted to a description of the

conclusions and the prospects for further research.

$$I = \frac{1}{2} \pi r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{A soma } A_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i^2 \Delta \theta_i =$$

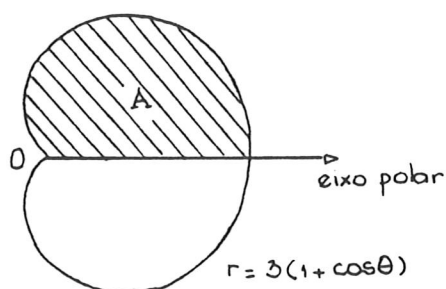
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta \theta_i$$

é uma estimativa da área do setor desejado.

O seu limite, quando $\max \Delta \theta_i \rightarrow 0$ é a integral definida

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

EXEMPLO: Encontre a área da "metade superior" da região compreendida pela cardióide $r = 3(1 + \cos \theta)$.



$$\begin{aligned} \text{Temos } A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [3(1 + \cos \theta)]^2 d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \\ &+ \cos^2 \theta) d\theta = \frac{9}{2} \left[\theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2}(\theta + \sin \theta \cos \theta) \right]_0^{\pi} = \frac{27\pi}{4} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 6.6.

Calcular a área delimitada pela curva $r = f(\theta)$ no intervalo, em cada caso a seguir:

a) $r = 2\theta$ $\theta \in [0, \pi]$

b) $r^2 = 9 \sin 2\theta$ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

$$c) \ r = 2(1 + \cos \theta) \quad \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$d) \ r = 3 \cos \theta \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$e) \ r = \sin \theta \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$f) \ r = \sin \theta \cos \theta \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$g) \ r = \operatorname{tg} \theta \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

6.7. COMPRIMENTO DE ARCO EM COORDENADAS POLARES

O comprimento de arco da curva por $r = f(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é dado por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} d\theta$$

desde que f' exista e seja contínua no intervalo $[\alpha, \beta]$.

EXEMPLO: Ache o comprimento do cardióide $r = 3(1 + \cos \theta)$ (veja figura na seção anterior).

Variando o ângulo θ de 0 a π , obtemos a metade do comprimento.

Temos $f'(\theta) = -3 \sin \theta$ e, então,

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{[-3 \sin \theta]^2 + [3(1 + \cos \theta)]^2} d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{9(\sin^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = \\ &= 2 \cdot 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = 6 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = \\ &= 6 \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 12 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 12 \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 24 u \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 6.7.

1. Demonstrar a fórmula presente nesta seção (ver bibliografia).

2. Determine os comprimentos dos arcos dados pelas equações:

a) $r = \operatorname{sen} \theta \quad \theta \in [0, \pi]$

b) $r = 2\theta \quad \theta \in [0, \pi]$

c) $r = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$

d) $r = e^\theta \quad \theta \in [0, 4\pi]$

e) $r = 3 \cos \theta + 4 \operatorname{sen} \theta \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Encontre o erro na seguinte afirmação:

Visto que o gráfico de uma equação polar

$r = 4 \cos \theta$ é um círculo de raio 2, o comprimento da circunferência deste círculo deve ser dada por

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 \theta + 16 \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi.$$

(Mas o comprimento de uma circunferência de raio 2 deve ser apenas 4π).

1. O presente trabalho tem por objetivo principal estudar a influência da

temperatura na velocidade de reação química, sendo para isso empregados

os dados experimentais a seguir:

Temperatura (°C) 20 30 40 50 60

Velocidade (mol/l.s) 0,05 0,10 0,15 0,20 0,25

Com base nos dados acima, pede-se:

a) Calcular a velocidade média da reação entre 20°C e 60°C.

b) Determinar a energia de ativação da reação.

c) Calcular a velocidade da reação a 10°C e a 70°C.

d) Representar graficamente a velocidade da reação em função da temperatura.

e) Calcular a constante de velocidade da reação a 30°C.

f) Determinar a ordem da reação em relação a cada reagente.

g) Calcular a constante de equilíbrio da reação a 40°C.

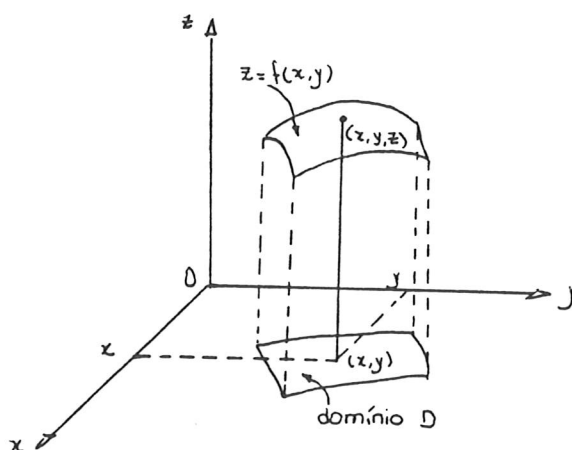
h) Calcular a constante de equilíbrio da reação a 50°C.

i) Calcular a constante de equilíbrio da reação a 60°C.

CAPÍTULO 7 - FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

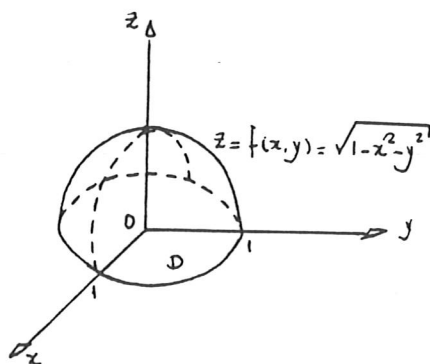
7.1. DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 1: Uma função real f a duas variáveis reais é uma relação que transforma em um único número real z cada par ordenado (x, y) de números reais de um certo conjunto D , chamado de domínio da função. Escrevemos $z = f(x, y)$.



EXEMPLO: A função f cujo domínio D é o disco circular consistindo de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq 1$ e que está definida pela equação

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{tem gráfico}$$



DEFINIÇÃO 2 (LIMITE): O conceito de limite estende-se facilmente para funções de duas variáveis. Por exemplo, afirmar que



Exemplo 1 - Função de 1ª ordem

Exemplo 2 - Função de 2ª ordem

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
Verifique se f satisfaz as condições de Rolle no intervalo $[0, 1]$.
Se sim, encontre o ponto c em $(0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.



Exemplo 3 - Função de 3ª ordem

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
Verifique se f satisfaz as condições de Rolle no intervalo $[0, 2]$.
Se sim, encontre os pontos c_1 e c_2 em $(0, 2)$ tal que $f'(c_1) = 0$ e $f'(c_2) = 0$.



Definição 1 (Limite)

Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$. Dizemos que f tem limite L em a se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, sempre que $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$, temos $|f(x) - L| < \epsilon$.

$f(x, y)$ tende ao limite L quando (x, y) tende a (x_0, y_0) significa que o número $f(x, y)$ pode estar tão perto do número L quanto se deseja, pela escolha do ponto (x, y) suficientemente próximo do ponto (x_0, y_0) . A notação é

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$$

Por não fazer parte dos objetivos do curso, omitiremos a definição formal do limite de uma função a duas variáveis.

7. 2. DERIVADAS PARCIAIS

Se f é uma função a duas variáveis e (x, y) é um ponto no domínio de f , então a derivada parcial $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ de f em (x, y) em relação à primeira variável é definida por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

contanto que o limite exista.

Outras notações:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad (\text{se } z = f(x, y)), \quad f_x(x, y), \quad f_1(x, y), \quad D_x f(x, y), \quad D_1 f(x, y), \quad z'_x, f'_x(x, y).$$

Vamos nos ater apenas às técnicas de derivação parcial, uma vez que não formalizamos o conceito de limite.

Note que, na definição de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, a variável

vel y é fixa. Segue-se que, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, podemos considerar y como constante e derivar $f(x, y)$ em relação a x da maneira usual.

EXEMPLOS: Calcule as derivadas parciais das funções abaixo, em relação à variável x :

a) $f(x, y) = x^2 y$

De acordo com a observação acima,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

b) $z = x^2 \sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y$$

c) $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$$

d) $z = 3x^2 + 4y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x$$

Analogamente, define-se derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a y .

EXEMPLOS: Ache as derivadas parciais das funções abaixo, em relação à variável y :

a) $f(x, y) = x^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

b) $z = x^2 \sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

$$c) z = x^y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$d) z = 3x^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12y^2$$

OUTROS EXEMPLOS:

a) Se $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$, ache $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Usando a regra do quociente, considerando y constante e diferenciando em relação a x , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x + y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} (x + y) - (x + y) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2) (1 + 0) - (x + y) (2x + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x + y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} (x + y) - (x + y) \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2) (0 + 1) - (x + y) (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

b) Se $z = f(x, y) = e^{xy} \sin xy$, ache $\frac{\partial z}{\partial x}$

Aplicando a regra do produto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy} \sin xy) = e^{xy} \frac{\partial}{\partial x} (\sin xy) + \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy}) \sin xy \\ &= y e^{xy} \cos xy + y e^{xy} \sin xy. \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 1 (REGRAS DA CADEIA): Hã muitas versões da regra da cadeia aplicadas às derivadas parciais. A mais simples delas é uma transcrição direta da regra da cadeia para funções a uma variável:

normal *geog* Se w é uma função de u e $u = g(x, y)$ então,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial y},$$

desde que as derivadas $\frac{dw}{du}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ existam.

EXEMPLO: Se $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, encontre $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$.

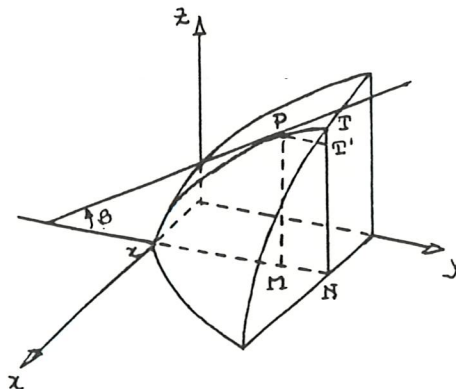
Faça $u = 1 - x^2 - y^2$, ou seja, $w = \sqrt{u}$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{\partial}{\partial x} (1 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2\sqrt{u}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{\partial}{\partial y} (1 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2\sqrt{u}} (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

OBSERVAÇÃO 2 (INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA PARCIAL):

Seja $z = f(x, y)$ a equação da superfície abaixo:



Desenho o plano $x = \underline{cte}$. Para um dado x , considere o ponto M no plano xy . Ao ponto M , corresponde o ponto P na superfície. Deixando x constante, dê um acréscimo $\Delta y = MN = PT'$ à variável y .



1. The first part of the report is a general introduction to the subject of the study. It discusses the importance of the problem and the objectives of the research.

2. The second part of the report is a detailed description of the methods used in the study. It includes a discussion of the experimental design, the data collection procedures, and the statistical analysis techniques.

3. The third part of the report is a presentation of the results of the study. It includes a discussion of the findings, a comparison of the results with previous research, and a conclusion about the significance of the study.

4. The fourth part of the report is a discussion of the implications of the study. It includes a discussion of the limitations of the study, the strengths of the findings, and the potential for future research.

5. The fifth part of the report is a summary of the study. It includes a brief overview of the main findings and a final statement about the importance of the research.

6. The sixth part of the report is a list of references. It includes a list of all the sources used in the study, including books, articles, and other documents.

7. The seventh part of the report is an appendix. It includes a list of all the data collected during the study, as well as any other information that may be useful for understanding the results.

8. The eighth part of the report is a conclusion. It includes a final statement about the importance of the study and a recommendation for further research.

O quociente $\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ é igual à

tangente do ângulo formado pela reta secante PT, ou seja,

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \operatorname{tg} \widehat{PT'}$$

Conseqüentemente, o limite

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ou seja, não considerando constante

é a tangente do ângulo β .

Analogamente para a derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$.

OBSERVAÇÃO 3 (DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR):

Seja dada uma função a duas variáveis $z = f(x, y)$.

As derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$ e

$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$ são também funções nas variáveis x e y . Por

demais, então, achar suas derivadas parciais. Existem, então, quatro derivadas parciais ditas de segunda ordem, a saber:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y)$: f é derivado duas vezes com respeito a x .

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y)$: f é derivado primeiro em relação a x e então o resultado é derivado com respeito a y .

*2y 2x
então*

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y)$: f é derivado primeiro em relação a y e então o resultado é derivado com respeito a x .

2x 2y

$$a) z = x^4 y^3 - 2xy^2 + y - 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 y^3 - 2y^2 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^4 y^2 - 4xy + 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 y^3 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^4 y - 4x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^3 y^2 - 4y$$

$$b) z = \sqrt{x^2 - \sin xy} \quad w = x^2 - \sin xy \quad z = w^{1/2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} w^{-1/2} \cdot (2x - y \cos xy) = \frac{2x - y \cos xy}{2\sqrt{x^2 - \sin xy}}$$

$$c) z = L \sqrt{x^3 y^2 - y^3} \quad w = \sqrt{x^3 y^2 - y^3} \rightarrow z = Lw$$

$$t = x^3 y^2 - y^3 \rightarrow w = t^{1/2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2t^{1/2}} \cdot (3x^2 y^2 - 3y^2)$$

$$= \frac{2x^2 y^2 - 3y^2}{2\sqrt{x^3 y^2 - y^3} \cdot \sqrt{x^3 y^2 - y^3}} = \frac{2x^2 y^2 - 3y^2}{2(x^3 y^2 - y^3)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) \quad : f \text{ é derivado duas vezes com respeito a } y.$$

EXEMPLOS:

a) Seja $f(x, y) = x^2y + y^3$. Encontre as derivadas parciais de segunda ordem de f .

$$\text{Temos } \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$

$$\text{Assim, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x.$$

b) Se $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x + y)$, encontre $f_{xx}(x, y)$ e $f_{xy}(x, y)$.

$$\text{Como } f_x(x, y) = ye^{xy} + \cos(x + y),$$

$$f_{xx}(x, y) = y^2 e^{xy} - \sin(x + y) \text{ e } f_{xy}(x, y) = yxe^{xy} + e^{xy} - \sin(x + y).$$

Podemos, de igual modo, definir derivadas parciais de ordens superiores a 2.

EXERCÍCIOS 7.2.

1. Em cada uma das funções abaixo, obter o requerido:

$$a) z = x^4y^3 - 2xy^2 + y - 5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$b) z = \sqrt{x^2 - \sin xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$c) z = L \sqrt{x^3y^2 - y^3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$



$$d) z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{x-y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$e) z = x^3 \operatorname{tg} xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f) z = \operatorname{sen}^3 \sqrt{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$g) z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$h) z = x^3 y^2 + 3xw^3 - 2y^2 w + 3w^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial w}$$

$$i) z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1 - \cos xy}{1 + \cos xy}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$j) z = e^{\sqrt{x/y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$l) z = e^{xy} \operatorname{sen}^2 x^2 y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$m) z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

2. Encontre cada derivada parcial abaixo, usando a regra da cadeia vista na seção 7.2.:

$$a) \frac{\partial w}{\partial x}, \text{ onde } w = \sqrt{u} \text{ e } u = 3x^2 + y^2$$

$$b) \frac{\partial w}{\partial x}, \text{ onde } w = Lu \text{ e } u = 7x^2 + 4y^3$$

$$c) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y), \text{ onde } g(x, y) = \operatorname{sen} (xy)^2$$

$$d) \frac{\partial L}{\partial y} (x^2/y)$$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$
$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$$
$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$



Similarmente, se x é deixado constante e é dado um acréscimo Δy em y , o acréscimo em z é chamado incremento parcial de z em relação a y (na figura, TT') e é notado

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Finalmente, dando acréscimo Δx em x e Δy em y , obtemos em z um incremento Δz , chamado incremento total da função z :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Na figura, Δz é o segmento QQ' .

7.3.2. Se f é uma função a duas variáveis e $z = f(x, y)$, então, afirmo que

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \text{ onde } \epsilon_1 \text{ e } \epsilon_2 \text{ são funções de } \Delta x \text{ e } \Delta y \text{ tais que } \epsilon_1 \rightarrow 0 \text{ e } \epsilon_2 \rightarrow 0 \text{ quando } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

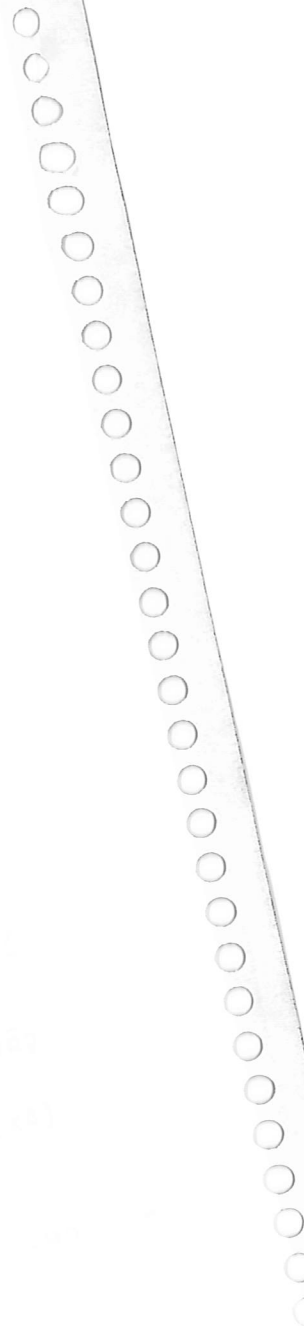
A demonstração desse fato pode ser encontrada nos livros constantes na bibliografia.

Chamaremos de diferenciais das variáveis independentes x e y os incrementos Δx e Δy e denotaremos por dx e dy , respectivamente.

Definimos a diferencial total dz da variável z por

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Comparando as expressões acima, vemos que quando dx (isto é, Δx) e dy (isto é, Δy) se aproximam de zero, ϵ_1 e ϵ_2 também se aproximam de zero e concluímos que dz é uma boa aproximação de Δz .



Como dz é mais fácil de se calcular que Δz , valemo-nos do fato que $dz \approx \Delta z$ em certas situações.

EXEMPLOS:

- a) Se $z = f(x, y) = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$, encontre a diferencial total dz .

Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2y^2 - 2y^3 + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^3y - 6xy^2 + x,$$

$$dz = (9x^2y^2 - 2y^3 + y) dx + (6x^3y - 6xy^2 + x) dy.$$

- b) O volume V de um cone circular reto de altura h e raio

da base r é dado por $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Se a altura é aumenta

da de 5 cm para 5,01 cm e o raio da base é diminuído de 4 cm para 3,98 cm, encontre uma aproximação da variação ΔV no volume.

Usemos o diferencial total dV para aproximar ΔV .

Logo,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial h} dh + \frac{\partial V}{\partial r} dr = \frac{1}{3} \pi r^2 dh + \frac{2}{3} \pi r h dr$$

$$\begin{aligned} \text{Quando } h &= 5, & dh &= 0,01 \\ r &= 4, & dr &= -0,02 \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta V \approx dV = \frac{1}{3} \pi 4^2 (0,01) + \frac{2}{3} \pi 4 \cdot 5 (-0,02) \approx -0,6702 \text{ cm}^2$$

O valor correto de ΔV , com 5 casas decimais, é $-0,66978 \text{ cm}^2$.

EXERCÍCIOS 7.3.

1. Nos exercícios abaixo, determine dz :

Como se sabe, a área total de um círculo é dada por:

Logo, a área do círculo de raio r é dada por:

Logo:

Logo, a área do círculo de raio r é dada por:

Logo:

Logo:

$$\frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi (2.5)^2 = \frac{1}{2} \pi (6.25) = 3.125 \pi$$

$$A = 3.125 \pi \approx 9.8175 \text{ cm}^2$$

Logo, a área do círculo de raio 2.5 cm é dada por:

Logo, a área do círculo de raio 2.5 cm é dada por:

Logo, a área do círculo de raio 2.5 cm é dada por:

Logo, a área do círculo de raio 2.5 cm é dada por:

Logo:

Logo, a área do círculo de raio 2.5 cm é dada por:

$$\frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi (2.5)^2 = \frac{1}{2} \pi (6.25) = 3.125 \pi$$

$$A = 3.125 \pi \approx 9.8175 \text{ cm}^2$$

$$A = 3.125 \pi \approx 9.8175 \text{ cm}^2$$

Logo:

$$\frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi (2.5)^2 = \frac{1}{2} \pi (6.25) = 3.125 \pi$$

Logo, a área do círculo de raio 2.5 cm é dada por:

Logo:

Logo, a área do círculo de raio 2.5 cm é dada por:

$$a) z = x^3 - x^2y + 3y^2$$

$$b) z = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{3/2}$$

$$c) z = y e^{-2x} - 3x^4$$

$$d) z = x^2 L(x^2 + y^2)$$

$$e) z = x^2 e^{xy} + \frac{1}{y^2}$$

2. Obtenha uma aproximação da variação de área de um triângulo isósceles se cada um dos lados iguais aumenta de 100 a 101 e se o ângulo entre eles decresce de 120 para 119.
3. Calcular e estimar pela diferencial total, a alteração de área ocorrida num curral retangular de 35 x 20 m e que após concluído apresentou as dimensões 35,4 x 20,6 m.

7.4. INTEGRAIS DUPLAS

7.4.1. Se $f(x, y)$ é contínua em uma região D , então sua integral dupla sobre a região D é denotado por

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

A região D é chamada domínio de integração.

Geomêtricamente, se $f(x, y) \geq 0$, então

$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, a integral dupla de $f(x, y)$ sobre D é igual ao volume V do sólido que é limitado acima pelo gráfico de f , abaixo pela região D e lateralmente pelo cilindro sobre o limite de D cujas geratrizes são paralelas ao eixo z .

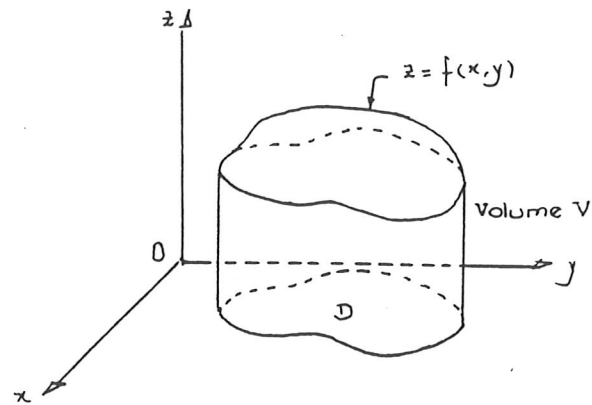


Deposito de 1000.000 de Reis em 1900
 e de 1000.000 de Reis em 1901
 e de 1000.000 de Reis em 1902
 e de 1000.000 de Reis em 1903
 e de 1000.000 de Reis em 1904
 e de 1000.000 de Reis em 1905
 e de 1000.000 de Reis em 1906
 e de 1000.000 de Reis em 1907
 e de 1000.000 de Reis em 1908
 e de 1000.000 de Reis em 1909
 e de 1000.000 de Reis em 1910

Deposito de 1000.000 de Reis em 1911
 e de 1000.000 de Reis em 1912
 e de 1000.000 de Reis em 1913
 e de 1000.000 de Reis em 1914
 e de 1000.000 de Reis em 1915
 e de 1000.000 de Reis em 1916
 e de 1000.000 de Reis em 1917
 e de 1000.000 de Reis em 1918
 e de 1000.000 de Reis em 1919
 e de 1000.000 de Reis em 1920

Deposito de 1000.000 de Reis em 1921
 e de 1000.000 de Reis em 1922
 e de 1000.000 de Reis em 1923
 e de 1000.000 de Reis em 1924
 e de 1000.000 de Reis em 1925
 e de 1000.000 de Reis em 1926
 e de 1000.000 de Reis em 1927
 e de 1000.000 de Reis em 1928
 e de 1000.000 de Reis em 1929
 e de 1000.000 de Reis em 1930

Deposito de 1000.000 de Reis em 1931
 e de 1000.000 de Reis em 1932
 e de 1000.000 de Reis em 1933
 e de 1000.000 de Reis em 1934
 e de 1000.000 de Reis em 1935
 e de 1000.000 de Reis em 1936
 e de 1000.000 de Reis em 1937
 e de 1000.000 de Reis em 1938
 e de 1000.000 de Reis em 1939
 e de 1000.000 de Reis em 1940



7.4.2. INTEGRAIS DUPLAS NUM DOMÍNIO RETANGULAR

Seja $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ o domínio de $z = f(x, y)$ e vamos considerar, inicialmente, que y seja fixo. Então $f(x, y)$ pode ser interpretada como função de uma variável independente. Denotemos por $A(y)$ a integral

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

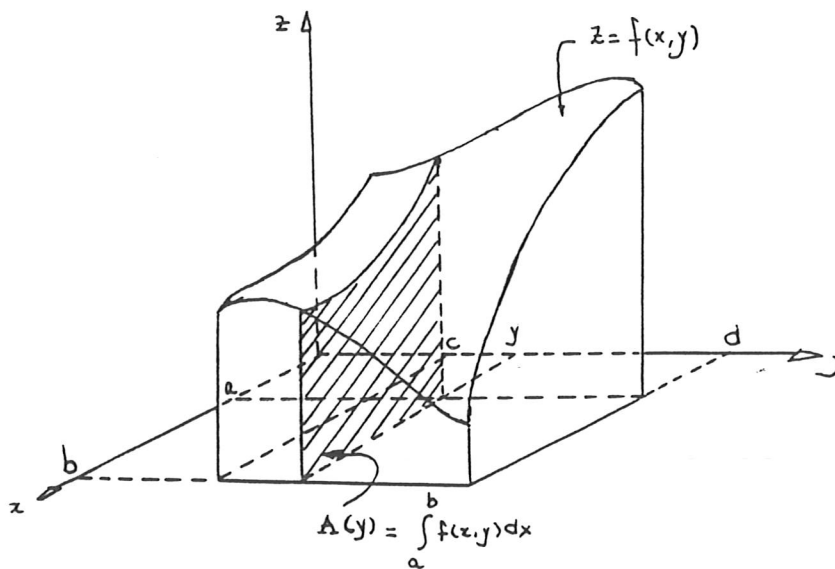




Diagram of a sphere with a horizontal line through its center.

Diagram of a sphere with a horizontal line through its center.



Como função de y , podemos integrar $A(y)$ no intervalo $[c, d]$. Temos, então

$$\begin{aligned} D = [a, b] \times [c, d] \quad \int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_c^d A(y) \, dy \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Apesar de não ser a definição mais exata da integral de Riemann para funções de duas variáveis, para o nível do curso presente será suficiente.

EXEMPLOS:

a) Calcule $\int_D x \cos xy \, dx \, dy$, onde $D = [1, 2] \times \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

$$\begin{aligned} \int_D x \cos xy \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x \cos xy \, dy \, dx = \\ &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos xy \, dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{\sin xy}{x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} dx = \\ &= \int_1^2 \left(\sin 2\pi x - \sin \frac{\pi}{2} x \right) dx = \\ &= \int_1^2 \sin 2\pi x \, dx - \int_1^2 \sin \frac{\pi}{2} x \, dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_1^2 = -\frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

b) Calcule $\int_1^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y) \, dx \, dy$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y) \, dx \, dy = \\ &= \int_1^2 \left[x^2 + 2x^3y \right]_1^4 dy = \int_1^2 (16 + 128y - 1 - 2y) dy = \\ &= \int_1^2 (126y + 15) dy = \left[63y^2 + 15y \right]_1^2 = 234 \end{aligned}$$

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

EXERCÍCIOS 7.4.2.

Calcular

a) $\int_0^3 \int_1^3 (3x^2y + 4xy^3) dx dy$

b) $\int_0^{\pi/2} \int_1^3 2x \cos y dx dy$

c) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy$

d) $\int_{-2}^1 \int_0^2 (x + e^x y^2) dx dy$

e) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \cos 2x \sin^3 y dy dx$

f) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} 8 \sin \left(\frac{x}{2} + y \right) dx dy$

g) $\int_{-1}^2 \int_0^1 \frac{4xy(1+x^2)}{1+y^2} dy dx$

h) $\int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} 2y^2 \cos x e^{-y} dx dy$

i) $\int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} y^2 x^4 e^{-(x^2+y)} dy dx$

j) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \cos^5 x \sin^4 2y dy dx$

l) $\int_0^{\infty} \int_1^e \frac{y^2(Lx)^3 (1-Lx)^4 e^{-y}}{x} dx dy$

m) $\int_0^{\pi} \int_1^3 x \cos y e^{x+y} dx dy$

n) $\int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{x^2(1+2y)}{1+y^2} dx dy$

o) $\int_0^3 \int_0^3 \frac{4xy}{(3+x^2)\sqrt{16+y^2}} dx dy$

p) $\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^2 + y^3) dx dy$

q) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \cos^3 2y dy dx$



$$r) \int_{-2}^2 \int_2^3 \frac{3 + x^2}{4 + y^2} dx dy$$

$$s) \int_{-2}^0 \int_0^2 (3x^2 + e^{2x} y) dx dy$$

$$t) \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \cos(x - y) dy dx$$

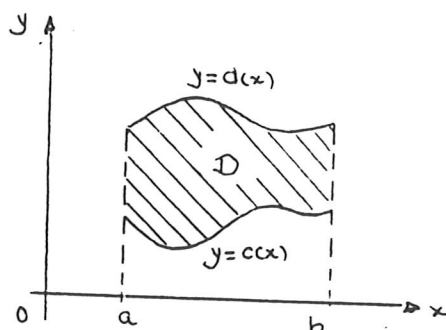
$$u) \int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2(1-x)^3}{9 + y^2} dy dx$$

$$v) \int_0^1 \int_1^2 2x(x^2 + y)^3 dx dy$$

$$x) \int_0^{\pi/2} \int_1^3 3x \cos^2 y dx dy$$

7.4.3. INTEGRAIS DUPLAS NUM DOMÍNIO QUALQUER

Consideremos o caso abaixo, em que o domínio tem forma não retangular:



Se $f(x, y)$ é contínua em D e $y = c(x)$ e $y = d(x)$ são funções contínuas no intervalo $[a, b]$, então a integral dupla de $f(x, y)$ sobre a região D é definida por

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Obviamente, se D é a região abaixo, limitada por $x = a(y)$, $x = b(y)$, $y = c$ e $y = d$, então

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

2. THE SECOND PART OF THE PAPER

is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

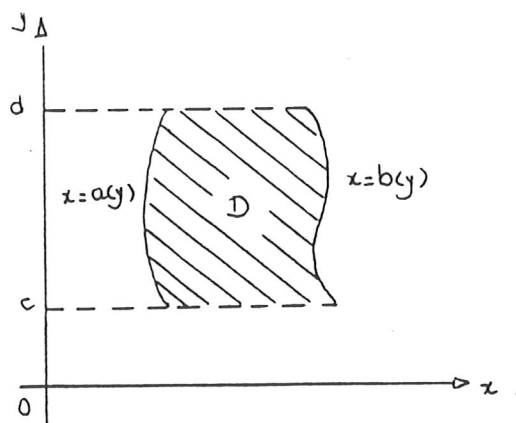


1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

2. The second part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

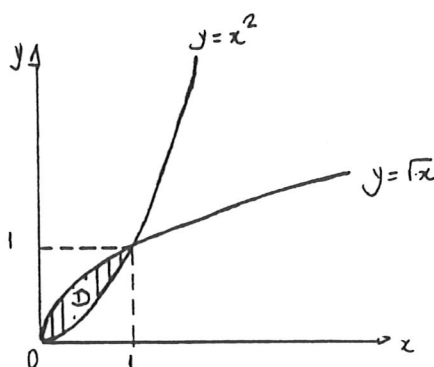
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$f(x) = \arctan x$$



EXEMPLOS:

- a) Calcule $\int_D \int (x + y) \, dx \, dy$, onde D é a região no primeiro quadrante acima da curva $y = x^2$ e abaixo da curva $y = \sqrt{x}$.



Logo, $\int_D \int (x + y) \, dx \, dy =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y) \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \\
 &= \int_0^1 \left(x^{3/2} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{3}{10}.
 \end{aligned}$$

- b) Calcular $\int_D \int (2x - y) \, dx \, dy$, onde D é limitada pelas retas $x = 2$, $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.



2024/02/20

1. Calcule a integral definida $\int_0^1 x^2 dx$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Solução: A função $f(x) = x^2$ é derivável em $[0, 1]$ e sua derivada é $f'(x) = 2x$.



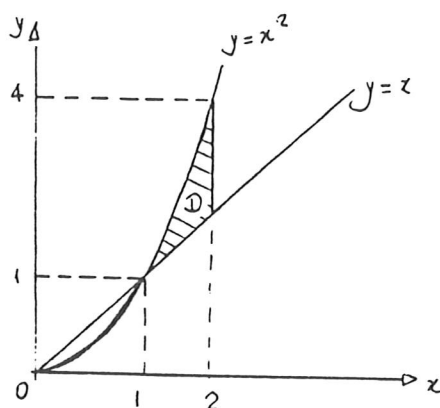
Logo, a integral definida é dada por:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Resposta:

2. Calcule a integral definida $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ é derivável em $[1, 4]$ e sua derivada é $f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}}$.



$$\begin{aligned}
 \text{Temos } \int_0^2 \int_{x^2}^x (2x - y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[x \int_{x^2}^x (2x - y) \, dy \right] dx = \\
 &= \int_1^2 \left[2xy - \frac{y^2}{2} \right]_x^{x^2} dx = \int_1^2 \left(2x^3 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \\
 &= \int_1^2 \left(-\frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \left[-\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_1^2 = \\
 &= -\frac{16}{5} + 8 - 4 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}.
 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 7.4.3.

1. Calcular

a) $\int_0^2 \int_{-x}^{x+1} (2x + 3y) \, dy \, dx$

b) $\int_1^3 \int_y^{6-y} (x + y) \, dx \, dy$

2. Determine o volume do sólido cuja base é a região do plano xy , delimitada pela parábola $y = 4 - x^2$ e pela reta



1. Determine the volume of the solid that lies between the surface $z = 1 - x^2 - y^2$ and the xy -plane.

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

$$= \frac{16\pi}{3}$$

2. Determine the volume of the solid that lies between the surface $z = 8 - y^2 - z^2$ and the xy -plane.

3. Determine the volume of the solid that lies between the surface $z = 4 - x^2 - y^2$ and the xy -plane.

$y = 2 - x$ e cuja parte superior é o plano $u = x - 5$.

3. Calcular $\int_D \int x^2 y \, dx \, dy$ onde D é dado pelas retas $y = x$, $y + x = 5$, $y = 3$ e $x = 4$.
4. Calcular $\int_D \int (x + y) \, dx \, dy$ onde D é dado pelos eixos x e y e pelas retas $y = 1$ e $y = 2 - x$.
5. Calcular a área do domínio D , limitado pelo eixo y e as retas $y = 2x$ e $y = 3$.
6. Calcular $\int_D \int e^{y/x} \, dx \, dy$ onde D é um triângulo limitado pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 1$.
7. Calcular o volume no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados, pelo plano $2x + y + z = 4$ e pelo cilindro de base $x^2 + y^2 = 1$.

7.4.4. MUDANÇA DE VARIÁVEIS NAS INTEGRAIS DUPLAS

No caso de funções de uma variável, vimos que se tivermos

$\int_a^b z(x) \, dx$ e fizermos uma mudança de variável $x = g(u)$, obtemos

$$\int_{\alpha}^{\beta} z[g(u)] g'(u) \, du$$

com $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$

Vejamos o caso de funções a duas variáveis:

Seja $z = f(x, y)$ uma função contínua numa região D e

$$I = \int_D \int f(x, y) \, dx \, dy.$$

Fazendo-se as mudanças de variáveis

1. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
2. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
3. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
4. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
5. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
6. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
7. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
8. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
9. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
10. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.

3.4.4. SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEL E MÚLTIPLOS INTEGRAIS

1. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
2. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
3. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
4. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
5. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
6. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
7. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
8. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
9. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.
10. Calcular $\int_0^1 x^2 dx$ usando o método das retas.

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

temos

$$I = \int_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| \, du \, dv,$$

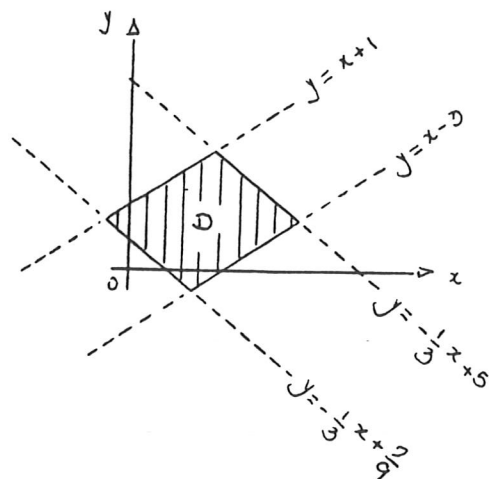
onde D' é uma região tal que existe uma correspondência um a um entre os pontos de D e D' , e J é o chamado jacobiano, definido por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

EXEMPLO: Calcule $\int_D (y - x) \, dx \, dy$,

onde D é a região limitada pelas retas

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}, \quad y = -\frac{1}{3}x + 5$$



É trabalhoso calcular esta integral dupla diretamente. Entretanto, uma simples mudança de variável permite reduzir ao caso de domínio retangular:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + \frac{1}{3}x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \\ y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \end{cases}$$



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

As retas serão transformadas pelas mudanças, em

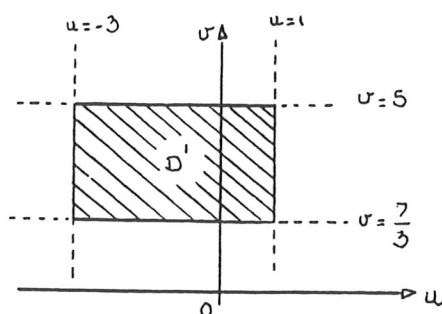
$$y = x + 1 \implies u = 1$$

$$y = x - 3 \implies u = -3$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \implies v = \frac{7}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 5 \implies v = 5$$

Consequentemente, a região D será transformada na região D' abaixo:



Como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4},$$

temos

$$\begin{aligned} I &= \int_D \int (y - x) \, dx \, dy = \int_{D'} \int u \cdot \frac{3}{4} \, du \, dv = \\ &= \int_{7/3}^5 \int_{-3}^1 \frac{3}{4} u \, du \, dv = -18 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 7.4.4.

1. Calcule a integral $\int_D \int (2x + y) \, dx \, dy$;

111

At what rate is the volume of the cone increasing?

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right)$$

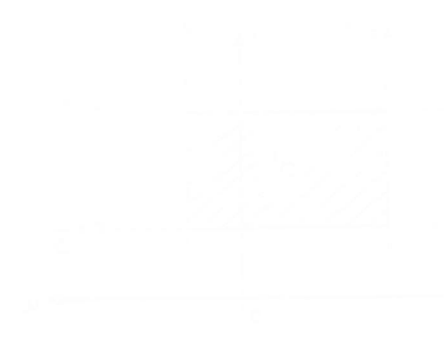
$$= \frac{1}{3} \pi \left(2r \frac{dr}{dt} h + r^2 \frac{dh}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(2(3) \frac{dr}{dt} (4) + 3^2 \frac{dh}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(24 \frac{dr}{dt} + 9 \frac{dh}{dt} \right)$$

Since the water is 4 ft deep, the radius of the water is 3 ft.

Therefore,



Thus,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{3} \pi \left(24 \frac{dr}{dt} + 9 \frac{dh}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi \left(24 \left(\frac{dr}{dh} \right) \frac{dh}{dt} + 9 \frac{dh}{dt} \right) \end{aligned}$$

Since

$$r = \frac{3}{4} h, \quad \frac{dr}{dh} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3} \pi \left(24 \left(\frac{3}{4} \right) \frac{dh}{dt} + 9 \frac{dh}{dt} \right)$$

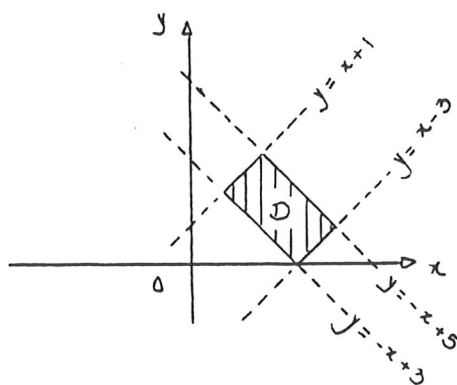
$$= \frac{1}{3} \pi (18 \frac{dh}{dt} + 9 \frac{dh}{dt})$$

1. Calculate the integral: $\int_0^1 (2x + x^2) dx$

onde a região D é limitada pelas retas $y = x + 2$,
 $y = x - 2$, $y = -x + 2$ e $y = -x + 6$.

2. Calcule $\int_D \int xy \, dx \, dy$, onde D é limitado pelas retas
 $y = 3x + 1$, $y = 3x - 3$, $y = -x + 1$ e $y = -x + 3$.

3. Calcular o volume do prisma de base D abaixo e truncado
pelo plano definido por $z = z + y$.



APÊNDICE A - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A.1. DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 1: Chama-se equação diferencial toda equação que envolve uma função e suas derivadas.

Simbolicamente, uma equação diferencial pode ser escrita como

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{ou}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Se a função incôgnita depende apenas de uma variável, temos uma equação diferencial ordinária. Se depende de mais de uma variável, temos uma equação diferencial parcial.

EXEMPLOS:

$$a) \frac{dy}{dt} = y \cos t$$

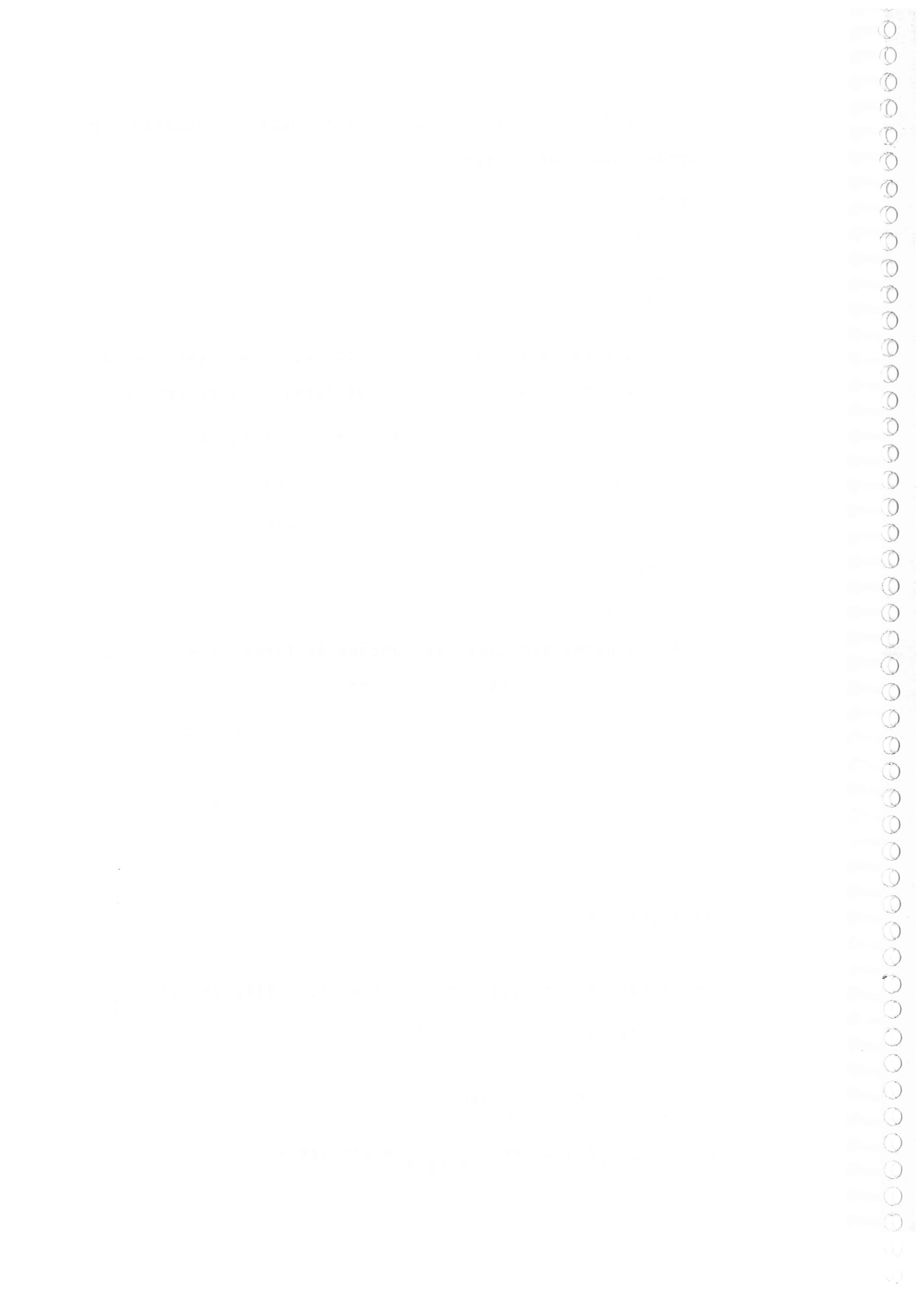
$$b) \frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = t e^t$$

$$c) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u = u(t, x)$$

DEFINIÇÃO 2: Chama-se ordem de uma equação diferencial ordinária, o número n que corresponde à ordem máxima das derivadas da equação.

Exemplos: No exemplo (a) acima, a equação tem ordem 1 e no exemplo (b), ordem 2.

DEFINIÇÃO 3: Uma solução de uma equação diferencial é qual-



$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$$

$$c) 2\sqrt{t} - \arctg y = c$$

$$(1 + y^2) dt - \sqrt{t} dy = 0$$

$$d) y = CL\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$xy'' + y' = 0$$

A.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM UM

Uma equação diferencial de primeira ordem é da forma $F(x, y, y') = 0$.

Consideremos equações que podem ser colocadas na forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, onde f é definida numa região D .

Para tais equações, o seguinte teorema garante a existência de uma única solução:

TEOREMA: Se na equação $y' = f(x, y)$

a função $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em alguma região D do plano xy contendo (x_0, y_0) , então existe uma única solução $y = \varphi(x)$ que satisfaz a condição $x = x_0 \Rightarrow y = y_0$.

Este problema de encontrar a solução de uma equação diferencial satisfazendo algum valor conhecido num da do instante é conhecido como problema de valor inicial.

DEFINIÇÃO 1: Uma solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem é a função $y = \varphi(x, c)$, que depende de uma constante arbitrária c e que satisfaz as seguintes condições:

$$1 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - 1$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - 1$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - 1$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} = 1$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} = 1$$

ANEXO 1: DIFERENCIAIS DE 1.ª ORDEM

Um sistema de equações diferenciais de 1.ª ordem é da forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

onde x e y são as variáveis dependentes e t é a variável independente.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

As condições iniciais são dadas por:

$$x(t_0) = x_0 \quad y(t_0) = y_0$$

onde t_0 é o tempo inicial e x_0 e y_0 são os valores iniciais das variáveis dependentes.

Para resolver essas equações, podemos usar o método de Euler, Runge-Kutta, entre outros.

O método de Euler é o mais simples, mas também o menos preciso.

O método de Runge-Kutta é mais preciso, mas também mais complexo.

Existem também métodos analíticos para resolver essas equações.

Em geral, a escolha do método depende da complexidade do sistema e da precisão necessária.

Para resolver essas equações, podemos usar o método de Euler, Runge-Kutta, entre outros.

O método de Euler é o mais simples, mas também o menos preciso.

O método de Runge-Kutta é mais preciso, mas também mais complexo.

Existem também métodos analíticos para resolver essas equações.

Em geral, a escolha do método depende da complexidade do sistema e da precisão necessária.

Para resolver essas equações, podemos usar o método de Euler, Runge-Kutta, entre outros.

O método de Euler é o mais simples, mas também o menos preciso.

i) Ela satisfaz a equação diferencial para qualquer valor específico de c .

ii) Seja qual for o valor inicial ($y = y_0$ para $x = x_0$), é possível achar um valor $c = c_0$ tal que a função $y = \varphi(x, c_0)$ satisfaz a dada condição inicial.

DEFINIÇÃO: Uma solução particular é qualquer função $y = \varphi(x, c_0)$ que é obtido da solução geral $y = \varphi(x, c)$ ao atribuímos à constante arbitrária c um valor definido $c = c_0$.

EXEMPLO:

Para a equação de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$,

a solução geral é uma família de funções $y = \frac{c}{x}$ (para chegar, basta fazer as substituições convenientes).

Vamos encontrar uma solução particular que satisfaz a seguinte condição inicial: $y_0 = 1$ quando $x_0 = 2$.

$$\text{Daí, } 1 = \frac{c}{2} \text{ ou } c = 2.$$

Consequentemente, a função $y = \frac{2}{x}$ será a so-

lução particular que procuramos.

OBSERVAÇÃO: Do ponto de vista geométrico, a solução geral é uma família de curvas no plano coordenado, que depende de uma constante arbitrária c . Uma solução particular está associada a uma curva desta família que passa por um dado ponto do plano.

A.3. EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARADAS E SEPARÁVEIS

Consideremos uma equação diferencial da forma



$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \quad (1)$$

Assumindo que $f_2(y) \neq 0$, temos

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx.$$

Então, as integrais indefinidas à esquerda e à direita diferem por uma constante. Integrando à esquerda em relação a y e à direita em relação a x , obtemos a solução geral da equação (1):

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + c$$

Uma equação diferencial do tipo

$M(x) dx + N(y) dy = 0$ é chamado uma equação com variáveis separadas. Sua solução geral é dada por

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = c.$$

EXEMPLO: Seja uma equação com variáveis separadas:

$$e^x dx - 2y dy = 0.$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$e^x - y^2 = c.$$

Uma equação da forma

$$M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0$$

é chamada uma equação com variáveis separáveis. Pode ser reduzida a uma equação com variáveis separadas dividindo-se ambos os lados pela expressão $N_1(y) M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x) N_1(y)}{N_1(y) M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) N_2(y)}{N_1(y) M_2(x)} dy = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \dot{x} \ddot{x}$$

Let us now consider the case of a particle moving in a potential field.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right) = \dot{x} \ddot{x} + \dot{x} \frac{dV}{dx}$$

Since the total energy is conserved, the quantity in parentheses is constant. Therefore, the derivative of the quantity in parentheses is zero. This gives us the equation of motion.

$$\ddot{x} = - \frac{dV}{dx}$$

For a harmonic oscillator, the potential is given by $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$. Substituting this into the equation of motion, we get

$$\ddot{x} = - \frac{k}{m} x$$

EXAMPLE: A particle of mass m moves in a potential field $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$. Find the equation of motion.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) &= \dot{x} \ddot{x} + \dot{x} kx \\ &= \dot{x} (\ddot{x} + kx) \end{aligned}$$

Since the total energy is constant, the derivative is zero.

$$\dot{x} (\ddot{x} + kx) = 0$$

Since $\dot{x}$ is not always zero, we must have $\ddot{x} + kx = 0$. This is the equation of motion for a harmonic oscillator.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0 \Rightarrow \dot{x} \ddot{x} + \dot{x} kx = 0$$

EXEMPLO: Seja a equação

$$(1 + x)y \, dx + (1 - y)x \, dy = 0$$

Separando as variáveis, temos

$$\frac{1 + x}{x} \, dx + \frac{1 - y}{y} \, dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0.$$

Integrando, obtemos

$$L|x| + x + L|y| - y = c \quad \text{ou} \quad L|xy| + x - y = c.$$

EXERCÍCIOS A.3.

1. Resolver as equações diferenciais abaixo:

a) $3 e^x \operatorname{tg} y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$

b) $dy + y \operatorname{tg} x \, dx = 0$

c) $(x - y^2 x) \, dx + (y - x^2 y) \, dy = 0$

2. Ache a curva que passa por $(0, -2)$ tal que a declividade $(\operatorname{tg} \alpha)$ num ponto qualquer seja igual à ordenada nesse mesmo ponto acrescida de 3 unidades.

3. Sob certas condições, o açúcar da cana, em água, se transforma em dextrose, numa razão $\frac{dq}{dt}$ que, em qualquer tempo é proporcional à quantidade ainda não transformada. Se, de 75 gramas no tempo $t = 0$, 8 gramas forem transformados nos primeiros 30 minutos, achar a quantidade transformada em $1 \frac{1}{2}$ horas.

4. Em uma certa colônia de bactérias, nascem e morrem em taxas proporcionais ao número presente, de modo que a equação que rege o crescimento da colônia é



$$\frac{dy}{dt} = (k_1 - k_2) y.$$

Determinar k_1 e k_2 , sabendo que a colônia dobra de tamanho cada 24 horas e teria seu tamanho reduzido à metade em 8 horas se não houvesse nascimento.

5. Numa reação química, uma substância A se transforma em outra B com uma velocidade proporcional à quantidade A ainda não transformada. Dispondo inicialmente de 8 gramas de A, verifica-se que ao cabo de meia hora restam ainda 4 gramas. Achar a expressão da quantidade que resta no fim de t horas. Quantos gramas restam ao cabo de 2 horas?
6. A meia-vida de uma substância radioativa é definida como o espaço de tempo necessário para que metade dos átomos em qualquer amostra da substância decaiam.
 - a) A meia-vida do carbono radioativo 14 é 5.600 anos. Ache a quantidade de carbono 14 que resta de uma amostra de quantidade x_0 ao fim de t anos (suponha a taxa de queda proporcional à quantidade presente).
 - b) Se 90% do carbono 14 de uma dada amostra de carbono de caiu, ache a idade da amostra.

A.4. EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM UM:

Uma equação linear de ordem um é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x), \quad (1)$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas.

Se $P(x) \equiv 0$, a equação é dita linear homogê-

nea. Caso contrário, linear não homogênea.

Para acharmos a solução geral de (1), multipliquemos a equação (1) por $e^{\int P(x) dx}$, ou seja,

$$e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x) dx} P(x) y = e^{\int P(x) dx} Q(x).$$

Pela regra do produto,

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x) dx} \cdot y] = e^{\int P(x) dx} Q(x) \quad \text{ou}$$

$$e^{\int P(x) dx} y = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + c$$

e assim,

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + c \right]$$

é a solução geral da equação (1).

Quando $Q(x) \equiv 0$, temos que

$y = c e^{-\int P(x) dx}$ é a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) y$$

OBSERVAÇÃO: A função $e^{\int P(x) dx}$ introduzida acima é chamada um fator integrante para a equação $y' + P(x) y = Q(x)$.

EXEMPLOS:

a) Resolver a equação $\frac{dy}{dx} + \sin x y = 0$

com a condição inicial $y_0 = 3$ e $x_0 = 0$ (ou $y(0) = 3$).

Temos a solução geral

$$y = c e^{-\int \sin x dx} = c e^{\cos x}$$

Pela condição inicial, $3 = c e$, ou $c = 3e^{-1}$.

Assim, $y = 3e^{\cos x - 1}$ é a solução procurada.

b) Resolver $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 4x$, $x > 0$, com a condição $y(1) = 2$.

O fator integrante é

$$e^{\int P(x) dx} = e^{\int 1/x dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$$

Assim,

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{1}{x} y = x \cdot 4x \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} (xy) = 4x^2 \quad \text{ou}$$

$$xy = \int 4x^2 dx + c \quad \text{e, logo,} \quad xy = \frac{4}{3} x^3 + c.$$

$$\text{Então,} \quad y = \frac{4}{3} x^2 + \frac{c}{x}$$

$$\text{Pela condição inicial} \quad y(1) = 2, \quad 2 = \frac{4}{3} + c \quad \text{ou} \quad c = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Portanto} \quad y = \frac{4}{3} t^2 + \frac{2}{3t} \quad \text{é a solução procurada.}$$

EXERCÍCIOS A.4.

1. Resolver as equações, dadas as condições iniciais:

$$\text{a) } e^{-x} \frac{dy}{dx} + 2 e^x y = e^x, \quad y(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

$$\text{b) } \frac{dy}{dx} - 2xy = x, \quad y(0) = 0$$

$$\text{c) } \frac{dy}{dt} = (\cos t) y, \quad y(0) = 1$$

2. Uma colônia de bactérias cresce a uma razão proporcional ao número de bactérias presente. Se o número duplica em 24 horas, quantas horas serão necessárias para que as bactérias aumentem de 100 vezes a sua quantidade original?



1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated September 17, 1787. It is a very important document, as it is the first official communication from the President to the Congress. The letter is written in a very formal and dignified style, and it is a very good example of the writing of the time.

2. The second part of the document is a letter from the President to the Congress, dated September 17, 1787. It is a very important document, as it is the first official communication from the President to the Congress. The letter is written in a very formal and dignified style, and it is a very good example of the writing of the time.

3. The third part of the document is a letter from the President to the Congress, dated September 17, 1787. It is a very important document, as it is the first official communication from the President to the Congress. The letter is written in a very formal and dignified style, and it is a very good example of the writing of the time.

4. The fourth part of the document is a letter from the President to the Congress, dated September 17, 1787. It is a very important document, as it is the first official communication from the President to the Congress. The letter is written in a very formal and dignified style, and it is a very good example of the writing of the time.

5. The fifth part of the document is a letter from the President to the Congress, dated September 17, 1787. It is a very important document, as it is the first official communication from the President to the Congress. The letter is written in a very formal and dignified style, and it is a very good example of the writing of the time.

APÊNDICE B - INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES A DADOS EXPERIMENTAIS:
MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

No primeiro semestre, vimos que uma condição ne
cessária para que $z = z(x)$ tivesse um extremo em $x = x_0$ e
ra que $dz = z'(x_0)dx = 0$ para todo dx , resultando daí
que, necessariamente $z'(x_0) = 0$.

No caso de z ser uma função a duas variáveis
podemos, de igual modo, expressar essa condição colocando

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) dy = 0$$

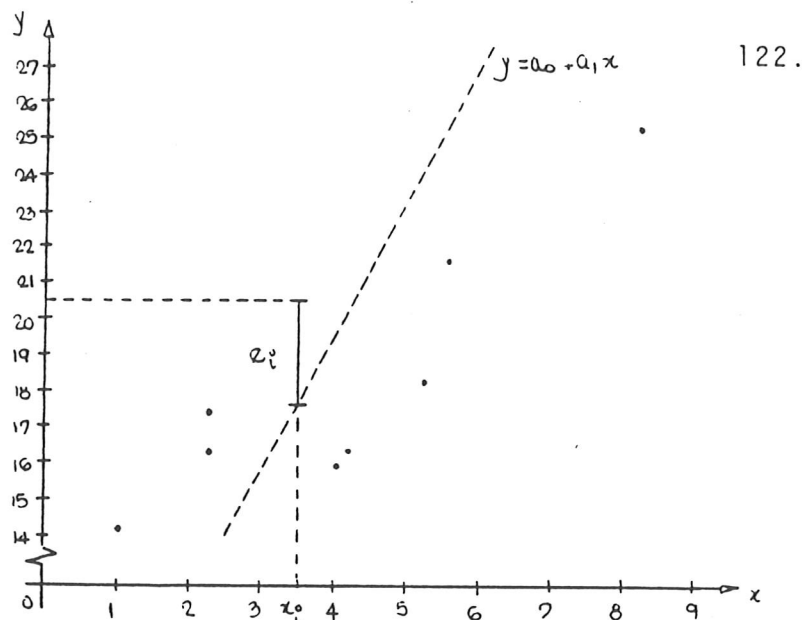
para todo dx e dy , resultando necessariamente que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Sejam dados os pontos

x	y
4,0	15,9
3,5	20,4
8,1	25,2
2,3	16,1
4,1	16,1
5,2	18,0
2,1	17,3
5,5	21,5
1,0	14,0

cujo gráfico é representado abaixo:



Suponha que queiramos adaptar a esses pontos uma função linear $y = a_0 + a_1 x$.

O problema é descobrir que valores atribuir a a_0 e a_1 .

Seja e_i (chamado erro ou desvio) a diferença do valor observado y_i ao valor calculado pela função linear $a_0 + a_1 x_i$ (vide figura). Assim, $e_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i)$.

O método dos quadrados mínimos se resume na minimização da função

$$Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

em relação às incógnitas a_0 e a_1 .

Ou seja, queremos ajustar aos pontos (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ uma reta $y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$ tal que

$$Q(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

seja mínima para $a_0 = \hat{a}_0$ e $a_1 = \hat{a}_1$.

Pelo comentário no início dessa seção, é neces-

sário que

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} (\hat{a}_0, \hat{a}_1) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial a_1} (\hat{a}_0, \hat{a}_1) = 0, \quad \text{ou seja,}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) (-1) = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) (-x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} \sum_{i=1}^n (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i) x_i - y_i x_i] = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} n \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{cases}$$

Logo, a solução $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_1$ que minimiza

$Q(a_0, a_1)$ é obtida do sistema acima, chamado sistema de equações normais.

Voltemos ao exemplo dado. Para facilitar os cálculos, organizemos a tabela abaixo, completando, inicialmente, as colunas de (1) a (4):

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$
15,9	4,0	16,00	63,60	18,31	-2,41
20,4	3,5	12,25	71,40	17,62	2,78
25,2	8,1	65,61	204,12	23,95	1,25
16,1	2,3	5,29	37,03	15,97	0,13
16,1	4,1	16,81	66,01	18,45	-2,35
18,0	5,2	27,04	93,60	19,96	-1,96
17,3	2,1	4,41	36,33	15,70	1,60
21,5	5,5	30,25	118,25	20,37	1,13
14,0	1,0	1,00	14,00	14,18	-0,18
9 $\sum_{i=1} 164,5$	35,8	178,66	704,34	164,51	-0,01

Temos, então, as equações normais

$$\begin{cases} 9 \hat{a}_0 + 35,8 \hat{a}_1 = 164,5 & \text{(I)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35,8 \hat{a}_0 + 178,66 \hat{a}_1 = 704,34 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo (II) por 35,8 e multiplicando por (-9),

$$\begin{cases} 9 \hat{a}_0 + 35,8 \hat{a}_1 = 164,5 & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 \hat{a}_0 - 44,9 \hat{a}_1 = -177,1 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Somando-se (III) e (IV), temos

$$-9,11 \hat{a}_1 = -12,53 \Rightarrow \hat{a}_1 = 1,375.$$

Logo, $\hat{a}_0 = 12,81$ e a solução de quadrados mínimos será $\hat{y} = 12,81 + 1,375 x$.

Com essa solução, podemos completar as colunas (5) e (6) da tabela acima, correspondendo $\hat{a}$ estimativa $\hat{y}_i$ e ao erro cometido $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$.

A solução de quadrados mínimos, além de minimizar a soma de quadrados dos desvios, acarreta num balanceamento entre os erros positivos e negativos. A menos de aproximação, a soma $\sum e_i$ deve dar zero.

Generalizemos o que foi visto acima, considerando o modelo $y = a_0 + a_1 f(x)$.

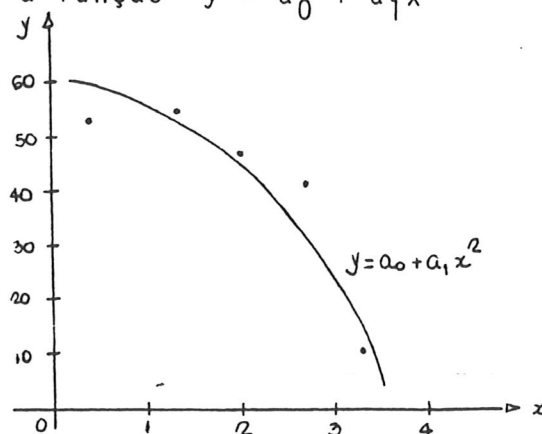
Do que foi visto anteriormente, se $f_i = f(x_i)$, a solução de quadrados mínimos $\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 f(x)$ será obtida pela resolução do sistema de equações normais abaixo

$$\begin{cases} n \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n f_i = \sum y_i \\ \hat{a}_0 \sum f_i + \hat{a}_1 \sum f_i^2 = \sum y_i f_i \end{cases}$$

EXEMPLOS:

a) Ajustar aos pontos abaixo, a função $y = a_0 + a_1 x^2$

x	y
1,4	54,5
3,2	12,8
2,5	40,0
0,4	53,8
1,9	47,6



Organizemos o quadro seguinte:

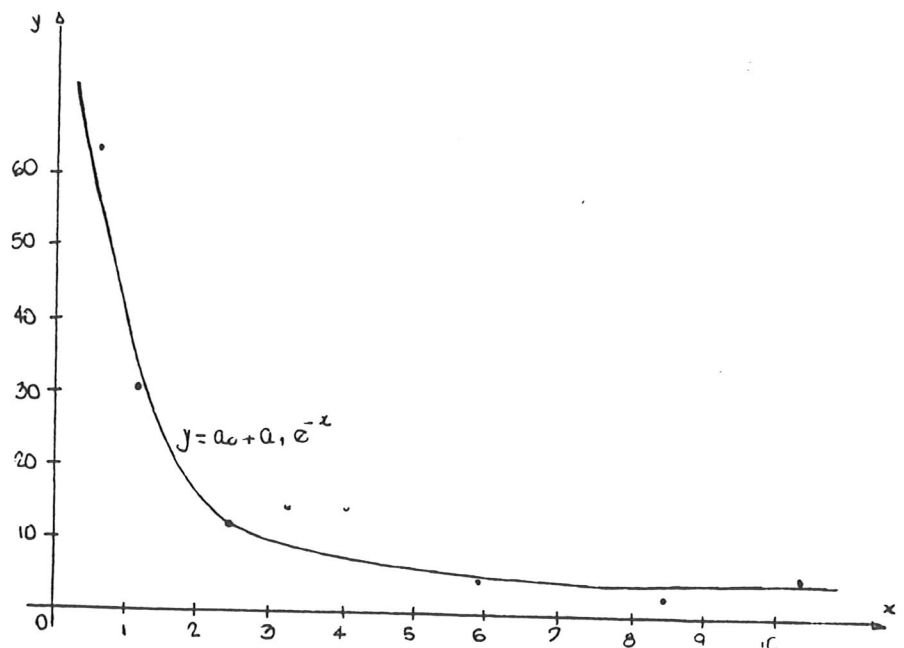
y_i	x_i	$f_i = x_i^2$	f_i^2	$f_i y_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$
54,5	1,4	1,96	3,8416	106,820	52,12	2,38
12,8	3,2	10,24	104,8576	131,072	17,59	-4,79
40,0	2,5	6,25	39,0625	250,000	34,23	5,77
53,8	0,4	0,16	0,0256	8,608	59,62	-5,82
47,6	1,9	3,61	13,0321	171,836	45,24	2,36
Σ 208,7		22,22	160,8194	668,336	208,80	-0,10

Resolvendo as equações normais, obtemos

$$\bar{y} = 60,29 - 4,17 x^2$$

b) Considere os dados abaixo:

y_i	x_i
30,1	1,2
13,6	4,1
1,1	8,4
14,0	3,2
7,0	10,5
62,6	0,5
12,2	2,5
5,2	6,0



Ajustar a função $y = a_0 + a_1 e^{-x}$ aos pontos dados.

No caso, temos $f(x) = e^{-x}$ e podemos organizar o sistema de equações normais, com base no quadro abaixo:

y_i	x_i	$f_i = e^{-x_i}$	f_i^2	$f_i y_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{e}_i$
30,1	1,2	0,30119	0,090718	9,065819	33,49	-3,39
13,6	4,1	0,01657	0,000275	0,225352	7,37	6,23
1,1	8,4	0,00022	0,000000	0,000242	5,87	-4,77
14,0	3,2	0,04076	0,001662	0,570640	9,59	4,41
7,0	10,5	0,00003	0,000000	0,000210	5,85	1,15
62,6	0,5	0,60653	0,367879	37,968778	61,51	1,09
12,2	2,5	0,11080	0,006738	1,351760	16,02	-3,82
5,2	6,0	0,00248	0,000006	0,012896	6,08	-0,88
Σ 145,8		1,07858	0,467278	49,195697	145,78	0,02

As equações normais ficam

$$\begin{cases} 8 \hat{a}_0 + 1,07858 \hat{a}_1 = 148,8 & (I) \\ 1,07858 \hat{a}_0 + 0,467278 \hat{a}_1 = 49,195697 & (II) \end{cases}$$



Dividindo (II) por 1,07858,

$$\begin{cases} 8 \hat{a}_0 + 1,07858 \hat{a}_1 = 145,8 & \text{(III)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_0 + 0,433234 \hat{a}_1 = 45,611542 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (IV) por (-8) e somando esta a (III), temos

$$-2,387292 \hat{a}_1 = -219,092336 \rightarrow \hat{a}_1 = 91,774419$$

Logo, $\hat{a}_0 = 5,851743$ e a solução de quadrados mínimos fica

$$\hat{y} = 5,85 + 91,77 e^{-x}.$$

Para finalizar, citeamos o caso de 3 incógnitas (a_0 , a_1 e a_2) a uma variável independente.

À semelhança do que já foi visto, se queremos ajustar a pontos dados uma função do tipo

$$y = a_0 + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x),$$

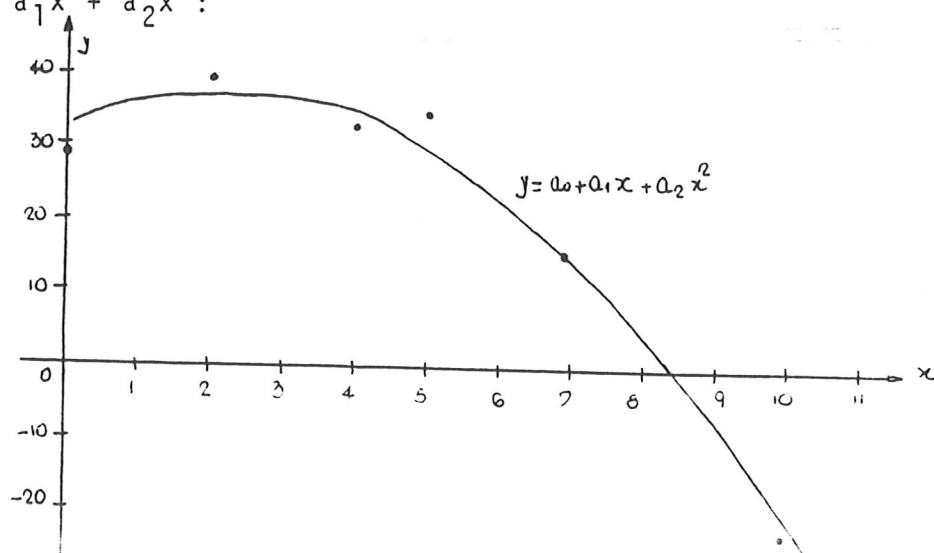
basta resolver o sistema de equações normais

$$\begin{cases} n \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n f_{1i} + \hat{a}_2 \sum f_{2i} = \sum y_i \\ \hat{a}_0 \sum f_{1i} + \hat{a}_1 \sum f_{1i}^2 + \hat{a}_2 \sum f_{1i} f_{2i} = \sum y_i f_{1i} \\ \hat{a}_0 \sum f_{2i} + \hat{a}_1 \sum f_{2i} f_{1i} + \hat{a}_2 \sum f_{2i}^2 = \sum y_i f_{2i} \end{cases}$$

EXEMPLO: Dados os pontos abaixo, ajustá-los a uma função do

tipo $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$:

y	x
33	5
-23	10
38	2
32	4
-36	11
29	0
14	7



Organizando o quadro abaixo, temos:

y_1	$f_{1i} =$ x_i	$f_{2i} =$ x_i^2	f_{1i}^2	$f_{1i}f_{2i}$	f_{2i}^2	y_1f_{2i}	y_1f_{1i}	$\hat{y}_i$	$\bar{e}_i$
33	5	25	25	125	625	165	825	30,01	2,99
-23	10	100	100	1000	10000	-230	-2300	-21,28	-1,72
38	2	4	4	8	16	76	152	36,19	1,83
32	4	16	16	64	256	128	812	34,11	-2,11
-36	11	121	121	1331	14641	-396	-4356	-37,69	1,69
29	0	0	0	0	0	0	0	3,02	-1,02
14	7	49	49	343	2401	98	686	15,65	-1,65
Σ	87	315	315	2871	27939	-159	-4481	86,99	0,01

As equações normais ficam

$$\begin{cases} 7 \hat{a}_0 + 39 \hat{a}_1 + 315 \hat{a}_2 = 87 \\ 39 \hat{a}_0 + 315 \hat{a}_1 + 2871 \hat{a}_2 = -159 \\ 315 \hat{a}_0 + 2871 \hat{a}_1 + 27939 \hat{a}_2 = -4481 \end{cases}$$

Dividindo-se as equações acima pelos coeficientes de $\hat{a}_0$,

$$\begin{cases} \hat{a}_0 + 5,5714 \hat{a}_1 + 45,0000 \hat{a}_2 = 12,4286 & \text{(I)} \\ \hat{a}_0 + 8,0769 \hat{a}_1 + 73,6153 \hat{a}_2 = -4,0769 & \text{(II)} \\ \hat{a}_0 + 9,1143 \hat{a}_1 + 88,6952 \hat{a}_2 = -14,2254 & \text{(III)} \end{cases}$$

Fazendo (II) - (I) e (III) - (I), temos

$$\begin{cases} 2,5055 \hat{a}_1 + 28,6153 \hat{a}_2 = -16,5055 \\ 3,5429 \hat{a}_1 + 43,6952 \hat{a}_2 = -26,6540 \end{cases}$$

Dividindo-se as equações pelos coeficientes de $\hat{a}_1$,

$$\begin{cases} \hat{a}_1 + 11,4210 \hat{a}_2 = -6,5877 & \text{(IV)} \\ \hat{a}_1 + 12,3332 \hat{a}_2 = -7,5232 & \text{(V)} \end{cases}$$



Fazendo (V) - (IV),

$$0,9122 \hat{a}_2 = -0,9355 \Rightarrow \hat{a}_2 = -1,0255$$

$$\text{Logo, } \hat{a}_1 = 5,1245 \text{ e } \hat{a}_0 = 30,0253$$

Portanto a solução de quadrados mínimos fica

$$\hat{y} = 30,0253 + 5,1245 x - 1,0255 x^2.$$

BIBLIOGRAFIA

DEMIDOVICH, B. Problems in Mathematical Analysis.

LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica (vol. 1 e 2).

MUNEM, M.A. & D.J.FOULIS. Cálculo (vol. 1 e 2).

PIMENTEL GOMES, F. & I.R.NOQUEIRA. Análise Matemática.

PISKONOV, N. Differential and Integral Calculus.

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica (vol. 1 e 2).

