UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA "LUIZ DE QUEIROZ"
Departamento de Matemática e Estatística

CÁLCULO II

Cássio Roberto de Melo Godoi
Samuel Tanaami

CENTRO ACADÊMICO "LUIZ DE QUEIROZ"
DEPARTAMENTO EDITORIAL
PIRACICABA

1 9 8 7

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA "LUIZ DE QUEIROZ"
Departamento de Matemática e Estatística

CÁLCULO II

Cássio Roberto de Melo Godoi
Samuel Tanaami

CENTRO ACADÊMICO "LUIZ DE QUEIROZ"
DEPARTAMENTO EDITORIAL
PIRACICABA

1 9 8 7

PREFÁCIO

As presentes notas destinam-se a alunos do segundo semestre dos cursos de Engenharia Agronômica e Engenharia Florestal.

O nosso objetivo é oferecer um roteiro didático e accessível que englobe o programa de Cálculo II de maneira satisfatória. O texto deve ser, porém, complementado com algum livro constante na bibliografia.

Visando nosso objetivo, omitimos várias demonstrações por considerarmos extensas ou excessivamente técnicas. Em muitas partes apresentamos a teoria sob um ponto de vista intuitivo em lugar de um desenvolvimento lógico rigoroso.

Os autores.

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO 1 - INTEGRAL INDEFINIDA	1
1.1. Definições	1
1.2. Tabela Básica	2
1.3. Propriedades	4
CAPÍTULO 2 - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO	8
2.1. Integração por Substituição	8
2.2. Integração por Partes	11
2.3. Integrais de Funções Contendo um Trinômio Quadrado	13
2.4. Integração de Funções Racionais	18
2.5. Integração de Certas Classes de Funções Trigonométricas	25
2.6. Integração de Funções Irracionais	27
2.7. Integração do Tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ por Meio de Substituições Trigonométricas	29
CAPÍTULO 3 - A INTEGRAL DEFINIDA	33
3.1. Definições	33
3.2. Propriedades Básicas da Integral Definida	38
3.3. O Teorema Fundamental do Cálculo	43
CAPÍTULO 4 - INTEGRAIS IMPRÓPRIAS	51
4.1. Integrais com Limites de Integração Infinitos	51
4.2. Integrais com Integrandos Infinitos	55

Página

CAPÍTULO 5 - FUNÇÕES GAMA E BETA 60
5.1. Função Gama 60
5.2. Função Beta 62

CAPÍTULO 6 - APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA 66
* 6.1. Áreas em Coordenadas Cartesianas 66
6.2. Comprimento de Arco em Coordenadas Cartesianas 70
6.3. Volumes de Sólidos de Revolução em Coordenadas Cartesianas 73
6.4. Coordenadas Polares 78
6.5. Gráficos Polares 81
6.6. Áreas em Coordenadas Polares 86
6.7. Comprimento de Arco em Coordenadas Polares 89

CAPÍTULO 7 - FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS 91
7.1. Definições 91
7.2. Derivadas Parciais 92
7.3. Incremento e Diferencial Total 99
7.4. Integrais Duplas 102

APÊNDICE A - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS 112
A.1. Definições 112
A.2. Equações Diferenciais de Ordem Um ... 114
A.3. Equações com Variáveis Separadas e Separáveis 115
A.4. Equações Lineares de Ordem Um 118

APÊNDICE B - INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES A DADOS EXPERIMENTAIS: MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS 121

BIBLIOGRAFIA 130

CAPÍTULO 1 - A INTEGRAL INDEFINIDA

1.1. DEFINIÇÕES

No cálculo I, consideramos a seguinte situação: dada uma função $F(x)$, achar sua derivada, isto é, a função $f(x) = F'(x)$.

Consideremos, agora, o problema inverso: dada a função $f(x)$, achar uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

DEFINIÇÃO 1: A função $F(x)$ é chamada a antiderivada da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ se $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$.

EXEMPLO: Encontre a antiderivada da função $f(x) = x^3$.

Da definição acima, segue que a função $F(x) = \frac{x^4}{4}$ é uma antiderivada, uma vez que $F'(x) = x^3$.

OBSERVAÇÃO: É fácil ver que se, para uma dada função $f(x)$ existe uma antiderivada, então esta antiderivada não é única. No exemplo anterior, poderíamos tomar as seguintes funções como antiderivadas:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + 2; \quad F(x) = \frac{x^4}{4} - 8,$$ ou, de modo geral,

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + C,$$ (onde C é uma constante arbitrária), pois

$$\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3.$$

Temos, na verdade, os seguintes teoremas:

TEOREMA 1: Se F é uma função tal que $F'(x) = 0$ para todos

os valores de x no intervalo $[a, b]$, então F é constante em I.

TEOREMA 2: Se F e G são duas funções tais que $F'(x) = G'(x)$ para todos os valores de x no intervalo $[a, b]$, então existe uma constante C tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo x em $[a, b]$.

TEOREMA 3: Se $F(x)$ é uma antiderivada qualquer de $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$, então a antiderivada mais geral de f em $[a, b]$ é dada por:

$$F(x) + C \qquad (1)$$

onde C é uma constante arbitrária e toda antiderivada de $f(x)$ em $[a, b]$ pode ser obtida de (1) atribuindo valores específicos a C.

DEFINIÇÃO 2: Se a função $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, então a expressão $F(x) + C$ é a integral indefinida da função $f(x)$ e é denotado pelo símbolo:

$\int f(x)\, dx$.

Então, por definição,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \qquad \text{se} \qquad F'(x) = f(x).$$

A função $f(x)$ é chamada integrando, $f(x)\, dx$ é o elemento de integração e $\int$ é o sinal da integral.

Portanto, uma integral indefinida é uma família de funções $y = F(x) + C$.

Da definição segue que:

a) $\left(\int f(x)\, dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

b) $d\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)\, dx$

c) $\int d\, F(x) = \int f(x)\, dx = F(x) + C$

1.2. TABELA BÁSICA

Antes de começarmos com as técnicas de inte-

gração, daremos uma tabela básica de integrais de funções simples. Ela decorre da definição acima e da tabela de derivadas do cálculo I.

a) $\int dx = x + C$

b) $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

c) $\int x^{-1} \, dx = L|x| + C$

d) $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{La} + C$

e) $\int e^x \, dx = e^x + C$

f) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$

g) $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} L \left| \dfrac{a + x}{a - x} \right| + C \qquad (a \neq 0)$

h) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$

i) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = L|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \qquad (a \neq 0)$

j) $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

l) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$

m) $\int \operatorname{tg} x \, dx = -L|\cos x| + C$

n) $\int \operatorname{cotg} x \, dx = L|\operatorname{sen} x| + C$

o) $\int \sec x \, dx = L|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$

p) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = L|\operatorname{cosec} - \operatorname{cotg} x| + C$

q) $\int \sec^2 x \, dx = tg\ x + C$

r) $\int cossec^2 x \, dx = - cotg\ x + C$

s) $\int \sec x \ tg\ x \, dx = \sec x + C$

t) $\int cossec\ x\ cotg\ x \, dx = - cossec\ x + C$

u) $\int sen^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x - sen\ x \cos x) + C$

v) $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + sen\ x \cos x) + C$

EXERCÍCIOS 1.2.

1. Justifique a tabela de integrais básicas.

2. Sejam F e G antiderivadas de f e g, respectivamente. É verdade que:

   a) FG é antiderivada de fg?

   b) F/G é antiderivada de f/g?

   Justifique.

3. Seja F uma antiderivada de f. Prove que:

   a) Se F é uma função par, então f é impar.

   b) Se F é uma função ímpar, então f é uma função par.

1.3. PROPRIEDADES

TEOREMA 1: $\int [f_1(x) + f_2(x)] \, dx = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx.$ (1)

DEM.: Derivemos ambos os lados da equação:

$(\int [f_1(x) + f_2(x)] \, dx)' = f_1(x) + f_2(x)$

$(\int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx)' = (\int f_1(x) \, dx)' + (\int f_2(x) \, dx)' =$

$f_1(x) + f_2(x).$

As derivadas são iguais. Em outras palavras, a derivada de qualquer antiderivada do lado esquerdo é igual à derivada de qualquer função do lado direito da equação. Portanto, pelo teorema 2 da seção 1.1, capítulo I, qualquer função do lado esquerdo de (1) difere de qualquer função do lado direito de (1) por uma constante. E é assim que devemos entender a equação (1).

TEOREMA 2: $\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$, a constante. (2)

DEM.: Para provar (2), derivemos os dois lados de (2):

$$\left(\int a\, f(x)\, dx\right)' = a\, f(x)$$

$$\left(a \int f(x)\, dx\right)' = a\left(\int f(x)\, dx\right)' = a\, f(x)$$

As derivadas são iguais e portanto, como em (1), a diferença de quaisquer duas funções dos lados esquerdo e direito é uma constante.

TEOREMA 3: Se $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, então

$$\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \qquad (3)$$

DEM.: Derivando ambos os lados de (3), temos:

$$\left(\int f(ax + b)\, dx\right)' = f(ax + b)$$

$$\left(\frac{1}{a} F(ax + b) + C\right)' = \frac{1}{a} (F(ax + b))' = \frac{1}{a} F'(ax + b) \,.\, a =$$

$$= f(ax + b).$$

EXEMPLOS:

a) $\int (2x^3 - 3 \operatorname{sen} x + 5 \sqrt{x})\, dx = \int 2x^3\, dx - \int 3 \operatorname{sen} x\, dx +$

$$+ \int 5 \sqrt{x}\, dx = 2 \int x^3\, dx - 3 \int \operatorname{sen} x\, dx + 5 \int \sqrt{x}\, dx =$$

$$= 2 \frac{x^4}{4} - 3(-\cos x) + 5 \,.\, \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} + C =$$

$$= \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C$$

b) $$\int \left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{6} + 7 \right) dx = \int \frac{6}{\sqrt[3]{x}} dx - \int \frac{\sqrt[3]{x}}{6} dx + \int 7 \, dx =$$

$$= 6 \int x^{-1/3} dx - \frac{1}{6} \int x^{1/3} dx + 7 \int dx =$$

$$= 6 \frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{6} \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + 7x + C$$

$$= 9 \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{8} x \sqrt[3]{x} + 7x + C$$

c) $$\int \frac{dx}{x+2} = L\,|x+2| + C$$ vem de $\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{a} \cdot F(ax \ldots$

$\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{1} \cdot L|x+2| + C$

d) $$\int \cos 7x \, dx = \frac{1}{7} \operatorname{sen} 7x + C$$

e) $$\int \operatorname{sen} (2x - 6) \, dx = -\frac{1}{2} \cos (2x - 6) + C$$

OBS.: Os três últimos exemplos decorrem direto da tabela básica e do teorema 3 acima.

EXERCÍCIOS 1.3.

1. Calcular as integrais indefinidas:

   a) $\int x (x + a) (x + b) \, dx$, a e b constantes.

   b) $\int \sqrt{2 px} \, dx$, p constante.

   c) $\int (\sqrt{x} + 1) (x - \sqrt{x} + 1) \, dx$

   d) $$\int \frac{dx}{x^2 + 7}$$

   e) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}$

g) $\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$ Erro! é 4

h) $\int tg^2 \, x \, dx$ Dica: $tg^2 \, x = sec^2 \, x - 1$

i) $\int (10 \, x^4 - 6 \, x^3 + 5) \, dx$

j) $\int \left(\frac{4}{x^7} - \frac{7}{x^4} + x \right) dx$

l) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2} x^{-2} + 5 \right) dx$

m) $\int \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 dx$

n) $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$

2. Obtenha a função que passa por (1, 1) cuja derivada é $x^2 + 1$.

3. Qual a equação do movimento de um móvel que parte do repouso e cuja velocidade no tempo t é dada por $v(t) = t^3 + 3t$?

4. A taxa de variação de temperatura T de uma solução é dada por $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4} t + 10$, onde t é o tempo em minutos e T é medida em graus Celsius. Se a temperatura é 5^oC em t=0, obtenha uma fórmula para T em função de t.

CAPÍTULO 2 - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

2.1. INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Suponha que queiramos achar a integral $\int f(x)\,dx$. Suponha também, que não podemos achar diretamente a antiderivada de $f(x)$, mas sabemos que ela existe.

Vamos mudar a variável na expressão dentro do sinal da integral, pondo $x = \varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é uma função contínua com derivada contínua, tendo uma função inversa. Então, $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Provemos que $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$.

Do mesmo modo que anteriormente, verifiquemos que as derivadas de ambos os lados são iguais:

$$(\int f(x)\,dx)'_x = f(x)$$

Como $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$ (Cálculo I).

Utilizando a regra da cadeia,

$$(\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt)'_x = (\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt)'_t \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} =$$

$$= f[\varphi(t)] = f(x).$$

OBSERVAÇÃO: Às vezes é melhor escolher uma mudança de variável da forma $t = \psi(x)$ ao invés de $x = \varphi(t)$.

EXEMPLOS:

Calcule

a) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\cos x\,dx$

Fazendo a substituição $t = \operatorname{sen} x$, temos $dt = \cos x\,dx$ e

$$\int\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int\sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2\operatorname{sen}^{3/2} x}{3} + C.$$

b) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

Se $u = 5x - 2$, $du = 5\,dx$ e $dx = \frac{1}{5}\,du$. Então,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{5}\,\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{u} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

c) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

Faremos a substituição $u = x^3$. Então, $du = 3x^2\,dx$ e

$x^2\,dx = \frac{du}{3}$. Logo,

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

EXERCÍCIOS 2.1.

1. Aplicando substituições convenientes, calcule as seguintes integrais:

   a) $\int\frac{a\,dx}{a-x}$, a constante

   b) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$

   c) $\int\frac{2x+3}{2x+1}\,dx$ Dica: Efetue o quociente.

d) $\int \left(a + \frac{b}{x - a} \right)^2 dx$, a e b constantes

e) $\int \frac{b\, dy}{\sqrt{1 - y}}$, b constante

f) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

g) $\int \frac{x^2\, dx}{1 + x^6}$

h) $\int \sqrt{\frac{\text{arc sen } x}{1 - x^2}}\, dx$

i) $\int \frac{\text{arc tg } x/2}{4 + x^2}\, dx$

j) $\int a\, e^{-mx}\, dx$, a e m constantes

l) $\int 4^{2-3x} dx$

m) $\int (e^t - e^{-t})\, dt$

n) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x\, b^x}\, dx$, a e b constantes

o) $\int x\, 7^{x^2}\, dx$

p) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

q) $5^{\sqrt{x}}\, \frac{dx}{\sqrt{x}}$

r) $\int \frac{e^x\, dx}{e^x - 1}$

s) $\int e^x \sqrt{a - b\, e^x}\, dx$, a e b constantes

t) $\int \cos \sqrt{x}\, \frac{dx}{\sqrt{x}}$

u) $\int sen^2 x\, dx$ (sem usar a tabela) Dica: $sen^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

v) $\int \dfrac{x\, dx}{\cos^2(x^2)}$

w) $\int tg^3 \dfrac{x}{3} \sec^2 \dfrac{x}{3}\, dx$

x) $\int \dfrac{\sqrt{tg\, x}}{\cos^2 x}\, dx$

y) $\int \dfrac{1 + sen\, 3x}{\cos^2 3x}\, dx$

z) $\int \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 4x + 1}\, dx$

2. Aplicando as substituições indicadas, obtenha as integrais:

a) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}$, $x = \dfrac{1}{t}$

b) $\int \dfrac{dx}{e^x + 1}$, $x = -Lt$

c) $\int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x + 1}}$, $b = \sqrt{x + 1}$

d) $\int \dfrac{\cos x\, dx}{\sqrt{1 + sen^2 x}}$, $t = sen\, x$

2.2. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Este tópico está intimamente relacionado com a regra de derivação de produto de funções. Fornece um artifício extremamente simples e importante para o cálculo de integrais indefinidas.

TEOREMA: Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções diferenciáveis. Então

$\int u(x)\ v'(x)\ dx = u(x)\ v(x) - \int v(x)\ u'(x)\ dx.$

OBSERVAÇÃO: Como $du = u'(x)\ dx$ e $dv = v'(x)\ dx$, a expressão acima pode ser escrita em sua forma mais conhecida:

$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$

DEM.: Como

$(u(x)\ v(x))' = u(x)\ v'(x) + u'(x)\ v(x)$ e, logo,

$u(x)\ v'(x) = (u(x)\ v(x))' - u'(x)\ v(x),$

podemos escrever

$\int u(x)\ v'(x)\ dx = \int (u(x)\ v(x))'dx - \int v(x)\ u'(x)\ dx$ e,

finalmente, $\int u(x)\ v'(x)\ dx = u(x)\ v(x) - \int v(x)\ u'(x)\ dx.$

EXEMPLOS: Calcular

a) $\int x\ e^{2x}\ dx$

Seja $u = x$ e $dv = e^{2x}\ dx$. Então,

$du = dx$ e $v = \dfrac{1}{2}\ e^{2x}$ $\quad \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u}+C = \frac{1}{2}e^{2x}+C$

$u = 2x$

$du = 2dx$

Então, temos

$$\int x\ e^{2x}\ dx = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\frac{1}{2}\ e^{2x}}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{2}\ e^{2x}}^{v}\ \overbrace{dx}^{du} = \frac{1}{2}\ x\ e^{2x} - \frac{1}{4}\ e^{2x} + C$$

b) $\int x\ \sec^2 x\ dx$

Seja $u = x$ e $dv = \sec^2 x\ dx$. Logo,

$du = dx$ e $v = tg\ x$

Então,

$+L|\cos x|$

$$\int x\ \sec^2 x\ dx = x\ tg\ x - \int tg\ x\ dx = x\ tg\ x - L|\sec x| + C$$

$-(-L|\cos x|)+C$

c) $\int x^2\ e^{2x}\ dx$

Seja $u = x^2$ e $dv = e^{2x}\ dx$. Então,

$du = 2x\ dx$ e $v = \dfrac{1}{2}\ e^{2x}$

Então,

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = x^2\left(\frac{1}{2} e^{2x}\right) - \int\left(\frac{1}{2} e^{2x}\right) . \; 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x\, e^{2x}\, dx$$

Para calcular a integral ã direita da equação acima, devemos novamente integrar por partes. Observando o exemplo a,

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x\, e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

EXERCÍCIOS 2.2.

Calcule as integrais

a) $\int Lx\, dx$

b) $\int arc\; tg\; x\, dx$

c) $\int x \cos 3x\, dx$

d) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

e) $\int x\, 2^{-x}\, dx$

f) $\int x\, sen\, x \cos x\, dx$

g) $\int (Lx)^2\, dx$

h) $\int \frac{Lx}{x^3}\, dx$

i) $\int x\, arc\; tg\; x\, dx$

j) $\int e^x\, sen\, x\, dx$

l) $\int \frac{arc\; sen\; x}{x^2}\, dx$

m) $\int L(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$

n) $\int arc\; sen\; x \dfrac{x\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

2.3. INTEGRAIS DE FUNÇÕES CONTENDO UM TRINÔMIO QUADRADO

CASO 1

2.3.1. Vamos considerar a integral

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Primeiramente, vamos transformar o trinômio do denominador, representando-o como soma ou diferença de quadrados:

1º Passo: colocar a em evidência, tirando-o da integral

2º Passo: Multiplicar e dividir "x" por 2 (se necessário)

3º Passo: somar e subtrair o 2º termo ao quadrado

4º Passo: Fatorar obtendo [illegible]

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

5º Passo: agruparmos termos restantes em $\pm k^2$

onde $\pm k^2 = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}$

6º Passo: Chamar de "u" o conteúdo do parênteses

O sinal depende das raízes do trinômio serem complexas ou reais.

tabela básica

Então, a integral I_1 toma a forma

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}$$

Façamos a mudança de variável

$u = x + \dfrac{b}{2a}$, $du = dx$. Então, $I_1 = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{du}{u^2 \pm k^2}$ que são integrais da tabela básica.

EXEMPLO: Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

$\Delta = 64 - 4(2)(20) < 0$ não há raízes reais

Temos $2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10) =$

$2(x^2 + 4x + 4 - 4 + 10) = 2[(x + 2)^2 + 6]$

Logo,

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{[(x+2)^2 + 6]}$$

Façamos a substituição $u = x + 2$, $du = dx$.

Então,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ arc tg } \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \text{ arc tg } \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

2.3.2. Consideremos uma integral de forma mais geral:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

1º passo: Obter a derivada do denominador pra preparado

Numerador: 2º: no lugar de x coloco a derivada juntando o [illegible] 3: (soma) e subtração [illegible]

Façamos uma transformação no numerador, de tal forma que a expressão linear coincida com a derivada do denominador:

4º: Separamos em 2 integrais, retirando as constantes

5º: na primeira integral, fazemos substituição, usando 1º caso

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\, dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

A segunda integral coincide com a integral anterior I_1. Na primeira integral, façamos a substituição

$u = ax^2 + bx + c$, $du = (2ax + b)\, dx$

Temos $\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\, dx = \int \frac{du}{u} = L|u| + C = L|ax^2 + bx + c| + C.$

Então, $I_2 = \frac{A}{2a} L|ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1$

EXEMPLO: Calcule a integral

$$I = \int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5}\, dx$$

$$I = \int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 2) + (3 + 1)}{x^2 - 2x - 5}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5}\, dx + 4 \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 5} = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5}\, dx +$$

$$+ 4 \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1) - 5 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5}\, dx +$$

$$+ 4 \int \frac{dx}{(x - 1)^2 - 6}$$

Fazendo as substituições

$v = x^2 - 2x - 5, \quad dv = (2x - 2)\, dx \quad$ e

$u = x - 1, \quad du = dx, \quad$ temos

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} + 4 \int \frac{du}{u^2 - 6} = \frac{1}{2} L|v| + 4 \frac{1}{2\sqrt{6}} L\left|\frac{\sqrt{6} - u}{\sqrt{6} + u}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2} L|x^2 - 2x - 5| + \frac{2}{\sqrt{6}} L\left|\frac{\sqrt{6} - (x - 1)}{\sqrt{6} + (x - 1)}\right| + c.$$

Como $u^2 - 6$ está multiplicado por (-1), com relação à tabela, troco o numerador com o denominador no logaritmo como foi feito.

CASO 3

2.3.3. Vamos considerar a integral

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Coincide c/ o caso 1, a não ser pela integral da tabela básica

Pelas observações do ítem 2.3.1., podemos reduzir a integral I_3 a uma das integrais

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}},$$

que são integrais da tabela básica.

CASO 4

2.3.4. Uma integral da forma

$$I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$$

Coincide com o caso 2, exceto pela tabela básica

é calculada utilizando-se as mesmas técnicas do ítem 2.3.2..

EXEMPLO: Obtenha

$$I = \int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx$$

Temos

$$I = \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) + (3 - 10)}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx -$$

$$-7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 6}} = 5 \sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 L|x + 2 +$$

$$+ \sqrt{(x + 2)^2 + 6}| + c.$$

EXERCÍCIOS 2.3.

Calcular:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

b) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$

c) $\int \frac{xdx}{x^2 - 7x + 13}$

d) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$

g) $\int \frac{(x + 3)\, dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$

h) $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}$

2.4. INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

Uma função racional é expressa como quociente de duas funções polinomiais, isto é, como $P(x)/Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Se o grau do numerador é menor que o grau do denominador, a função é chamada própria; caso contrário, é chamada imprópria.

Toda fração imprópria pode ser escrita como soma de um polinômio por uma fração própria, por meio da divisão do numerador pelo denominador, ou seja, se $P(x)/Q(x)$ é uma fração imprópria,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $M(x)$ é um polinômio e $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ é uma fração própria.

EXEMPLO: A fração imprópria $\dfrac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$ pode ser escrito como

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}$$

Como é fácil integrarmos polinômios, a dificuldade em integrarmos funções racionais reside na integração de frações próprias.

DEFINIÇÃO: São chamadas frações parciais, frações próprias da forma:

i) $\dfrac{A}{x - a}$

ii) $\dfrac{A}{(x - a)^k}$ $(k \geq 2$, inteiro)

iii) $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ (as raízes do denominador são complexas)

iv) $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$ (k $\geqslant$ 2, raízes do denominador complexas)

A integração de frações parciais não apresenta dificuldades, como será visto a seguir:

i) $\displaystyle\int \frac{A}{x - a}\, dx = A\, L|x - a| + C$

ii) $\displaystyle\int \frac{A}{(x - a)^k}\, dx = A \int (x - a)^{-k}\, dx = A\, \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k + 1} + C =$

$$= \frac{A}{(1 - k)\,(x - a)^{k-1}} + C$$

iii) $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ já visto na seção anterior

iv) A integral $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}\, dx$ não será vista por não fazer parte dos objetivos do curso.

Suponhamos que temos uma função racional própria $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Assumiremos que os coeficientes dos polinômios são reais e que a função dada é não redutível (isto é, o numerador e o denominador não têm raízes comuns).

Teoremas garantem que toda função racional própria pode ser decomposta em uma soma de frações parciais. Essas frações parciais são determinadas pelas raízes do denominador $Q(x)$. Listamos, agora, os casos possíveis:

CASO 1: As raízes do denominador são reais e distintas, ou seja, $Q(x) = (x - a)\,(x - b) \ldots (x - d)$.

Aqui a fração própria $P(x)/Q(x)$ é decomposta em frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d}$$

EXEMPLO:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

CASO 2: As raízes do denominador são reais e algumas delas são múltiplas, ou seja,

$Q(x) = (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \ldots (x-d)^{\delta}$, $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ inteiros maiores ou iguais a um.

Neste caso, a fração $P(x)/Q(x)$ é decomposta em frações parciais como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)} + \ldots + \frac{D}{(x-d)^{\delta}} + \ldots + \frac{D_{\delta}}{(x-d)}$$

EXEMPLO:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3 (x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

CASO 3: Entre as raízes do denominador, existem raízes complexas distintas (não repetidas).

Essas raízes complexas vem em duplas conjugadas, que dão origem a trinômios do 2º grau. Assim,

$$Q(x) = (x^2+px+q)(x^2+\ell x+s) \ldots (x-a)^{\alpha} \ldots (x-d)^{\delta}$$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é decomposta em

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{Fx+G}{x^2+\ell x+s} + \ldots + \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots +$$

$$+ \frac{D}{(x-d)^{\delta}} + \frac{D_1}{(x-d)^{\delta-1}} + \ldots + \frac{D}{(x-d)}$$

EXEMPLO:

$$\frac{x}{(x^2 + x + 1)\ (x - 1)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + x + 1)} + \frac{A}{(x - 1)}$$

CASO 4: Entre as raízes do denominador, existem raízes complexas múltiplas.

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^{\mu}\ .\ (x^2 + \ell x + s)^{\gamma} \ \dots\ (x - a)^{\alpha}\ \dots\ (x - d)^{\delta}$$

Não estudaremos este caso.

As constantes desconhecidas na decomposição podem ser determinadas reduzindo-se as frações a um denominador comum e igualando-se os coeficientes dos numeradores obtidos. Um modo de facilitar a obtenção destas constantes é atribuir-se valores convenientes à variável x após a redução ao denominador comum.

EXEMPLO:

$$\frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3\ (x - 2)} = \frac{A}{(x + 1)^3} + \frac{A_1}{(x + 1)^2} + \frac{A_2}{(x + 1)} + \frac{B}{(x - 2)}$$

Reduzindo-se ao denominador comum e igualando-se os numeradores, temos:

$$x^2 + 2 = A(x - 2) + A_1(x + 1)\ (x - 2) + A_2\ (x + 1)^2\ (x - 2) + B(x + 1)^3, \forall\ x \qquad (1)$$

Se $x = 2$, $6 = 27\ B \Rightarrow B = \frac{2}{9}$

Se $x = -1$, $3 = -3\ A \Rightarrow A = -1$

Reagrupando-se o lado direito de (1), temos:

$$x^2 + 2 = (A_2 + B)\ x^3 + (A_1 + 3B)\ x^2 + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)\ x + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B)$$

Então $A_2 + B = 0$

$A_1 + 3B = 1$

$A - A_1 - 3A_2 + 3B = 0$

$-2A - 2A_1 - 2A_2 + B = 2$

Logo, $A_2 = -\dfrac{2}{9}$ e $A_1 = \dfrac{1}{3}$

Resumindo, suponhamos que queiramos calcular a integral de uma fração racional

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ou seja, $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Se a dada fração é imprópria, representamos como soma de um polinômio $M(x)$ e uma fração própria $P_1(x)/Q(x)$. Essa fração própria pode ser representada como soma de frações parciais. Então, a integração de uma função racional reduz-se à integração de um polinômio e diversas frações parciais.

EXEMPLOS:

a) Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3\,(x - 2)}\,dx$

Pelo exemplo acima,

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3\,(x - 2)}\,dx = -\int \frac{\overset{A=-1}{dx}}{(x + 1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{\overset{A_1=\frac{1}{3}}{dx}}{(x + 1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{\overset{A_2=-\frac{2}{9}}{dx}}{x + 1} +$$

$$+ \frac{2}{9}\int \frac{\overset{B=\frac{2}{9}}{dx}}{x - 2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x + 1} - \frac{2}{9}\,L|x + 1| +$$

$$+ \frac{2}{9}\,L|x - 2| + C = -\frac{2x - 1}{6(x + 1)^2} + \frac{2}{9}\,L\left|\frac{x - 2}{x + 1}\right| + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)\,(x - 1)}$

Decompondo e integrando em frações parciais, temos

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

Consequentemente, $x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1)$

Se $x = 1$, $1 = 2C$, $C = \frac{1}{2}$

Se $x = 0$, $0 = -B + C$, $B = \frac{1}{2}$

Reagrupando o lado direito da expressão acima, temos $x = (A + C)x^2 + (-A + B)x - B + C$ e, logo, $0 = A + C$ e $A = -\frac{1}{2}$. Então,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x - 1}{x^2 + 1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x - 1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x - 1} =$$

$$= -\frac{1}{4} L|x^2 + 1| + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x + \frac{1}{2} L|x - 1| + C$$

EXERCÍCIOS 2.4.

Resolver as integrais:

a) $\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x - 2)}\,dx$

b) $\int \frac{x\,dx}{(x + 1)(x + 3)(x + 5)}$

c) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx$

d) $\int \frac{x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$

e) $\int \frac{dx}{(x - 1)^2 (x - 2)}$

f) $\int \frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

g) $\int \frac{x^2 \, dx}{(x + 2)^2 (x + 4)^2}$

h) $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$

i) $\int \frac{x^2 - 5x + 8}{(x^2 + 2x - 3)^2} dx$

j) $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$

l) $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$

m) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

n) $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$

o) $\int \frac{dx}{x(x + 1)^2}$

p) $\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2 (x + 1)^2} dx$

q) $\int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx$

r) $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$

s) $\int \dfrac{x^4}{x^4 - 1}\, dx$

t) $\int \dfrac{dx}{(x^2 - 4x + 3)\,(x^2 + 4x + 5)}$

2.5. INTEGRAÇÃO DE CERTAS CLASSES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

CASO 1

2.5.1. Consideremos uma integral da forma $\int R(\text{sen } x, \cos x)\, dx$, isto é, uma função racional de seno e cosseno.

Mostraremos que esta integral, pela substituição $\text{tg } \dfrac{x}{2} = t$ sempre se reduz a uma integral de função racional. Expressemos sen x e cos x em termos de $\text{tg } \dfrac{x}{2}$, ou seja, em termos de t:

RELAÇÃO:

$$\text{sen } x = \frac{2 \text{ sen } \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \text{ sen } \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\text{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \text{ tg } \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

RELAÇÃO: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ ∴ $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \text{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Além disso, $x = 2 \text{ arc tg } t$ e $dx = \dfrac{2\, dt}{1 + t^2}$

Substituindo as expressões acima na integral, obtemos uma integral de uma função racional:

$$\int R(\text{sen } x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

EXEMPLO:

Obtenha $\quad I = \int \dfrac{dx}{4 - 5\ \text{sen}\ x}$

Fazendo-se a substituição $\text{tg}\ \dfrac{x}{2} = t$, temos

$$I = \int \frac{\dfrac{2\ dt}{1 + t^2}}{4 - 5\ \dfrac{2t}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{2(1 + t^2) - 5t} = \int \frac{dt}{2t^2 - 5t + 2}$$

Resolvendo-se esta integral de função racional (ver seção 2.4.) obtemos

$$I = \frac{2}{3}\ L \left| \frac{\text{tg}\ \dfrac{x}{2} - 2}{\text{tg}\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}} \right| + C$$

CASO 2

2.5.2. Se o integrando depende apenas de tg x, então a substituição

$\text{tg}x = t, \quad x = \text{arc tg}\ t, \quad dx = \dfrac{dt}{1 + t^2}$ reduz esta integral a uma integral de uma função racional.

EXEMPLO: Calcule $\quad I = \int \text{tg}^3\ x\ dx$

Fazendo a substituição tg x = t, temos

$$I = \int t^3 \frac{dt}{1 + t^2} = \int t\ dt - \int \frac{t}{1 + t^2}\ dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ L|1 + t^2| + C =$$

$$= \frac{\text{tg}^2\ x}{2} - \frac{1}{2}\ L|1 + \text{tg}^2\ x| + C$$

EXERCÍCIOS 2.5.

Resolver:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

d) $\displaystyle\int \sec^8 x \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2 \operatorname{sen} x + 3}$

f) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x \, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x - \operatorname{sen} x + 1}$

2.6. INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES IRRACIONAIS

2.6.1. Integrais do tipo

$\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \ldots, x^{p_n/q_n})\, dx.$

Nesses casos, pela substituição $x = t^q$, onde q é o mmc dos inteiros $q_1, q_2, \ldots, q_n$, obtemos uma integral de função racional.

EXEMPLO: Encontre $\displaystyle I = \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$

Colocamos $x = t^6$. Então $dx = 6t^5\, dt$ e

$$I = \int \frac{x^{1/2}\, dx}{1 + x^{1/3}} = \int \frac{t^3 (6t^5\, dt)}{1 + t^2} = 6 \int \frac{t^8}{1 + t^2}\, dt =$$

$$= 6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \text{arc tg } t\right) + C =$$

$$= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6 \text{ arc tg } x^{1/6} + C$$

2.6.2. Integrais da forma

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n/q_n}\right] dx$$

Nesses casos, a substituição

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q,$$

onde $q = \text{mmc}\{q_1, \ldots, q_n\}$, fornece uma integral de função racional.

EXEMPLO: Ache

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(2x-1)^{1/2} - (2x-1)^{1/4}}$$

Fazendo a substituição $2x - 1 = t^4$, temos $dx = 2t^3\,dt$ e

$$I = \int \frac{2t^3\,dt}{t^2 - t} = 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 2\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= t^2 + 2t + 2\,L\,|t-1| + C = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} +$$

$$+ 2\,L\,|\sqrt[4]{2x-1} - 1| + C$$

EXERCÍCIOS 2.6.

Calcule:

a) $\int \frac{x\,dx}{3 + \sqrt{x}}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(2x + 3)^{3/2}}$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 2} + 1}{\sqrt{x + 2} - 1}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{(x + 1)^3}}$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 1} + 2}{(x + 1)^2 - \sqrt{x + 1}}\, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{3 + \sqrt{x + 2}}{4 - \sqrt[4]{x + 2}}\, dx$

2.7. INTEGRAÇÃO DO TIPO $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$ POR MEIO DE SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sejam integrais do tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx \qquad (1)$$

Veremos um método que reduz a integral acima para uma integral do tipo

$$\boxed{\int R(\text{sen } z, \cos z)\, dz,} \qquad (2)$$

não necessariamente!! Ver exercícios

já estudadas na seção 2.5.

Completando o quadrado do trinômio dentro da raiz, temos

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Façamos a mudança de variável

parênteses

$$x + \frac{b}{2a} = t, \qquad dx = dt.$$

Então,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

Vejamos os possíveis casos:

CASO 1: $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0$

Chamando de $a = m^2$ e $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$, temos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2t^2 + n^2}$$

Assim, a integral (1) reduz-se a

$$\int R(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2})\, dt,$$

que reduz-se a uma integral do tipo (2) por meio da substituição

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z.$$

CASO 2: $a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0.$

Então, se $a = m^2$ e $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$,

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2t^2 - n^2}$ e a integral (1) reduz-se a

$$\int R(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2})\, dt,$$

que, por meio da substituição $t = \frac{n}{m} \sec z$, reduz-se a uma integral do tipo (2).

CASO 3: $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Então, $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$,

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2t^2}$ e a integral (1) se reduz a (2)

por meio de $t = \frac{n}{m} \operatorname{sen} z$.

CASO 4: $a < 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0.$

Neste caso, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ é um complexo, qualquer que seja x, o que não nos interessa.

EXEMPLOS:

Atenção: Ver a resolução dos exercícios antes. Há um modo mais fácil de resolver. Basta entender os exemplos antes

a) Encontre $I = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

Temos $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 = (x + 1)^2 + 1$ $\quad m^2 = 1,\ n^2 = 1,\ a = 1 > 0,\ +1 > 0$

Pondo $x + 1 = \frac{1}{1}\operatorname{tg} z$, temos $dx = \sec^2 z\, dz$ e

$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{(x + 1)^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1} = \sqrt{\sec^2 z} = \sec z,$

Relações: $\operatorname{cossec} z = \frac{\sec z}{\operatorname{tg} z} = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{\cos z}\cdot\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

e, logo, $\quad I = \int \frac{1}{\cos z}\cdot\frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z}$ $\quad u = \operatorname{sen} z,\ du = \cos z\, dz$

$$I = \int \frac{\sec^2 z\, dz}{\operatorname{tg}^2 z \sec z} = \int \frac{\cos z}{\operatorname{sen}^2 z} dz = -\frac{1}{\operatorname{sen} z} + C = -\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + C$$

$$= \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\operatorname{sen}(z)} + C$$

b) Calcule $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ $\quad a < 0,\ 1 > 0$ caso 3, $m^2 = 1,\ n^2 = 1$, $x = \frac{m}{n}\operatorname{sen} z = \frac{1}{1}\operatorname{sen} z$

Fazendo a substituição $x = \operatorname{sen} z$, $dx = \cos z\, dz$,

$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = \sqrt{\cos^2 z} = \cos z$ e, logo,

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^5 z}{\cos z} \cos z\, dz = \int \operatorname{sen}^5 z\, dz = -\frac{3x^4 + 4x^2 + 8}{15} \sqrt{1 - x^2} + C$$

$= \int \operatorname{sen}^4 z \operatorname{sen} z\, dz = \int (1 - \cos^2 z)^2 \operatorname{sen} z\, dz$

$u = \cos z,\ du = -\operatorname{sen} z\, dz,\ \operatorname{sen} z\, dz = -du$

$= -\int (1 - u^2)^2 du = -\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du =$

$= -\int du + 2\int u^2 du - \int u^4 du = -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5$

$= -\cos z + \frac{2}{3}\cos^3 z - \frac{1}{5}\cos^5 z + C$

$= -\cos z\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2 z + \frac{1}{5}\cos^4 z\right) + C$

$= -\cos z\left(\frac{15 - 10\cos^2 z + 3\cos^4 z}{15}\right) + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15}\left[15 - 10(1 - x^2) + 3(1 - x^2)^2\right] + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15}\left[15 - 10 + 10x^2 + 3(1 - 2x^2 + x^4)\right] + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15}\left[5 + 10x^2 + 3 - 6x^2 + 3x^4\right] + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{15}\left[3x^4 + 4x^2 + 8\right] + C$

EXERCÍCIOS 2.7.

Calcule:

Difícil p/ produção. São substituídos pelos ex. da pág. seguinte

a) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

b) $\int \frac{x^5\, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$

d) $\int \frac{dx}{(x + 1)^3 \sqrt{x^2 + 2x}}$

e) $\int \frac{(x^2 + x + 1)\, dx}{x \sqrt{x^2 - x + 1}}$

f) $\int \frac{dx}{x \sqrt{2 + x - x^2}}$

g) $\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x \sqrt{1 + x + x^2}}\, dx$

h) $\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$

i) $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \sqrt{1 - x^2}}$

j) $\int \frac{dx}{(1 - x^2) \sqrt{1 + x^2}}$

Extraídos de "270")

a) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$

b) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}}$

c) $\int x^3 \sqrt{7 + x^2}\, dx$

d) $\int \frac{dx}{x \sqrt{25 - x^2}}$

e) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\, dx$

f) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$

g) $\int (x+2) \sqrt{x^2 + 4x}\, dx$

h) $\int \sqrt{55 + 6x - x^2}\, dx$

i) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

j) $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}}$

CAPÍTULO 3 - A INTEGRAL DEFINIDA

3. 1. DEFINIÇÕES

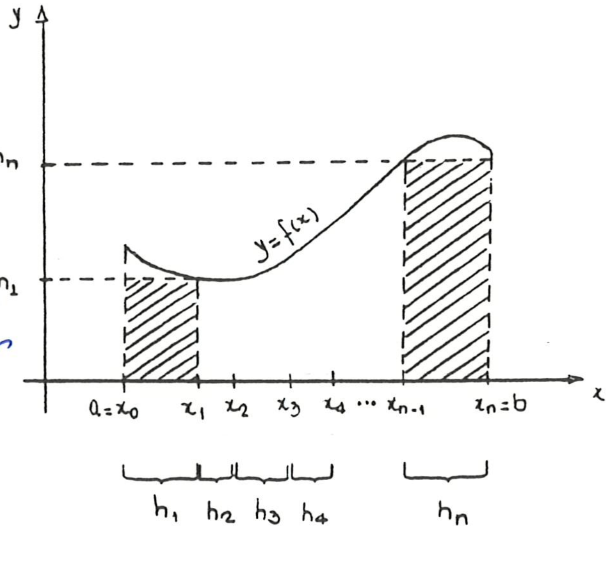
Seja a função $y = f(x)$ contínua, definida no intervalo $[a, b]$. Divida o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos pelos pontos de divisão

$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, onde

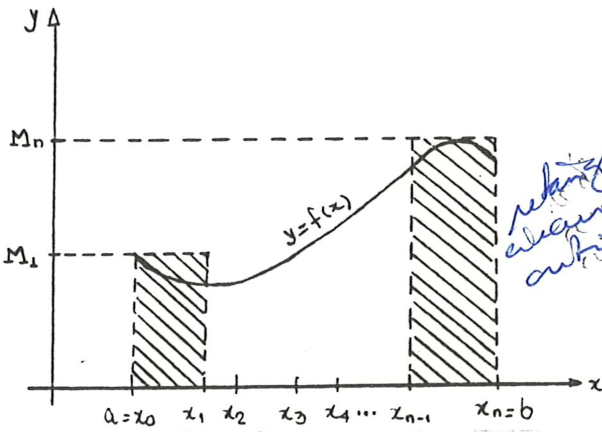
$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

e sejam $x_1 - x_0 = h_1$, $x_2 - x_1 = h_2$, $\dots$, $x_n - x_{n-1} = h_n$

Denotemos por m_i e M_i ao menor e ao maior valor da função $f(x)$ no sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, respectivamente, e por μ_n ao valor máximo de h_i, $1 \leqslant i \leqslant n$
$[\mu_n = \max \{h_1, h_2, \dots, h_n\}]$.



retângulos inscritos



retângulos circunscritos

Formemos as somas

adição / soma / notação

$$\underline{S_n} = m_1 h_1 + m_2 h_2 + \dots + m_n h_n = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i \quad \text{e}$$

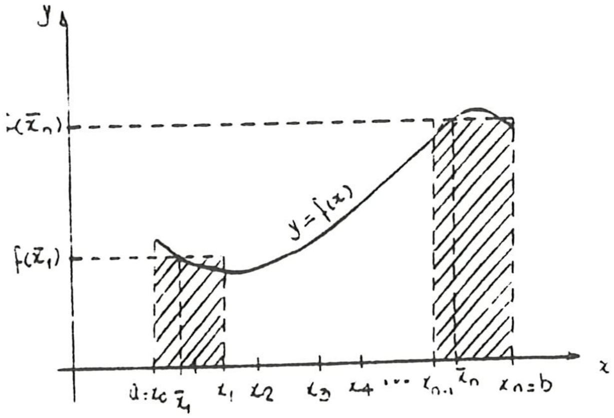
$$\overline{S_n} = M_1 h_1 + M_2 h_2 + \dots + M_n h_n = \sum_{i=1}^{n} M_i h_i$$

chamadas de soma inferior e soma superior, respectivamente.

Essas somas correspondem às somas das áreas dos retângulos inscritos e circunscritos, respectivamente (ver figuras). Elas fornecem estimativas por falta e por excesso, respectivamente, da área sob o gráfico de $y = f(x)$ de a até b.

Em cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tomemos um ponto arbitrário $\bar{x}_i$ e formemos a soma

$$S_n = f(\bar{x}_1)\, h_1 + f(\bar{x}_2)\, h_2 + \dots + f(\bar{x}_n)\, h_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, h_i$$



$$\boxed{\text{Como } m_i \le f(\bar{x}_i) \le M_i, \quad \forall\, i, \quad \underline{S}_n \le S_n \le \bar{S}_n.}$$

A soma S_n, chamada soma de Riemann da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, depende dos sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ e também da escolha dos pontos $\bar{x}_i$.

Vamos considerar as diferentes partições do intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tal que $\mu_n \longrightarrow 0$. Obviamente, $n \longrightarrow \infty$.

tamanho do maior intervalo

Escolhendo valores apropriados de $\bar{x}_i$, é possível, para cada partição, formar a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, h_i .$$

Suponhamos que essa soma se aproxime de $\underline{I}$ para uma dada partição, quando $\mu_n \longrightarrow 0$. Se para qualquer partição

do intervalo $[a, b]$ tal que $\mu_n \longrightarrow 0$ e para qualquer escolha de pontos $\overline{x}_i$ a soma $\Sigma\, f(\overline{x}_i)\, h_i$ aproxima-se do mesmo limite I, dizemos que a função f(x) é integrável no intervalo $[a, b]$; o limite I é chamado a integral definida da função f(x) no intervalo $[a, b]$. É denotado por

ponto de m.w. de cada retâng.

$\int_a^b f(x)\, dx$ e escrevemos $\lim\limits_{\substack{\mu_n \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, h_i = {}_a\!\int^b f(x)\, dx.$

$\lim\limits_{\mu_n \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) h_i$

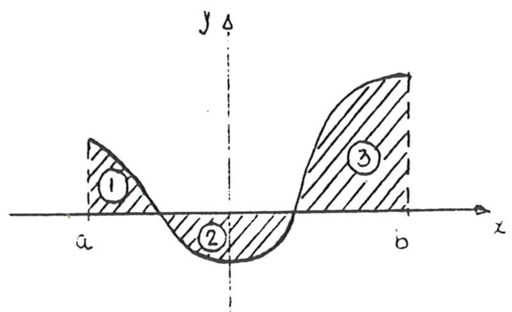
O limite acima indicado deve ser entendido da seguinte forma:

Afirmar que $\lim\limits_{\mu_n \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, h_i = I$ significa que, para cada número positivo ε, existe um número $\delta > 0$ (dependendo de ε) tal que

$\left| \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, h_i - I \right| < \varepsilon$ é válido para toda partição com $\mu_n < \delta$

Geometricamente, então, o valor $\int_a^b f(x)\, dx$ representa a área da região situada entre o gráfico da função e o eixo x, sendo que esta área é contada positivamente ou negativamente, conforme essa região esteja situada acima ou abaixo do eixo x.

Por exemplo, seja f dada pelo gráfico abaixo:



Então,

$${}_a\!\int^b f(x)\, dx = A_1 - A_2 + A_3$$

DEFINIÇÃO: ${}_a\!\int^b f(x)\, dx = -{}_b\!\int^a f(x)\, dx$, desde que a última integral exista.

DEFINIÇÃO: ${}_a\!\int^a f(x)\, dx = 0$, se f(a) existe.

Citaremos agora, alguns teoremas de existência das integrais definidas de Riemann.

TEOREMA 1: Se f é uma função contínua no intervalo [a, b], então f é integrável em [a, b].

TEOREMA 2: Se f é uma função limitada e seccionalmente contínua no intervalo [a, b], então f é integrável em [a, b].

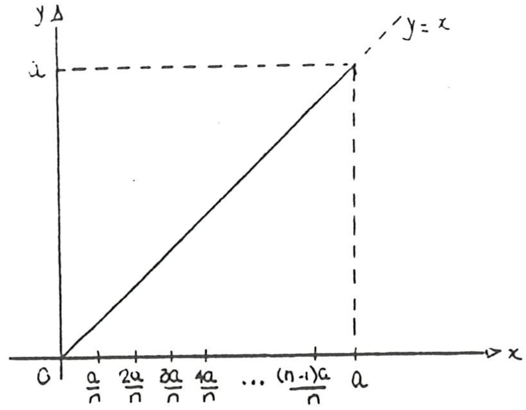
TEOREMA 3: Se f é definida e integrável em [a, b], então f é limitada em [a, b].

TEOREMA 4: Se f é integrável em [a, b] e se h é também definida em [a, b] e satisfaz h(x) = f(x) para todo x em [a, b] exceto num número finito de pontos, então h é também integrável em [a, b] e $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

EXEMPLO: Calcular $\int_0^a x\,dx$, fazendo $h_r = \dfrac{a}{n}$ e $\overline{x}_r = \cancel{x_r}$ M_r.

Temos: dado por $f(\overline{x}_i) = x$

r	I_r	$\overline{x}_r$	$f(\overline{x}_r)$	h_r
1	$\left[0, \frac{a}{n}\right]$	$\frac{a}{n}$	$\frac{a}{n}$	$\frac{a}{n}$
2	$\left[\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}\right]$	$\frac{2a}{n}$	$\frac{2a}{n}$	$\frac{a}{n}$
3	$\left[\frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}\right]$	$\frac{3a}{n}$	$\frac{3a}{n}$	$\frac{a}{n}$
...	...	...	...	...
(n-1)	$\left[\frac{(n-2)a}{n}, \frac{(n-1)a}{n}\right]$	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{(n-1)a}{n}$	$\frac{a}{n}$
n	$\left[\frac{(n-1)a}{n}, n.\frac{a}{n}\right]$	$\frac{na}{n}$	$\frac{na}{n}$	$\frac{a}{n}$



$$S_n = \frac{a}{n}\left[\frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \frac{3a}{n} + \dots + \frac{(n-1)\,a}{n} + \frac{na}{n}\right] =$$

$$= \frac{a^2}{n^2}\left[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n\right] = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Portanto, $\displaystyle {}_0\!\int^a x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{2}\,\frac{n^2 + n}{n^2}\,\frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{a^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^2}{2}$

EXERCÍCIOS 3.1.

1. Calcular as somas superior, inferior e de Riemann para a função $y = x^2 + 3$, considerando

$x_0 = 0$	$x_3 = 9/4$	$\bar{x}_1 = 1/4$	$\bar{x}_4 = 4$
$x_1 = 1/2$	$x_4 = 5{,}0$	$\bar{x}_2 = 1$	
$x_2 = 3/2$		$\bar{x}_3 = 2$	

não mandaram p/ gráficos

2. Calcular, pela soma superior, as integrais das funções que se seguem, considerando em cada caso, a sub-divisão do intervalo em n sub-intervalos de iguais amplitudes.

a) $y = x^2 + 3$ $\quad [0,\ 4] \quad h_r = \dfrac{4}{n}$

b) $y = x - 1$ $\quad [1,\ 5] \quad h_r = \dfrac{4}{n}$

c) $y = x^3 + 2x$ $\quad [0,\ 3] \quad h_r = \dfrac{3}{n}$

idem

3. Calcular, pela soma inferior, as integrais das funções que se seguem, nos intervalos e respectivas amplitudes indicadas.

a) $y = x^2 - 2$ $\qquad [0,\ 5]$ $\qquad h_r = \frac{5}{n}$

b) $y = x^3$ $\qquad [0,\ a]$ $\qquad h_r = \frac{a}{n}$

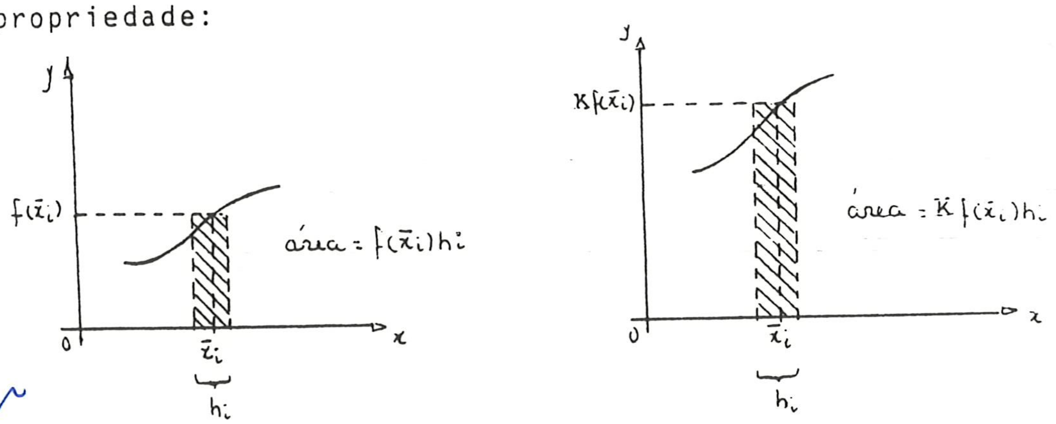
c) $y = 2x + 3$ $\qquad [2,\ 6]$ $\qquad h_r = \frac{4}{n}$

3.2. PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL DEFINIDA

As propriedades básicas da integral definida podem ser deduzidas a partir da definição dada na seção anterior. Na maioria dos casos, não apresentamos tais provas.

TEOREMA 1: Se f é uma função integrável no intervalo $[a,\ b]$ e K é um número constante, então K f é também integrável em $[a,\ b]$ e ${}_a\int^b K\ f(x)\ dx = K\ {}_a\int^b f(x)\ dx$.

A figura abaixo mostra a razão geométrica para a propriedade:



apresentar

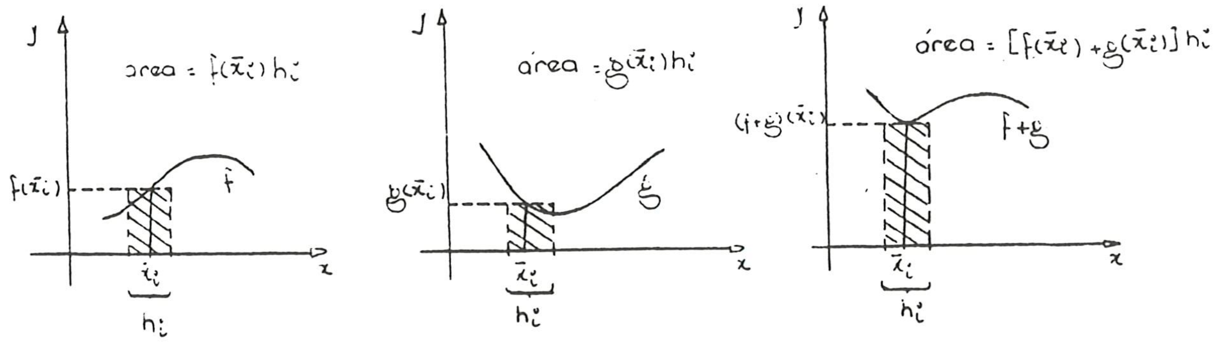
EXEMPLO: Dado que ${}_0\int^2 f(x)\ dx = 5$, calcule ${}_0\int^2 4\ f(x)\ dx$.

Pelo teorema 1, ${}_0\int^2 4\ f(x)\ dx = 4\ {}_0\int^2 f(x)\ dx = 4 \cdot 5 = 20$.

TEOREMA 2: Se f e g são funções integráveis no intervalo $[a,\ b]$, então f + g é também integrável em $[a,\ b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

A razão geométrica é apresentada abaixo:



apresentar

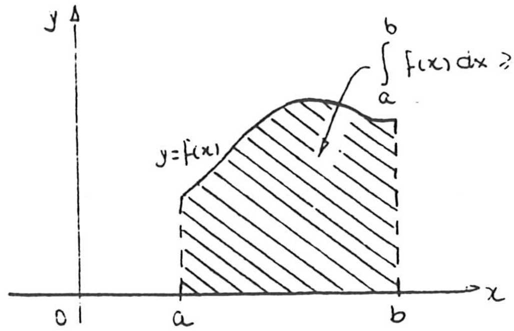
EXEMPLO: Dados que $\int_{-7}^{13} f(x) = 8$ e $\int_{-7}^{13} g(x) = -15$, calcule $\int_{-7}^{13} [f(x) + g(x)]\, dx$.

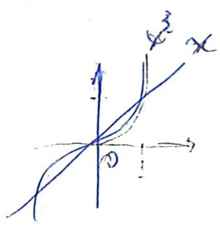
Pelo teorema 2,

$$\int_{-7}^{13} [f(x) + g(x)]\, dx = \int_{-7}^{13} f(x)\, dx + \int_{-7}^{13} g(x)\, dx = 8 + (-15) = -7$$

TEOREMA 3: Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e se $f(x) \geqslant 0$ para todos os valores de x em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$.

O teorema 3 é, geometricamente, evidente, por definição.





apresentar

EXEMPLO: Mostre que $\int_0^1 x^3\, dx \leqslant \int_0^1 x\, dx$.

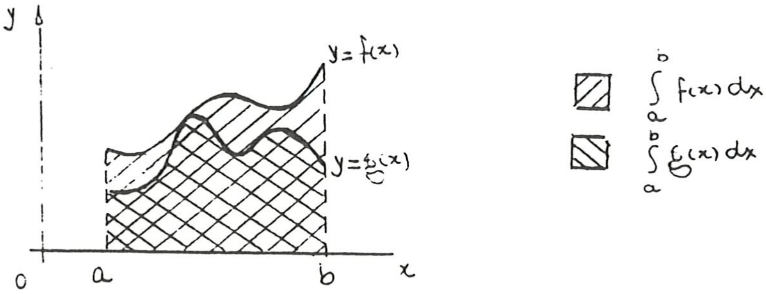
Sabemos que, para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^3 \leqslant x$. Assim, $x - x^3 \geqslant 0$.

Pelo teorema 3, $\int_0^1 (x - x^3)\, dx \geqslant 0$, isto é,

$_0\int^1 x\ dx - {}_0\int^1 x^3\ dx \geqslant 0$ e, portanto, $_0\int^1 x^3\ dx \leqslant {}_0\int^1 x\ dx$

TEOREMA 4: Se f e g são funções integráveis no intervalo [a, b] e se $f(x) \leqslant g(x)$ é válido para todos os valores de x no intervalo [a, b], então $_a\int^b f(x)\ dx \leqslant {}_a\int^b g(x)\ dx$.

A figura abaixo apresenta uma interpretação geométrica do teorema 4, quando $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em [a, b].



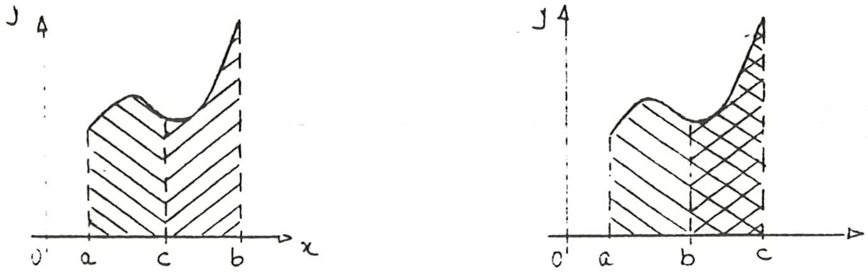
TEOREMA 5: Se f é integrável no intervalo [a, b], então |f| também o será e

$\left|{}_a\int^b f(x)\ dx\right| < {}_a\int^b |f(x)|\ dx.$

TEOREMA 6: Para quaisquer três números a, b e c a igualdade

$_a\int^b f(x)\ dx = {}_a\int^c f(x)\ dx + {}_c\int^b f(x)\ dx$

é verdadeira, se as integrais existirem.

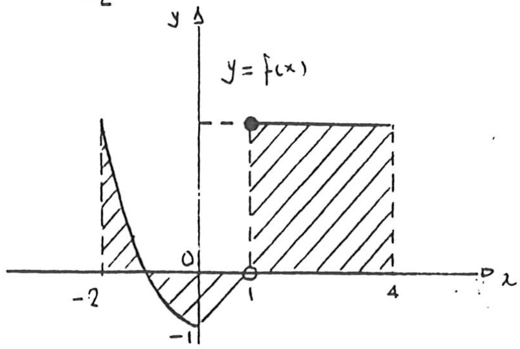


apresentar se der tempo

EXEMPLO: Define-se a função f pela equação

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{para} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{para} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 3 & \text{para} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Assuma que $_a\int^b x^2\,dx = \dfrac{1}{3}(b^3 - a^3)$, que $_a\int^b x\,dx = \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$ e que $_a\int^b dx = (b - a)$. Use o teorema 6 para calcular $_{-2}\int^4 f(x)\,dx$.



$$_{-2}\int^4 f(x)\,dx = {}_{-2}\int^0 f(x)\,dx + {}_0\int^1 f(x)\,dx + {}_1\int^4 f(x)\,dx =$$

$$= {}_{-2}\int^0 (x^2 - 1)\,dx + {}_0\int^1 (x - 1)\,dx + {}_1\int^4 3\,dx =$$

$$= {}_{-2}\int^0 x^2\,dx - {}_{-2}\int^0 dx + {}_0\int^1 x\,dx - {}_0\int^1 dx +$$

$$+ 3\,{}_1\int^4 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[0^3 - (-2)^3\right] - \left[0 - (-2)\right] + \frac{1}{2}\left[1^2 - 0^2\right] -$$

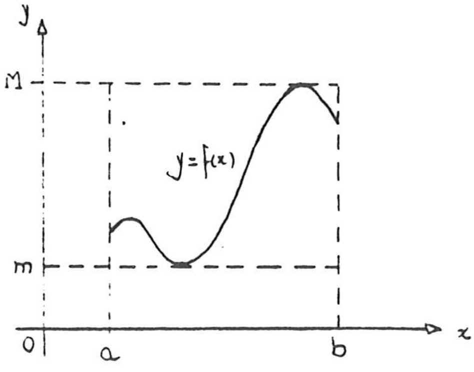
$$- (1 - 0) + 3\,(4 - 1) =$$

$$= \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 1 + 9 = \frac{55}{6}.$$

TEOREMA 7 (TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS): Suponhamos que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então, existe um número c em $[a, b]$ tal que

$$_a\int^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(c)$$

DEM:



Se m e M são, respectivamente, o menor e o maior valor de f(x) em [a, b], então,

$$m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b - a)$$ ou

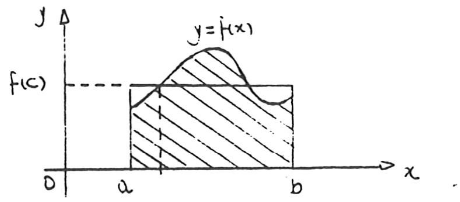
$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Como f é contínua, toma todos os valores intermediários entre m e M. Portanto, para algum valor c,

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$$

OBS.: O valor $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$ é chamado valor médio de f em [a, b].

A condição $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \cdot f(c)$ significa que a área sob a curva y = f(x) entre x = a e x = b é igual à do retângulo cuja base é o intervalo [a, b] e cuja altura é f(c) (figura abaixo).



área sob a curva = área do retângulo

EXEMPLO: Dado que $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$, encontre o valor c tal que $\int_1^3 x^2\,dx = (3 - 1)\,f(c)$.

Temos que $\int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$.

Logo, queremos encontrar c tal que $\frac{26}{3} = 2 \cdot f(c)$ ou $f(c) = \frac{13}{3}$ ou $c^2 = \frac{13}{3}$. Logo, $c = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$

Desprezamos $-\sqrt{\frac{13}{3}}$ pois ele não se encontra no intervalo $[1, 3]$.

Portanto, ${}_1\int^3 f(x)\, dx = (3 - 1)\, f\left(\sqrt{\frac{13}{3}}\right)$

EXERCÍCIOS 3.2.

1. Use as propriedades básicas da integral para justificar cada afirmativa:

   a) ${}_0\int^3 (4 + 3x - x^2)\, dx \geqslant 0$

   b) ${}_0\int^1 x^4\, dx \leqslant {}_0\int^1 x\, dx$

   c) ${}_5\int^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx = {}_0\int^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx - {}_0\int^5 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

   d) ${}_3\int^4 \frac{dx}{1 + x^2} - {}_5\int^5 \frac{dx}{1 + x^2} = {}_6\int^4 \frac{dt}{1 + t^2} + {}_3\int^6 \frac{dy}{1 + y^2}$

2. Suponha que f e g são funções integráveis em $[a, b]$ tais que $|f(x) - g(x)| \leqslant K$ para todo número x em $[a, b]$ onde K é uma constante positiva e que ${}_a\int^b dx = (b - a)$. Prove que

   $\left|{}_a\int^b f(x)\, dx - {}_a\int^b g(x)\, dx\right| \leqslant K\,(b - a)$.

3. Pode-se mostrar que ${}_0\int^3 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{39}{4}$. Determine um número c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio para esta integral.

3.3. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (NEWTON-LEIBNIZ)

TEOREMA 1: Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[b, c]$ e suponhamos que a é um número fixo neste intervalo. Define-se a função g com domínio $[b, c]$ por

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para $x \in [b, c]$

Então g é diferenciável em (b, c) e $g'(x) = f(x)$.

DEM: Vamos dar ao argumento x um incremento Δx. Então,

$$g(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

(teorema 6 - seção 3.2.).

O incremento da função g(x) é igual a

$$\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) -$$

$$- \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Pelo teorema 7, seção 3.2.,

$$\Delta g = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,(x + \Delta x - x) = f(c)\,\Delta x,$$

onde c está entre x e $x + \Delta x$.

Logo, $\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \dfrac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = f(c)$.

Então, $g'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$

Mas, $c \to x$ quando $\Delta x \to 0$ e, então $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c)$

e, devido à continuidade de f(x),

$\lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$

Portanto, $g'(x) = f(x)$

EXEMPLOS: Calcule g'(x), onde:

a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{4 + t^6}\,dt$.

Diretamente do teorema, $g'(x) = \sqrt{4 + x^6}$

b) $g(x) = \int_x^5 \sqrt{1 + t^4}\,dt$

$$g(x) = \int_x^5 \sqrt{1 + t^4}\,dt = -\int_5^x \sqrt{1 + t^4}\,dt = \int_5^x -\sqrt{1 + t^4}\,dt$$

Logo, $g'(x) = -\sqrt{1 + x^4}$

c) $g(x) = \int_{-x}^{x} \frac{dt}{3 + t^2}$

Temos $g(x) = \int_{-x}^{0} \frac{dt}{3 + t^2} + \int_{0}^{x} \frac{dt}{3 + t^2} =$

$$= \underbrace{\int_{0}^{-x} - \frac{dt}{3 + t^2}}_{g_1(x)} + \underbrace{\int_{0}^{x} \frac{dt}{3 + t^2}}_{g_2(x)},$$

$g_1(x) = \int_{0}^{-x} - \frac{dt}{3 + t^2}$; se $u = -x$, $g_1(u) = \int_{0}^{u} - \frac{dt}{3 + t^2}$

Regra da cadeia

Logo, $g'_1(x) = \frac{d}{dx} g_1(x) = \frac{dg_1}{du} \cdot \frac{du}{dx} = - \frac{1}{3 + u^2} (-1) = \frac{1}{3 + x^2}$

$g_2(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{3 + t^2} \Longrightarrow g'_2(x) = \frac{1}{3 + x^2}$

Portanto, $g'(x) = g'_1(x) + g'_2(x) = \frac{1}{3 + x^2} + \frac{1}{3 + x^2} = \frac{2}{3 + x^2}$

Muito importante

TEOREMA 2: Se $F(x)$ é uma antiderivada da função contínua $f(x)$, então vale

$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ Apresentar como $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

OBS.: Adotaremos a notação

$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b$

DEM.: Seja $F(x)$ uma antiderivada de $f(x)$. Pelo teorema 1, a função $g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$ é também uma antiderivada de $f(x)$. já que $g'(x) = f(x)$

Então, eles diferem por uma constante, isto é,

$\int_{a}^{x} f(t)\, dt = F(x) + C, \quad \forall x$

Se $x = a$, $\int_{a}^{a} f(t)\, dt = F(a) + C$, ou

$$0 = F(a) + C \quad e \quad C = -F(a)$$

Logo. $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$. (valor do p $x=a$)

Pondo $x = b$, obtemos a fórmula de Newton-Leibniz (paramalogia)

$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$,

ou mudando a variável de integração por x,

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

EXEMPLOS: a) $\int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = 0 = -1+1=0$

c) $\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$

d) $\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx = \int_{1/2}^4 x^3 dx - 6\int_{1/2}^4 x^2 dx +$

$+ 9\int_{1/2}^4 x\,dx + \int_{1/2}^4 dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 9 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_{1/2}^4 =$

$= (64 - 128 + 72 + 4) - \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{679}{64}$ $10{,}3$

e) $\int_{-3}^4 |x + 2|\,dx$

Escrevemos $f(x) = |x+2|$ como $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{se } x < -2 \end{cases}$

Aplicando o teorema 6, seção 3.2, temos

$\int_{-3}^4 |x + 2|\,dx = \int_{-3}^{-2} (-x - 2)\,dx + \int_{-2}^4 (x + 2)\,dx =$

$= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^4 = \frac{1}{2} + 18 = \frac{37}{2}$

OBSERVAÇÃO 1: Quando utilizamos a técnica de substituição em integrais definidas, mudando a variável de x para $u = g(x)$, por exemplo, devemos, não apenas mudar o integrando como fizemos para uma integral indefinida, mas também devemos mudar os limites de integração de modo que a integral assuma a forma $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$.

EXEMPLOS: a) $\int_0^1 x\sqrt{9 - 5x^2}\, dx$

Fazendo a mudança de variável $u = 9 - 5x^2$, temos

$du = -10x\, dx$ ou $x\, dx = -\frac{1}{10}du$.

Também, se $x = 0$, $u = 9$ e

se $x = 1$, $u = 4$.

Assim,

$$\int_0^1 x\sqrt{9 - 5x^2}\, dx = \int_9^4 \sqrt{u}\left(-\frac{1}{10}\right) du = -\frac{1}{10}\int_9^4 \sqrt{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{10}\int_4^9 u^{1/2}\, du = \frac{1}{10}\left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_4^9 = \frac{1}{15}\left[9^{3/2} - 4^{3/2}\right] = \frac{19}{15}$$

b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx$

Fazendo a substituição $t = \cos x$, temos

$dt = -\operatorname{sen} x\, dx$, $\operatorname{sen} x\, dx = -dt$.

Além disso, se $x = 0$, $t = \cos 0 = 1$ e

se $x = \frac{\pi}{2}$, $t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Assim,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = \int_1^0 -t^2\, dt = -\int_1^0 t^2\, dt = -\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^0 =$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

OBSERVAÇÃO 2: A integração por partes de integrais definidas é semelhante ao caso já visto em integrais indefinidas:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

EXEMPLO: Use a integração por partes para calcular $\int_1^e x^2 Lx\,dx$.

Fazendo $u = Lx$ e $dv = x^2\,dx$, temos

$$du = \frac{dx}{x} \quad \text{e} \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

LEMBRAR: $L1 = 0$

Logo,

$-L1 \cdot \frac{1}{3}$

$$\int_1^e x^2 Lx\,dx = Lx\,\frac{x^3}{3}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

EXERCÍCIOS 3.3.

1. Ache as derivadas das seguintes funções:

a) $g(x) = \int_1^x Lt\,dt \quad (x > 0)$

b) $g(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{1 + t^4}\,dt$

c) $g(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

2. Ache os pontos de extremo da função

$$g(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt \quad \text{na região} \quad x > 0.$$

3. Calcule as integrais:

a) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx$

b) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$

c) $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2}\, dy$

d) $\int_2^6 \sqrt{x - 2}\, dx$

e) $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}$

f) $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}$

g) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2 + 3x + 2}$

h) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

i) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 \alpha\, d\alpha$

j) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

l) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\, Lx}$

m) $\int_1^e \frac{\operatorname{sen}(Lx)}{x}\, dx$

n) $\int_0^3 |3 - x^2|\, dx$

o) $\int_1^{32} \frac{1 + \sqrt[5]{t^2}}{\sqrt[3]{t}}\, dt$

p) $\int_0^1 \frac{2x + 6}{\sqrt{x^2 + 6x + 2}}\, dx$

Probl. q) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Probl. r) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

impróprias pois não são definidas em $x=0$ e $x=1$ (lado esq)

4. Calcular os valores das integrais seguintes, aplicando as substituições indicadas:

a) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{3 + 2\cos x}$; $\quad t = tg\,\dfrac{x}{2}$

b) $\int_1^4 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{2 + 4x}}$; $\quad 2 + 4x = t^2$

c) $\int_{-1}^1 \dfrac{dx}{(1 + x^2)^2}$; $\quad x = tg\,t$

d) $\int_{3/4}^{4/3} \dfrac{dz}{z\sqrt{z^2 + 1}}$; $\quad z = \dfrac{1}{x}$

e) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x\,dx}{6 - 5\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2\,x}$; $\quad \text{sen}\,x = t$

5. a) Seja f contínua em $[-a, a]$. Se f é uma função par, mostre que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$ e interprete o resultado geometricamente.

b) Seja f contínua em $[-a, a]$. Se f é uma função ímpar, mostre que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ e interprete o resultado geometricamente.

6. Aplicando a fórmula para integração por partes, calcule as seguintes integrais:

a) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

b) $\int_1^{e} Lx\,dx$

c) $\int_0^{1} x^3 e^{2x}\,dx$

d) $\int_0^{\pi} e^x\,\text{sen}\,x\,dx$

CAPÍTULO 4 - INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

4.1. INTEGRAIS COM LIMITES DE INTEGRAÇÃO INFINITOS

Como exemplo inicial, considere a região R sob o gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, à direita de $x = 1$ (Figura 1.a).

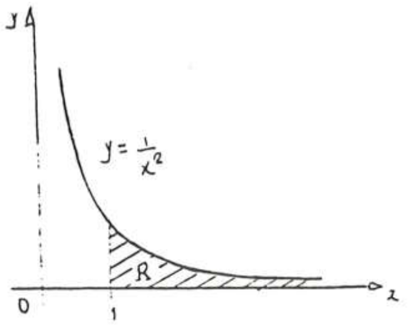


Fig 1.a

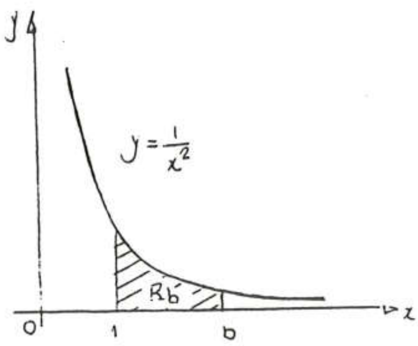


Fig 1.b

Note que a região R se estende indefinidamente para a direita, sendo, portanto, ilimitada.

Seja, agora, Rb a região limitada sob o gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ entre $x = 1$ e $x = b$ (Figura 1.b). A área de Rb é dada por:

$-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{b} + 1 =$

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

Para valores muito grandes de b, a região limitada Rb pode ser considerada como uma boa aproximação da região ilimitada R. De fato, pode-se esperar que:

$$\text{Área de R} = \lim_{b \to \infty} (\text{Área de Rb}) = \lim_{b \to \infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

De modo geral temos a definição:

DEFINIÇÃO: Se existe um limite finito

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

então este limite é chamado a integral imprópria da função $f(x)$ no intervalo $[a, +\infty)$ e é denotado pelo símbolo

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Então, por definição,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

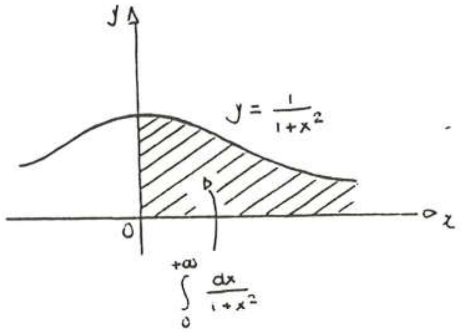
Neste caso, é dito que a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Em caso contrário, ela é dita divergente.

Similarmente, definimos as integrais impróprias de outros intervalos infinitos:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx. = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

EXEMPLOS: a) Calcule a integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$



$y = \frac{1}{1+x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} \frac{(\frac{1}{x^2})}{(\frac{1}{x^2})}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{1}{x^2})}{(\frac{1}{x^2})+1} = \frac{0}{1} = 0$

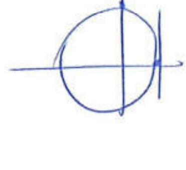
se $x=0$, $y=1$ (não tem A.V.

Pela definição de integral imprópria,

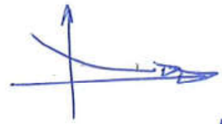
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0)$$

$\frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} b = \frac{\ }{2}$$



$y = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x \to$ fç exp. com $\frac{1}{e} < 1$, logo, decrescente



b) $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx$

$u = x$
$du = -dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} -e^{-x}\Big|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left(-e^{0}-(-e^{-a})\right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (e^{-a} - 1) = +\infty$$

Logo, $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx$ é divergente.

Em muitos casos, é suficiente determinarmos se uma dada integral converge ou diverge, e estimarmos seu valor. Os seguintes teoremas serão úteis nestes casos:

TEOREMA 1: Se para todo x $(x \geqslant a)$ a desigualdade $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ é válida e se $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge e $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$.

EXEMPLO: Investigue a integral

$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ quanto à convergência.

Temos que, se $1 \leqslant x$,

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \quad \text{(ver exemplo inicial)}$$

Conseqüentemente, $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ converge e seu valor é menor que 1.

TEOREMA 2: Se para todo x $(x \geqslant a)$ é válida a desigualdade $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ e se $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, então $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ também diverge.

EXEMPLO: Verifique se a seguinte integral converge:

$\int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

Notamos que $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \dfrac{x}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-1/2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}) = +\infty$

Mas, $\displaystyle {}_1\int^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty$ e conseqüentemente, a integral dada também diverge.

Nos dois teoremas, consideramos integrais impróprias de funções não-negativas. Para o caso de uma função $f(x)$ que muda de sinal num intervalo infinito, temos o seguinte teorema:

TEOREMA 3: Se a integral $\displaystyle {}_a\int^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, então a integral $\displaystyle {}_a\int^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge.

EXEMPLO: Investigue a convergência da integral

$$ {}_1\int^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x^3}\,dx. $$

Aqui, o integrando é uma função que assume valores positivos e negativos. Notamos que

graças a sen x

$$ \left|\frac{\text{sen } x}{x^3}\right| \text{ fc limitada} \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\right| \text{ fc ilimitada} $$

$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{2b}-\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2b}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Mas, $\displaystyle {}_1\int^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

Portanto, a integral $\displaystyle {}_1\int^{+\infty} \left|\frac{\text{sen } x}{x^3}\right| dx$ converge e a integral dada também.

EXERCÍCIOS 4.1.

1. Calcule as integrais impróprias (ou estabeleça sua divergência)

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$

b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

d) $\int_{0}^{+\infty} x \operatorname{sen} x \, dx$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

f) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

g) $\int_{0}^{+\infty} Lx \, dx$

h) $\int_{1}^{\infty} 2^{-x} \, dx$

i) $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$

Erro! É zero!

(0) j) $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, e^{-x^2} \, dx$ 0

l) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16 + x^2}$

2. Teste a convergência das seguintes integrais:

NÃO a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}$

b) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}$

NÃO c) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^5 + 1}}$

4.2. INTEGRAIS COM INTEGRANDOS INFINITOS

Como exemplo inicial, considere a região ilimi-

tada R sob a curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ à direita do eixo y e à esquerda da reta vertical $x = 9$ (Figura 1.a).

Não é definida em $x = 0$!!

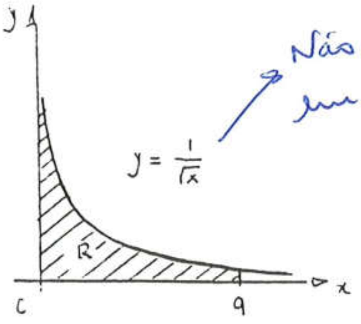


Fig 1.a

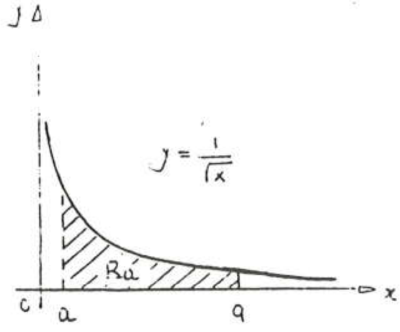


Fig 1.b

Uma aproximação para essa região ilimitada é fornecida pela região limitada Ra sob a curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ entre $x = a$ e $x = 9$, sendo a um número positivo pequeno (Figura 1.b).

Quando $a \to 0^+$, Ra se aproxima de R e escrevemos $R = \lim\limits_{a \to 0^+} Ra$. De um modo geral, temos a definição:

DEFINIÇÃO: Suponha a função f definida no intervalo $(a, b]$ e integrável em todo intervalo da forma $[a + c, b]$. Então, por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_{a+c}^b f(x)\,dx$$

Se $\lim\limits_{c \to 0^+} \int_{a+c}^b f(x)\,dx$ existe e é finito, dizemos que a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente; caso contrário, ela é dita divergente.

Atente que a int. pode ser impropr. se o limite não existe e não numerica/ qdo ele é infinito

De forma análoga,

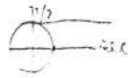
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_a^{b-c} f(x)\,dx$$

no caso em que $f(b)$ não é definido e

$${}_a\int^b f(x)\,dx = {}_a\int^c f(x)\,dx + {}_c\int^b f(x)\,dx$$

no caso em que $f(c)$ não é definido, $a < c < b$.

EXEMPLOS:



$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ não definido quando $\cos x = 0$, ou seja, $x = \arccos \frac{\pi}{2}$

a) Calcule ${}_0\int^{\pi/2} \sec x\,dx$

A integral é imprópria porque o integrando não é definido no limite superior $\frac{\pi}{2}$. Assim,

$${}_0\int^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim_{c \to 0^+} {}_0\int^{\pi/2 - c} \sec x\,dx =$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left[L|\sec x + \operatorname{tg} x| \Big|_0^{\pi/2 - c} \right] =$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left\{ L \left| \overbrace{\sec\left(\frac{\pi}{2} - c\right)}^{+\infty} + \overbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right)}^{+\infty} \right| - L|\sec 0 + \operatorname{tg} 0| \right\} = +\infty, \quad \text{pois}$$

$\lim_{c \to 0^+} L \left| \sec \frac{\pi}{2} - c \right| = \lim_{c \to 0^+} L \left| \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} - c} \right| = +\infty$

$\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1}$ $\quad \operatorname{tg} 0 = 0$

$$\lim_{c \to 0^+} \sec\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{c \to 0^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = +\infty$$

$L\,1 = 0$

Portanto, a integral imprópria é divergente.

b) Calcule ${}_0\int^3 \frac{1}{\sqrt{3 - x}}\,dx$

O integrando não é definido em $x = 3$. Logo,

$${}_0\int^3 \frac{1}{\sqrt{3 - x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} {}_0\int^{3-c} \frac{dx}{\sqrt{3 - x}} = -\lim_{c \to 0^+} \left[2\sqrt{3 - x} \right]_0^{3-c} =$$

$$= -\lim_{c \to 0^+} (2\sqrt{c} - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$u = 3 - x$
$du = -dx$

$\lim_{c \to 0^+} \int_0^{3-c} \frac{-du}{\sqrt{u}} = \lim_{c \to 0^+} \int_0^{3-c} u^{-1/2} \ldots$
$= -\lim_{c \to 0^+} \left[2\sqrt{u} \right]_0^{3-c} = -\lim_{c \to 0^+} \left[2\sqrt{3} - \ldots \right.$

Para determinar a convergência de integrais impróprias com integrandos infinitos, usa-se freqüentemente teoremas similares aos citados na seção anterior:

TEOREMA 1: Se no intervalo $[a, c]$ as funções $f(x)$ e $g(x)$

não são definidas em c e em todos os pontos do intervalo é válida a desigualdade $g(x) \geq f(x) \geq 0$, e $\int_a^c g(x)\,dx$ converge, então $\int_a^c f(x)\,dx$ também converge.

TEOREMA 2: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções não definidas em c do intervalo $[a, c]$. Se é válida a desigualdade $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\int_a^c g(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^c f(x)\,dx$ também diverge.

TEOREMA 3: Seja $f(x)$ definida em $[a, c]$, descontínua apenas no ponto c. Se a integral imprópria $\int_a^c |f(x)|\,dx$ converge, então a integral $\int_a^c f(x)\,dx$ também converge.

EXERCÍCIOS 4.2.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

a) $\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

b) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $\int_0^1 Lx\,dx$

d) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\int_0^2 \dfrac{dx}{x^3}$

f) $\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{x\,Lx}$

g) $\int_0^4 \dfrac{dx}{x^2 - 2x - 3}$

h) $\int_0^4 \dfrac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

i) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

j) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$

CAPÍTULO 5 - FUNÇÕES GAMA E BETA

5.1. FUNÇÃO GAMA

DEFINIÇÃO: Seja $\alpha > 0$. A integral imprópria convergente $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ é chamada função gama.

PROPRIEDADES:

a) $\Gamma(1) = 1$

DEMONSTRAÇÃO: Por definição,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-b} + 1\right] = 1$$

b) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \,.\, \Gamma(\alpha)$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha+1-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x}\, dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} x^{\alpha} e^{-x}\, dx$$

Fazendo $u = x^{\alpha}$ e $dv = e^{-x}\, dx$, temos

$du = \alpha x^{\alpha-1}\, dx$ e $v = -e^{-x}$ e, integrando por partes,

$$\int_0^{b} x^{\alpha} e^{-x}\, dx = -x^{\alpha} \,.\, e^{-x}\Big|_0^b + \alpha \int_0^{b} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = -\frac{b\alpha}{e^b} +$$

$$+ \alpha \int_0^{b} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Como $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \frac{b\alpha}{e^b} = 0$ (aplicando L'Hospital),

$$\Gamma(\alpha + 1) = \lim_{b\to+\infty} \alpha \int_0^{b} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \alpha \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx =$$

$$= \alpha \,.\, \Gamma(\alpha).$$

c) $\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in N.$

DEMONSTRAÇÃO: (A rigor, deveríamos usar a indução matemática). Basta observar que

$\Gamma(2) = 1 \, . \, \Gamma(1) = 1 = 1!$

$\Gamma(3) = 2 \, . \, \Gamma(2) = 2 \, . \, 1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3 \, . \, \Gamma(3) = 3 \, . \, 2 \, . \, 1 = 3!$

$\vdots$

OBSERVAÇÃO: Mostraremos adiante que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

EXEMPLOS:

a) Calcule $\Gamma(6)$

$\Gamma(6) = 5! = 120$

b) Calcule $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ $\quad \frac{5}{2} = \alpha + 1 \therefore \alpha = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \, . \, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \, . \, \frac{1}{2} \, . \, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

c) Calcule $\int_0^\infty x^4 \, e^{-x} \, dx$ $\quad \frac{3}{2} = \alpha + 1 \therefore \alpha = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$\int_0^\infty x^4 \, e^{-x} \, dx = \Gamma(5) = 4! = 24$

d) Calcule $\int_0^\infty x^6 \, e^{-2x} \, dx$

Fazendo a substituição $x = \frac{t}{2}$, temos

$dx = \frac{1}{2} \, dt$, e se $x = 0, \; t = 0$

$x \to \infty, \quad t \to \infty$

Logo, $\int_0^\infty x^6 \, e^{-2x} \, dx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^6 \, . \, e^{-t} \, . \, \frac{1}{2} \, dt =$

$= \frac{1}{2^7} \int_0^\infty t^6 \, e^{-t} \, dt = \frac{1}{2^7} \, . \, \Gamma(7) = \frac{6!}{2^7}$

EXERCÍCIOS 5.1.

1. Resolver:

a) ${}_0\int^{\infty} \sqrt{x}\ e^{-(x/3)}\ dx$

b) ${}_0\int^{\infty} \sqrt{x}\ e^{-(\sqrt{x}/2)}\ dx$

c) ${}_{-\infty}\int^{+\infty} x^2\ e^{-x^2}\ dx$

d) ${}_{-\infty}\int^{+\infty} x^3\ e^{-x^2}\ dx$

e) ${}_0\int^{1} \dfrac{x\ e^{(-x/1-x)}}{(1-x)^3}\ dx$

f) ${}_0\int^{\pi/2} \sec^3 x\ \mathrm{tg}\ x\ .\ e^{1-\sec x}\ dx$

g) ${}_{1/2}\int^{\infty} \dfrac{[L(2x)]^3\ .\ e^{-L(2x)}}{x}\ dx$

h) ${}_{-\infty}\int^{\infty} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-[(x-m)^2/2\sigma^2]}\ dx$ DICA: $y = \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$

2. Calcular a integral

${}_1\int^{\infty} (Lu)^{3/2}\ u^{-2}\ du$ pela substituição $u = e^x$.

5.2. FUNÇÃO BETA

DEFINIÇÃO: A função beta é definida por

$$B(m,\ n) = {}_0\int^{1} x^{m-1}\ (1-x)^{n-1}\ dx, \qquad m > 0, \qquad n > 0.$$

IMPORTANTE $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } m \geqslant 1 \text{ e } n \geqslant 1, \text{ a integral é própria.} \\ \text{Se } m > 0 \text{ e } n > 0 \text{ e ou } m < 1 \text{ ou } n < 1, \text{ a} \end{array} \right.$

integral é imprópria, mas convergente. pois x e/ou (1-x) estarão no denominador, e como a integral é definida no intervalo [0, 1] podemos ter problemas no denominador.

PROPRIEDADES:

a) $B(m,\ n) = \dfrac{\Gamma(m)\ .\ \Gamma(n)}{\Gamma(m + n)}, \qquad m > 0, \quad n > 0.$

b) $B(m,\ n) = 2 \ {}_0\int^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} t \cos^{2n-1} t \ dt$

DEM.: Faça a substituição

$x = \operatorname{sen}^2 t, \quad dx = 2 \operatorname{sen} t \cos t \ dt$

Então, $\quad x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad \text{e}$$

$$B(m,\ n) = {}_0\int^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1} dx = {}_0\int^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 t)^{m-1} \ .$$

$$\underbrace{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}_{\cos^2 t}{}^{n-1} \ 2 \operatorname{sen} t \cos t \ dt = 2 \ {}_0\int^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} t \cos^{2n-1} t \ dt$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-2} t \cos^{2n-2} \operatorname{sen} t \cos t \, dt$$

c) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

DEM.: Da propriedade a,

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \tag{1}$$

Da propriedade b,

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = 2 \ {}_0\int^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} t \cos^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} t \ dt = 2 \ {}_0\int^{\pi/2} dt =$$

$$= 2 \ \frac{\pi}{2} = \pi. \tag{2}$$

Igualando (1) e (2), temos

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \quad \text{e, portanto,} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

EXEMPLOS:

a) Calcule $\ {}_0\int^1 x^4 (1 - x)^3 \ dx$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx = B(5,\,4) = \frac{\Gamma(5)\ \Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4!\ 3!}{8!}$$

b) Calcule $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x}}$

Se $x = 2t$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$ e $dx = 2\,dt$

$x = 2 \Rightarrow t = 1$

Logo,

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x}} = \int_0^1 \frac{4t^2\ 2dt}{\sqrt{2-2t}} = \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}}\cdot B\left(3,\,\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma(3)\ .\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{8}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{64\ \sqrt{2}}{15}$$

$\alpha+1=7/2$

c) Obter $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^3\,x\ \cos^4\,x\ dx$ $\alpha=\frac{7}{2}-\frac{2}{2}$

$\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^3\,x\ \cos^4\,x\ dx = \frac{1}{2}\ B\left(2,\,\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\ .\ \frac{\Gamma(2)\ .\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{2}{35}$$

$=\dfrac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$

$2m-1=3$; $2n-1=4$

$m=2$; $n=\frac{5}{2}$

$\alpha+1=\frac{9}{2}$; $=\dfrac{1}{\frac{35}{2}}=\frac{2}{35}$

$\alpha=\frac{9}{2}-\frac{2}{2}=\frac{7}{2}$

EXERCÍCIOS 5.2.

$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma(5/2)$

$=\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

1. Resolver as integrais:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^2\,e^x\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)^3}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^3 x^4\sqrt{9-x^2}\,dx$

f) $\int_1^e \frac{(Lx)^4 (1 - Lx)}{5x} dx$

g) $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4 x \, dx$

h) $\int_0^{\pi/4} \text{sen}^3 2x \cos^5 2x \, dx$

i) $\int_0^{\pi} \text{sen} \frac{x}{2} dx$

j) $\int_0^{\pi/2a} \cos^2 ax \, dx \qquad (a \neq 0)$

l) $2 \int_0^{\pi/3} \text{sen}^4 \frac{3x}{2} \cos^2 \frac{3x}{2} dx$

2. Calcular as integrais utilizando as substituições indicadas:

a) $\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2} + x\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x\right)^{3/2} dx, \qquad t = \frac{1}{2} + x$

b) $\int_{1/5}^{2/5} (5x - 1)^{1/2} (2 - 5x)^{3/2} dx, \qquad x = \frac{u + 1}{5}$

CAPÍTULO 6 - APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

6.1. ÁREAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Já vimos que se f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$, então a área sob o gráfico de f de a até b é dada por

$A = \int_a^b f(x)\, dx$ (Figura 1)

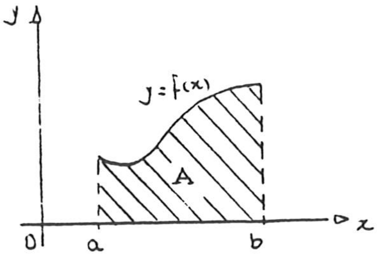


Fig 1

Se $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, então a área da região limitada pelo eixo x e o gráfico de f, entre a e b, é dada por

$A = -\int_a^b f(x)\, dx$ (Figura 2)

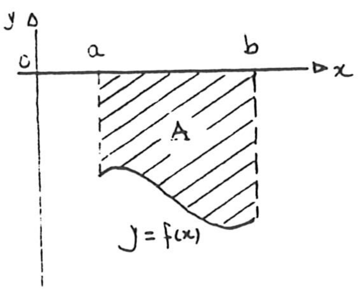


Fig 2

Se f muda de sinal em $[a, b]$ um número finito de vezes, escreva a área A como soma finita de áreas, conforme haja mudança de sinal da função (usando as observações acima).

intersecção = interseção

Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$, então a área A da região delimitada pelos gráficos de f, g, $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \qquad \text{(Figura 3)}$$

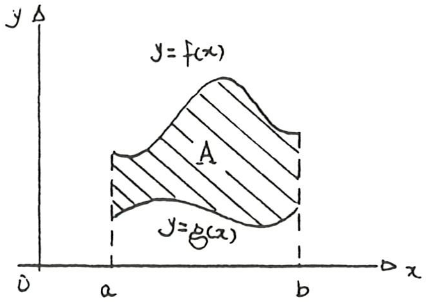
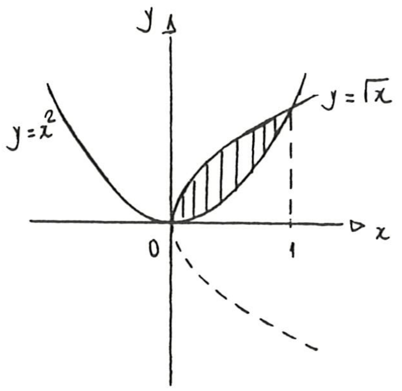


Fig 3

EXEMPLOS:

a) Determine a área da região limitada pelos gráficos das equações $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Os pontos de interseção das curvas são:

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

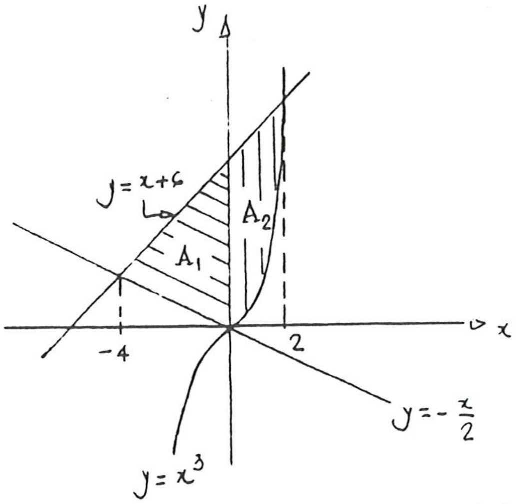
Logo,

$$\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 + 0\right] = \frac{1}{3}$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\, u^2$$

unidades ao quadrado

b) Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y = x+6$, $y = x^3$ e $y = -\dfrac{x}{2}$



ITERAÇÕES

x	$x(x^2-1)$
1	0
2	6
3	24

Pontos de intersecção: $\Rightarrow x(x^2-1) = 6$

$$x + 6 = x^3 \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$\Rightarrow 3x = -12$

$$x + 6 = -\frac{x}{2} \Rightarrow 2x + 12 = -x \Rightarrow x = -4$$

Logo, $A = A_1 + A_2 = \int_{-4}^{0} \left(x + 6 + \frac{x}{2}\right) dx + \int_{0}^{2} (x + 6 - x^3)\,dx = \int_{-4}^{0}\left(\frac{3}{2}x+6\right)$

$= \left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2$

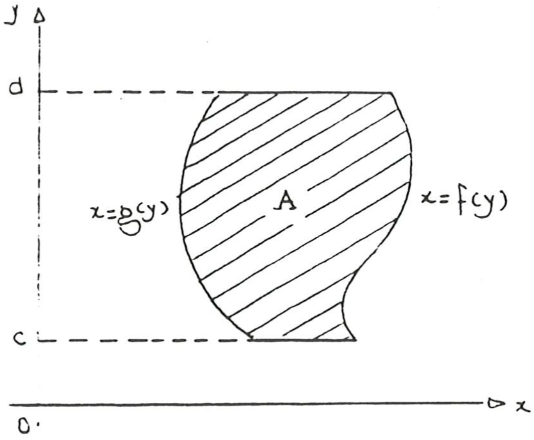
$$= \frac{1}{2} \int_{-4}^{0} (3x + 12)\, dx + \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$

$= -12 + 24 + 2 + 12 - 4 = 22$

$$= \frac{1}{2}\left[3\,\frac{x^2}{2} + 12\,x\right]_{-4}^{0} + 2 + 12 - 4 = -12 + 24 + 10 = 22\ u^2$$

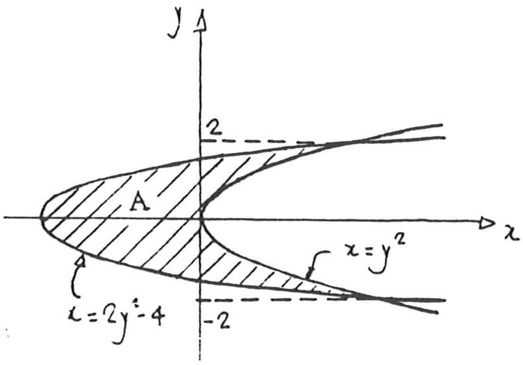
OBSERVAÇÃO: Às vezes, é preciso determinar a área A de uma região delimitada pelos gráficos de $y = c$ e $y = d$ e de duas equações da forma $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com $f(y) \geqslant g(y)$ $\forall y \in [c, d]$. De modo análogo ao que acabamos de ver

$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$, onde agora y é considerado a variável independente.



EXEMPLO:

Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das equações $2y^2 = x + 4$ e $x = y^2$. (Procede-se de forma análoga mas com os eixos trocados)



$2y^2 = x+4$
$x = 2y^2 - 4$
raízes: $2y^2 - 4 = 0$
$2y^2 = 4$
$y^2 = 2 \therefore y = \pm\sqrt{2}$
$y = \pm 1,7$
Se $y = 0$, $x = -4$

$x = y^2$
passa em
(y, x)
$(0, 0)$
$(1, 1)$
$(2, 4)$

Intersecções:

$2y^2 - 4 = y^2 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

Logo, $A = \int_{-2}^{2} [y^2 - (2y^2 - 4)]\, dy =$

$= \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = \left[4y - \dfrac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \dfrac{32}{3}\ u^2.$

$\left[8 - \frac{8}{3} - (-8) + \left(-\frac{8}{3}\right)\right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{12}{3}$

EXERCÍCIOS 6.1.

1. Calcular a área compreendida entre a curva

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 3 \\ 8 - \dfrac{2}{3}x, & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

e o eixo das abscissas.

2. Calcular a área delimitada pelas curvas:

a) $y = 3x^2 + 2;$ $y = 0;$ $x = -2$ e $x = 1$

b) $y = x^3;$ $y = 8$ e $x = 0$

c) $y^2 = 9x;$ $y = 3x$

d) $y = x^2 - 3x + 2;$ $y = -x^2 + x + 2$

e) $y = 4 - x^2;$ $y = 0$

f) $y = \dfrac{a^2}{x};$ $x = \dfrac{a}{2};$ $x = a$ e $y = 0$

g) $y = x^2 - 6x + 8;$ $y = x + 2$

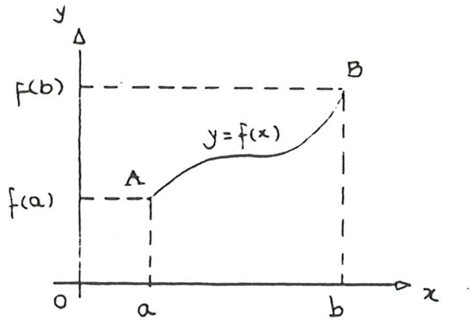
3. Calcular a área do segmento de círculo de equação $y^2 + x^2 = 36$ limitado pelas retas $x = 0$ e $x = 3$.

nÃo 4. Determinar a equação do membro da família de curvas dadas por $y = a - bx^2$ que passam pelo ponto $(1, 1)$ e que corta o primeiro quadrante fechando a menor área possível $(b > 0)$.

6.2. COMPRIMENTO DE ARCO EM COORDENADAS CARTESIANAS

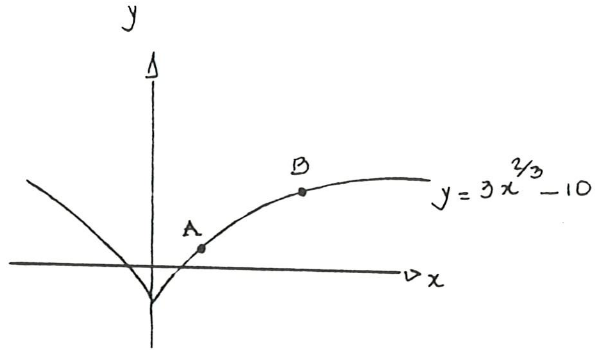
Seja f uma função suave (f e sua derivada f' são contínuas) em $[a, b]$. O comprimento de arco do gráfico de f de $A(a, f(a))$ a $B(b, f(b))$ é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



EXEMPLOS:

a) Se $f(x) = 3x^{2/3} - 10$, determine o comprimento do arco do gráfico de f do ponto $A(8, 2)$ ao ponto $B(27, 17)$.



Como $f'(x) = 2x^{-(1/3)} = \dfrac{2}{x^{1/3}}$, temos

$$L = \int_8^{27} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x^{1/3}}\right)^2}\, dx = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{2/3}}}\, dx =$$

$$= \int_8^{27} \frac{\sqrt{x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}}\, dx.$$

Fazendo a substituição $u = x^{2/3} + 4$,

$u = (2^3)^{2/3} + 4 = 4 + 4 = 8$

$du = \dfrac{2}{3} x^{-(1/3)}\, dx = \dfrac{2}{3} \dfrac{1}{x^{1/3}}\, dx$, temos que se $x = 8$, $u = 8$

$u = (3^3)^{2/3} + 4 = 9 + 4 = 13$

e se $x = 27$, $u = 13$. Assim,

$\frac{3}{2}\int_8^{13} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{3}{2}\int_8^{13} \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_8^{13} u^{3/2}\,du$

$$L = \frac{3}{2} \int_8^{13} \sqrt{u}\, du = \left[u^{3/2}\right]_8^{13} = 13^{3/2} - 8^{3/2} \simeq 24,2 \text{ u}$$

b) Determine o comprimento da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$

Vamos achar o comprimento da quarta parte da circunferência (1º quadrante), de equação

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

logo $y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot -2x$

Temos $y' = - \dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx$

$$\text{Logo, } \frac{1}{4} L = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$r\,dx$

$$= r \text{ arc sen } \frac{x}{r}\Big|_0^r = r\,\frac{\pi}{2}$$

Portanto, $L = 2\pi r$ u $= 4 \cdot \frac{r\pi}{2} = 2\pi r$

EXERCÍCIOS 6.2.

NÃO 1. Pesquisar na bibliografia a demonstração da fórmula vista nesta seção.

2. Achar o comprimento dos arcos de curvas dados pelas equações que se seguem e de conformidade com os intervalos considerados:

a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $x \in [0, 3]$

NÃO b) $9y = 4x^3$, $x \in [0, 3]$

c) $y = 3x$, $x \in [2, 6]$

NÃO d) $y = -\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} L\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$, $x \in [1, 3]$

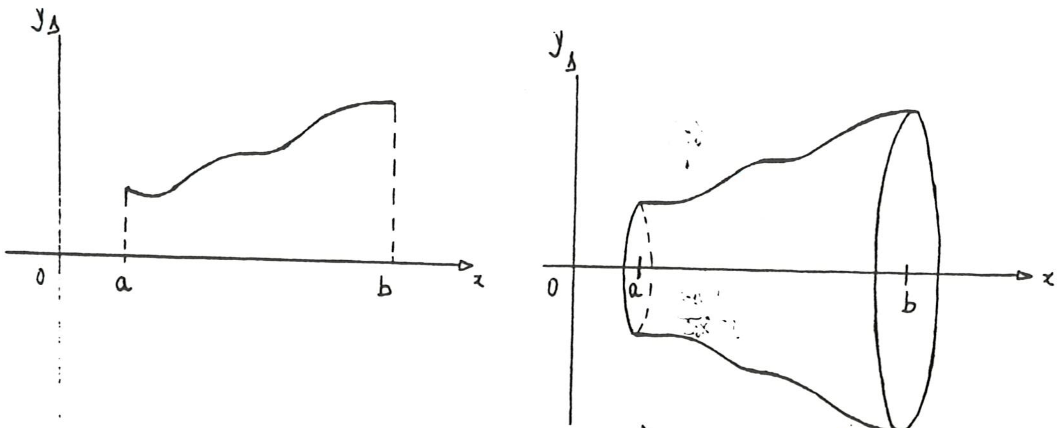
NÃO e) $y = Lx$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

f) $y = \int_4^x \sqrt{t - 1}\, dt$, $x \in [4, 9]$

g) $y = {}_0\int^x t\sqrt{t^2 + 2}\, dt, \qquad x \in [0,\ 2]$

6.3. VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS

Fazendo-se uma região plana girar em torno de uma reta do plano, o sólido resultante é chamado sólido de revolução. A reta em torno da qual se processa a revolução é chamada eixo de revolução.



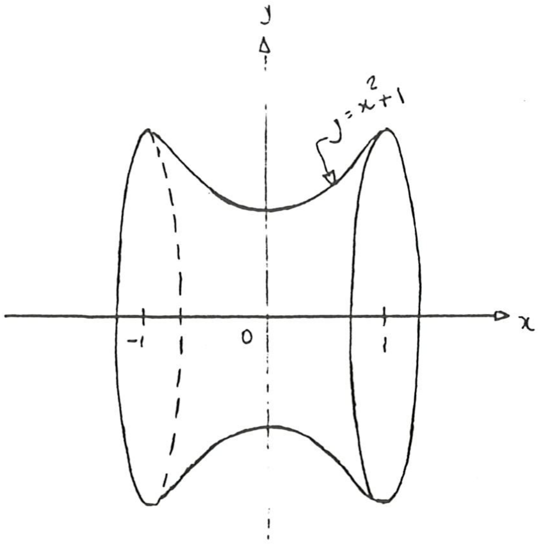
$V = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\pi f(\xi_i)^2}_{\text{área de base}} \cdot \Delta_i x \Big\}$ altura

Seja f contínua em $[a,\ b]$. O volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos de f, de $x = a$, de $x = b$ e do eixo x é dado por

$$V = {}_a\int^b \pi [f(x)]^2\, dx \qquad = \qquad \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f(\xi)^2 \cdot \Delta x$$

EXEMPLOS:

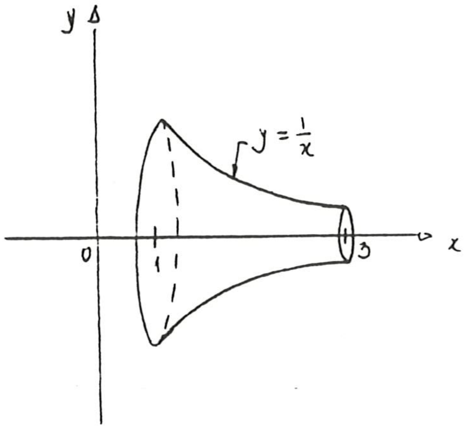
a) Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo a, da região sob o gráfico de f de -1 a 1.



Temos $V = {}_{-1}\int^{1} \pi (x^2 + 1)^2 \, dx =$ $\pi\left\{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right\} =$ $= \pi\left[\frac{3+10+15+3+10+15}{15}\right.$

$$= \pi \; {}_{-1}\int^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} = \frac{56\pi}{15} \, u^3.$$ $= \pi \frac{56}{15}$

b) Idem, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, de 1 a 3



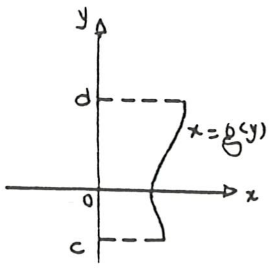
Temos $V = {}_{1}\int^{3} \pi \dfrac{1}{x^2} \, dx = \pi \; {}_{1}\int^{3} x^{-2} \, dx =$

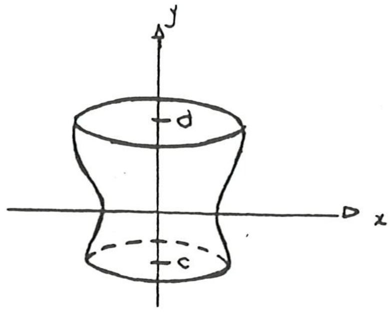
$\pi\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \pi\left(\frac{2}{3}\right)$

$$= \pi \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{1}^{3} = \frac{2\pi}{3} \, u^3$$

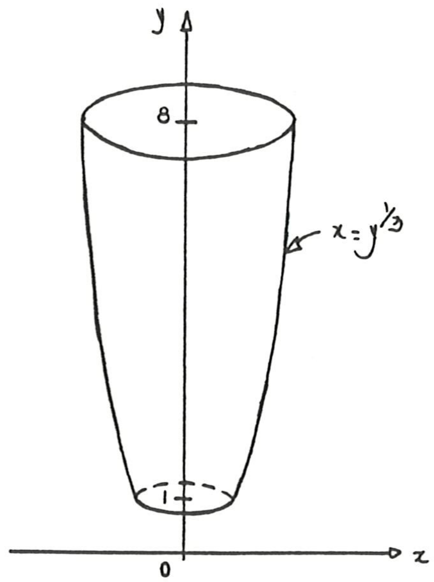
De igual modo, se $x = g(y)$ é contínua em $[c, d]$, o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelos gráficos de g, de $y = c$, de $y = d$ e do eixo y é dado por

$$V = \int_c^d \pi \left[g(y)\right]^2 dy$$





EXEMPLO: Faz-se girar em torno do eixo y a região limitada pelo referido eixo e pelos gráficos de $y = x^3$, $y = 1$ e $y = 8$. Calcular o volume do sólido assim gerado.



Temos $x = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$

Assim, $V = \int_1^8 \pi \left(y^{1/3}\right)^2 dy = \pi \int_1^8 y^{2/3}\, dy = \pi \left.\dfrac{y^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right|_1^8$ $= \left.\frac{3\pi}{5} y^{5/3}\right|_1^8$

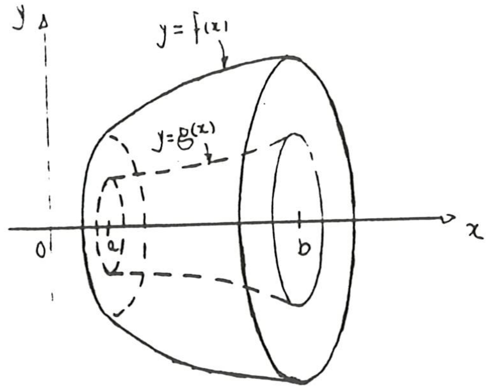
$= \pi \frac{3}{5}\left(8^{5/3} - 1^{5/3}\right)$

$= \pi \frac{3}{5}\left(2^{\cancel{3}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}} - 1\right) = \pi \frac{3}{5}(32-1)$

$= \frac{23}{5}\pi$

$= \dfrac{93}{5}\pi\ u^3$

Consideremos, agora, uma região limitada pelos gráficos de $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos de duas funções contínuas f e g, com $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ $x \in [a, b]$. Fazendo-se esta região girar em torno do eixo x, obtém-se um sólido como o ilustrado a seguir:

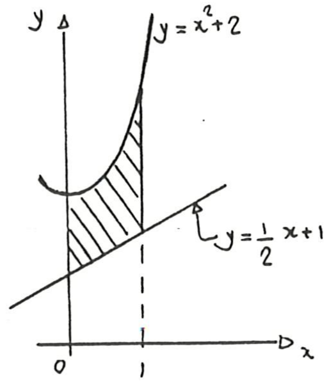


Pode-se obter o volume V do sólido subtraindo-se do volume gerado pela região maior, o volume gerado pela regiao menor, ou seja,

$$V = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx - \int_a^b \pi\,[g(x)]^2\,dx =$$

$$= \int_a^b \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

EXEMPLO: Faz-se girar em torno do eixo x a região limitada pelos gráficos de $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$. Determinar o volume do sólido resultante.



$$V = \int_0^1 \pi\left[(x^2 + 2)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2\right] dx = \int_0^1 \pi\left[x^4 + 4x^2 + 4 - \frac{1}{4}x^2 - x - 1\right] dx$$

$$= \int_0^1 \pi\left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3\right) dx = \frac{79\pi}{20}\,u^3.$$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{15}{4}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 3\right)$$

$$= \pi\left(\frac{4+25-10+60}{20}\right) = \pi\,\frac{79}{20} = \frac{79\pi}{20}$$

EXERCÍCIOS 6.3.

1. Ver na bibliografia a demonstração da fórmula da seção em questão.

2. Determinar o volume de cada um dos sólidos gerados pelas curvas, dadas nas condições que se seguem e girando em torno do eixo das abscissas:

a) $y = 3$ $\qquad x \in [1, 5]$

b) $y = x^2$ $\qquad x \in [1, 3]$

c) $y^2 = 6x$ $\qquad x \in [1, 4]$

d) $y = 2 + 3x$ $\qquad x \in [0, 3]$

e) $y = \sqrt{9 - x^2}$ $\qquad x \in [1, 2]$

f) $y = \text{sen } x$ $\qquad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3. Calcular o volume do sólido em cada caso apresentado a seguir, girando o segmento de curva em torno do eixo y.

a) $x = 2$ $\qquad y \in [0, 4]$

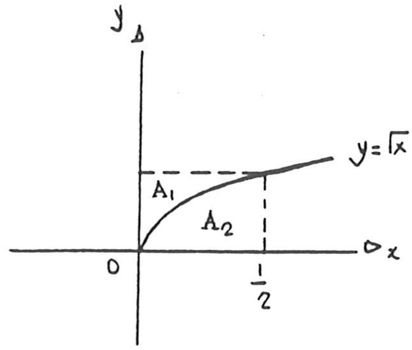
b) $y = 2x + 1$ $\qquad y \in [1, 5]$

c) $y = \sqrt{6x}$ $\qquad y \in [0, 6]$

d) $y = \text{arc cos } x^2$ $\qquad y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

4. Calcule o volume do sólido gerado pela área delimitada pelas curvas $y = 1 + x^2$ e $y = x + 3$, quando ele gira em torno do eixo x.

5. Seja o gráfico abaixo:



Calcular os volumes obtidos pela revolução de:

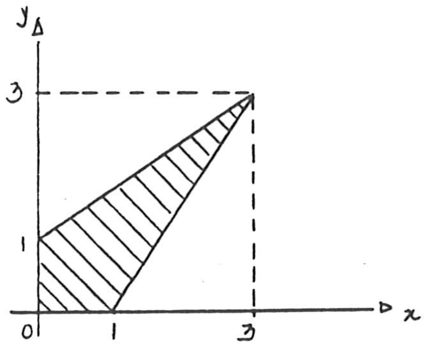
a) A_2 em torno do eixo x.

b) A_2 em torno do eixo y.

c) A_1 em torno do eixo x.

d) A_1 em torno do eixo y.

6. Calcular o volume do sólido obtido pela revolução da figura abaixo em torno do eixo x:



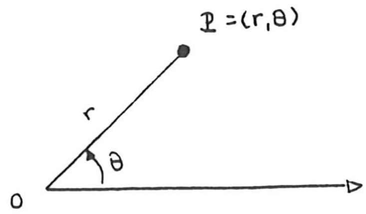
6.4. COORDENADAS POLARES

A fim de estabelecer um sistema de coordenadas polares no plano, escolhamos um ponto fixo 0, chamado polo, e um semi-eixo com origem 0 denominado eixo polar.

O

polo eixo polar

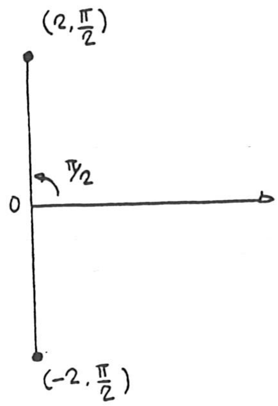
A posição de um ponto P no plano pode ser especificada por dois números: o número r, que expressa a distância de P do polo, e o número θ, que é o ângulo formado pelo segmento OP e o eixo polar. Como de costume, ângulos positivos são medidos no sentido anti-horário.



OBSERVAÇÕES:

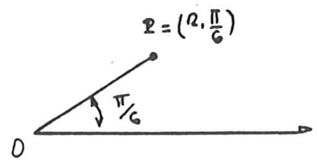
a) É conveniente admitir r negativo, convencionando que o ponto $(-r, \theta)$ está localizado a $|r|$ unidades do polo, mas numa semi-reta oposta a de θ, isto é, $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$.

EXEMPLO:



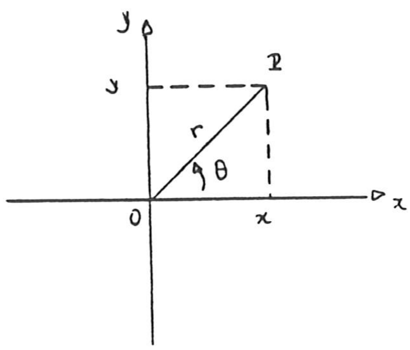
b) Ao contrário do sistema de coordenadas cartesianas, um ponto P tem muitas representações diferentes no sistema de coordenadas polares.

EXEMPLO:



$$P = \left(2, \frac{\pi}{6}\right) = \left(2, \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi\right) = \left(-2, \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi\right)$$

c) Vejamos como as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas retangulares estão relacionadas. Faça a origem do sistema de coordenadas cartesianas coincidir com o polo e a direção positiva do eixo x com o eixo polar.



Temos $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

EXEMPLOS:

a) Converta as coordenadas polares dadas para coordenadas cartesianas:

a1) $(4, 30^o)$ a2) $\left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$

a1) $(x, y) = (4\cos 30^o, 4\,\text{sen}\,30^o) = \left(4\,\frac{\sqrt{3}}{2}, 4\cdot\frac{1}{2}\right) =$

$= (2\sqrt{3}, 2)$.

a2) $(x, y) = \left(-2\cos\frac{5\pi}{6}, -2\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), -2\cdot\frac{1}{2}\right) =$

$(\sqrt{3}, -1)$

b) Converta as coordenadas cartesianas dadas para coordenadas polares com $r \geqslant 0$ e $-\pi < \theta \leqslant \pi$

b1) $(2, 2)$ b2) $(5, -5/\sqrt{3})$

b1) $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e $\text{tg} = \frac{2}{2} = 1$. Como

$-\pi < \theta \leqslant \pi$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Assim, as coordenadas polares são $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

b2) $r = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ e $\text{tg}\,\Theta = \frac{(-5/\sqrt{3})}{5} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Como $-\pi < \theta \leqslant \pi$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Logo, as coordenadas polares são $\left(10/\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

6.5. GRÁFICOS POLARES

O gráfico de uma equação polar consiste em todos os pontos P do plano que têm pelo menos um par de coordenadas polares (r, θ) satisfazendo a equação.

O esboço de um gráfico polar pode ser feito através das mesmas técnicas utilizadas ao se esboçar os gráficos cartesianos. É útil encontrar as intersecções do gráfico com o eixo e com algumas semi-retas especiais, como $\theta = \pm(\pi/2)$, $\theta = \pm(\pi/4)$ e assim sucessivamente. A simetria do gráfico pode ser de especial utilidade.

[illegible] ordem [illegible] arbitrárias dadas para [illegible] circunferência.

[illegible]

[illegible] $(\cos 5 \theta)$ [illegible]

[illegible] como [illegible]

[illegible]

[illegible] Gráfico polar [illegible]

Um [illegible] da equação polar consiste em to-

dos os pontos [illegible] do plano que têm pelo menos um par de coorde-

nadas [illegible] satisfazendo a equação.

O esboço de um gráfico polar pode ser feito a-

través [illegible] aspectos [illegible] no esboço de gráfi-

cos cartesianos. [illegible] encontrar as interseções do gráfico

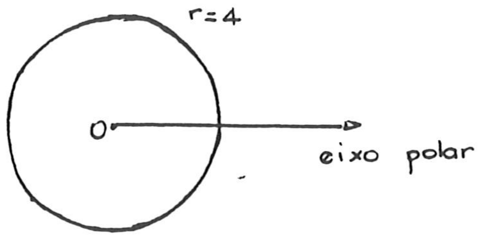
[illegible] com o [illegible] especiais, como [illegible]

[illegible] sucessivamente. A simetria do gráfico pode

ser de especial [illegible]

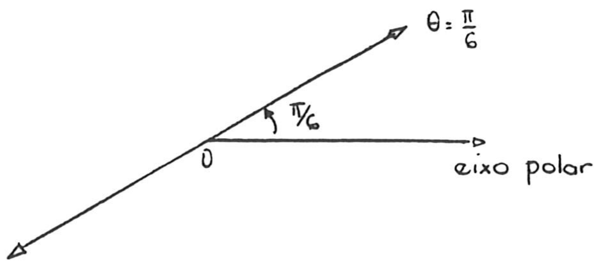
EXEMPLOS:

a) $r = 4$



b) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

O gráfico consiste em uma reta passando em O e determinando um ângulo de $\dfrac{\pi}{6}$ rad com o eixo polar.

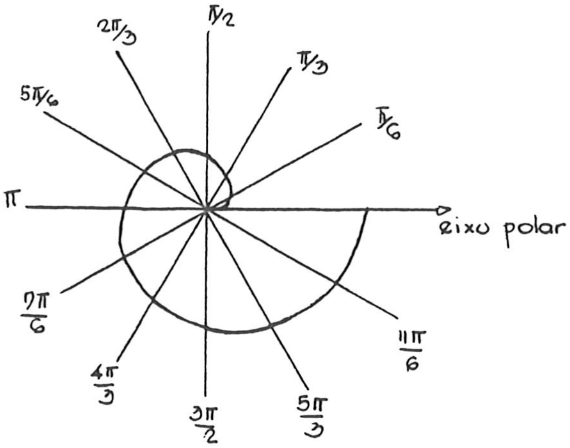


c) Esboce o gráfico de $r = 1 + \dfrac{6}{\pi}\theta$ para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

A tabela abaixo mostra alguns valores escolhidos para θ entre 0 e 2π e os valores de r correspondentes:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Gráfico :



OBSERVAÇÃO: A simetria do gráfico de uma equação polar pode ser freqüentemente constatada faxendo-se substiuições convenientes na equação e testando para ver se a nova equação é equivalente à original. A tabela seguinte mostra algumas substituições que acarretam a simetria indicada:

Substituição	Uma equação equivalente implica
θ por $-\theta$	Simetria em relação à reta obtida pela extensão do eixo polar (Figura 1).
θ por $\pi-\theta$	Simetria em relação à reta sobre o eixo $\pi/2$ (Figura 2).
θ por $\pi+\theta$	Simetria em relação ao polo (Figura 3).

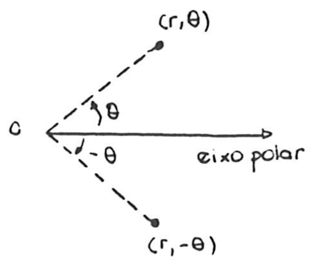


Fig 1

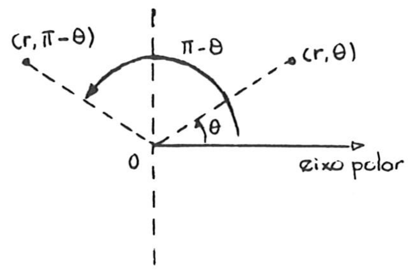


Fig 2

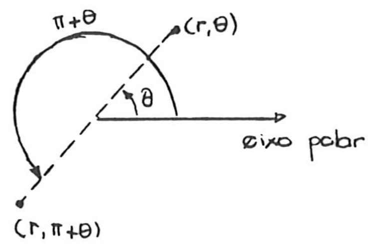


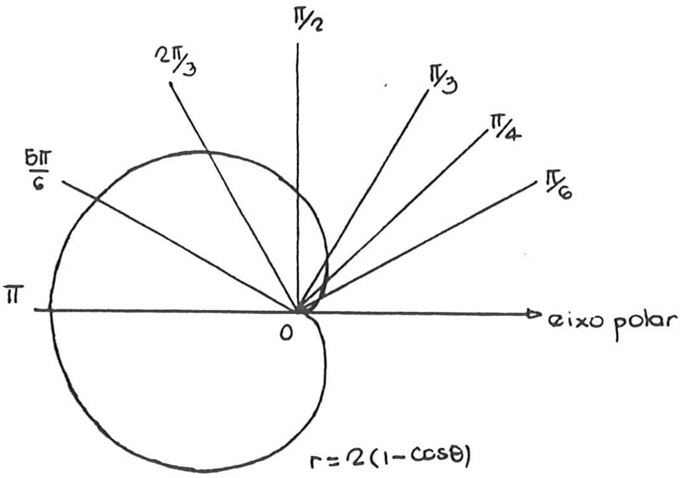
Fig 3

EXEMPLO: Esboce o gráfico da equação polar $r = 2(1 - \cos\theta)$.

O gráfico é simétrico somente em relação ao eixo polar, pois substituindo θ por $-\theta$ vem $r = 2[1 - \cos(-\theta)]$ que é equivalente à equação original.

Gráfico:

π	r
0	0
$\dfrac{\pi}{6}$	$2 - \sqrt{3} \simeq 0,27$
$\dfrac{\pi}{4}$	$2 - \sqrt{2} \simeq 0,59$
$\dfrac{\pi}{3}$	1
$\dfrac{\pi}{2}$	2
$\dfrac{2\pi}{3}$	3
$\dfrac{5\pi}{6}$	$2 + \sqrt{3} \simeq 3,73$
π	4

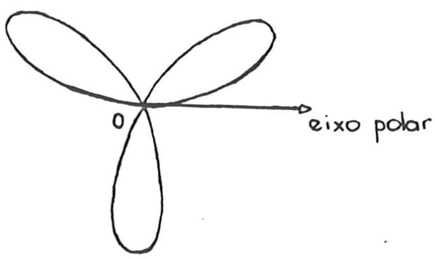


O gráfico é chamado cardióide.

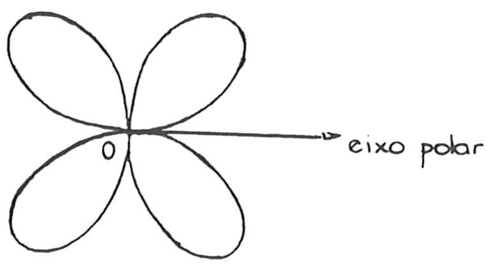
Outras curvas polares notáveis:

a) Rosácea de N folhas: $r = a \text{ sen } k\,\theta$ ou $r = a \cos k\,\theta$,

onde $N = \begin{cases} k, \text{ se } k \text{ é inteiro ímpar} \\ 2k, \text{ se } k \text{ é inteiro par} \end{cases}$

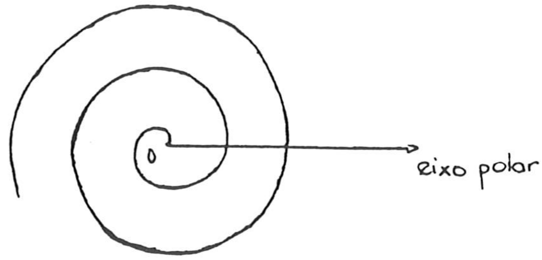


$r = a\,\text{sen}\, 3\theta$

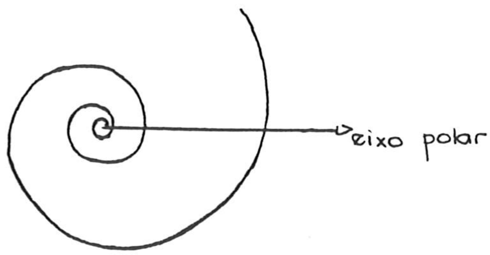


$r = a\,\text{sen}\, 2\theta$

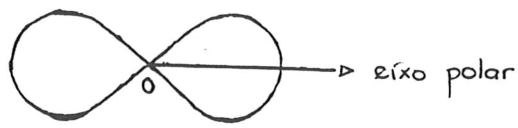
b) Espiral de Arquimedes: $r = a\theta, \quad \theta \geqslant 0$



c) Espiral logarítmica: $r = e^{a\theta}$

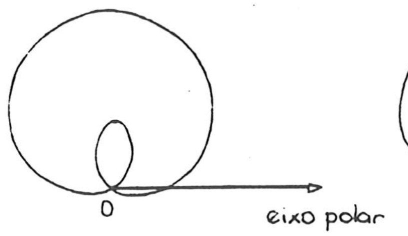


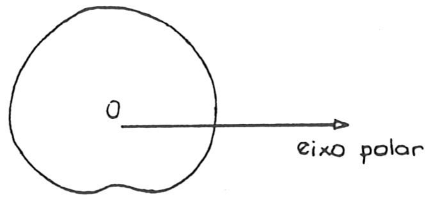
d) Lemniscata: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ou $r^2 = a^2 \text{ sen } 2\theta$



$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

e) Limaçon: $r = a \pm b \cos \theta$ ou $r = a \pm b \text{ sen } \theta$





EXERCÍCIOS 6.5.

Esboce os gráficos das equações abaixo, discutindo a simetria:

a) $r = 4 \cos \theta$

b) $r = 2 \text{ sen } \theta$

c) $r = 2$

d) $r = 2 \text{ sen } 3\theta$ (rosácea de três folhas)

e) $r = 2 \cos 2\theta$ (rosácea de quatro folhas)

f) $r = 2 \text{ sen } 4\theta$ (rosácea de oito folhas)

g) $r = 2(1 - \text{sen } \theta)$ (cardióide)

h) $r = 3 + 4 \text{ sen } \theta$ (limaçon)

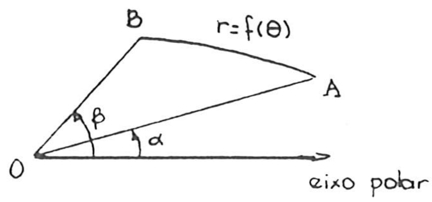
i) $r = 3 - 2 \cos \theta$ (limaçon)

j) $r^2 = 8 \cos 2\theta$ (Lemniscata)

l) $9\theta = Lr$ (espiral logarítmica)

6.6. ÁREAS EM COORDENADAS POLARES

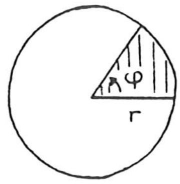
Suponha que temos uma curva dada pela equação $r = f(\theta)$, onde $f(\theta)$ é contínua quando $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$



Recordemos como calcular a área de um setor circular. A área A do setor pode ser calculada por:

2π ——— πr^2

φ ——— A

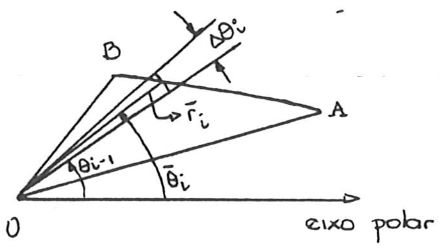


Assim, resolvendo a regra de três,

$$A = \varphi \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \varphi$$

Vamos, agora, determinar a área do setor OAB limitado pela curva $r = f(\theta)$ e pelos raios vetores $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.

Divida a área por raios vetores $\theta_0 = \alpha$, $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta$ em n partes. Denote por $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ os ângulos entre os raios vetores. Denote por $\overline{r}_i$ o comprimento de um raio vetor correspondendo a algum ângulo $\overline{\theta}_i$ entre θ_{i-1} e θ_i.



Consideremos o setor circular com raio $\overline{r}_i$ e ângulo central $\Delta\theta_i$. Sua área será

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} \overline{r}_i^{\,2} \cdot \Delta\theta_i .$$

A soma $A_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i^{\,2} \, \Delta\theta_i =$

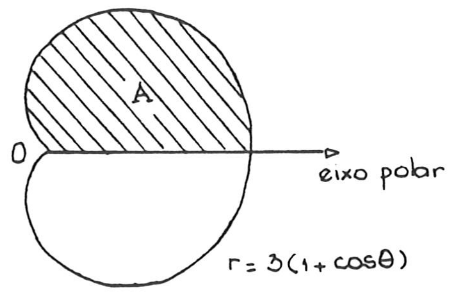
$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [f(\overline{\theta}_i)]^2 \, \Delta\,\theta_i$

é uma estimativa da área do setor desejado.

O seu limite, quando máx $\Delta\theta_i \to 0$ é a integral definida

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta.$$

EXEMPLO: Encontre a área da "metade superior" da região compreendida pela cardióide $r = 3(1 + \cos\theta)$.



Temos $A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [3(1 + \cos\theta)]^2 \, d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta +$

$+ \cos^2\theta) \, d\theta = \frac{9}{2}\left[\theta + 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}(\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{27\pi}{4}\,u^2$

EXERCÍCIOS 6.6.

Calcular a área delimitada pela curva $r = (\theta)$ no intervalo, em cada caso a seguir:

a) $r = 2\theta$ $\qquad \theta \in [0, \pi]$

b) $r^2 = 9\,\text{sen}\,2\theta$ $\qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $r = 2(1 + \cos\theta)$ $\quad \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

d) $r = 3\cos\theta$ $\quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

e) $r = \text{sen}\,\theta$ $\quad \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

f) $r = \text{sen}\,\theta\cos\theta$ $\quad \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

g) $r = \text{tg}\,\theta$ $\quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

6.7. COMPRIMENTO DE ARCO EM COORDENADAS POLARES

O comprimento de arco da curva por $r = f(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é dado por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta$$

desde que f' exista e seja contínua no intervalo $[\alpha, \beta]$.

EXEMPLO: Ache o comprimento do cardióide $r = 3(1 + \cos\theta)$ (veja figura na seção anterior).

Variando o ângulo θ de 0 a π, obtemos a metade do comprimento.

Temos $f'(\theta) = -3\,\text{sen}\,\theta$ e, então,

$$L = 2.\int_0^{\pi} \sqrt{[-3\,\text{sen}\,\theta]^2 + [3(1 + \cos\theta)]^2}\, d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{9(\text{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)}\, d\theta =$$

$$= 2 \,.\, 3\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 6\int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)}\, d\theta =$$

$$= 6\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 12\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 12 \,.\, 2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 24u$$

EXERCÍCIOS 6.7.

1. Demonstrar a fórmula presente nesta seção (ver bibliografia).

2. Determine os comprimentos dos arcos dados pelas equações:

   a) $r = \text{sen}\ \theta \qquad \theta \ \varepsilon\ [0, \pi]$

   b) $r = 2\theta \qquad \theta \ \varepsilon\ [0, \pi]$

   c) $r = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \qquad \theta \ \varepsilon\ [0, 2\pi]$

   d) $r = e^{\theta} \qquad \theta \ \varepsilon\ [0, 4\pi]$

   e) $r = 3\cos\theta + 4\ \text{sen}\ \theta \qquad \theta \ \varepsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Encontre o erro na seguinte afirmação:

Visto que o gráfico de uma equação polar $r = 4\cos\theta$ é um círculo de raio 2, o comprimento da circunferência deste círculo deve ser dada por

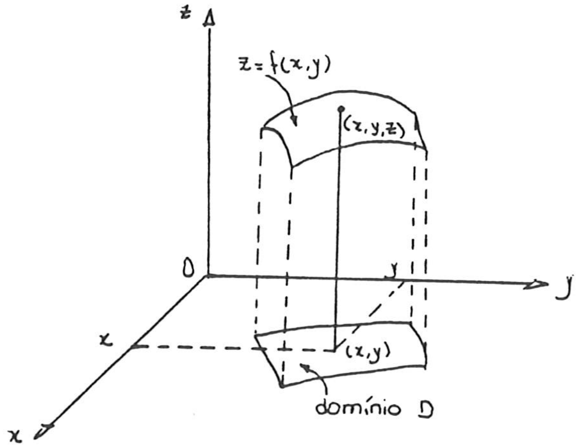
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{16\ \text{sen}^2\theta + 16\cos^2\theta}\ d\theta = \int_0^{2\pi} 4\ d\theta = 8\pi.$$

(Mas o comprimento de uma circunferência de raio 2 deve ser apenas 4π).

CAPÍTULO 7 - FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

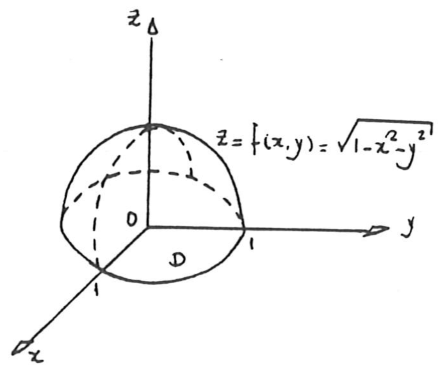
7.1. DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 1: Uma função real f a duas variáveis reais é uma relação que transforma em um único número real z cada par ordenado (x, y) de números reais de um certo conjunto D, chamado de domínio da função. Escrevemos $z = f(x, y)$.



EXEMPLO: A função f cujo domínio D é o disco circular consistindo de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e que está definida pela equação

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tem gráfico



DEFINIÇÃO 2 (LIMITE): O conceito de limite estende-se facilmente para funções de duas variáveis. Por exemplo, afirmar que

$f(x, y)$ tende ao limite L quando (x, y) tende a (x_0, y_0) significa que o número $f(x, y)$ pode estar tão perto do número L quanto se deseja, pela escolha do ponto (x, y) suficientemente próximo do ponto (x_0, y_0). A notação é

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L$$

Por não fazer parte dos objetivos do curso, omitiremos a definição formal do limite de uma função a duas variáveis.

7. 2. DERIVADAS PARCIAIS

Se f é uma função a duas variáveis e (x, y) é um ponto no domínio de f, então a derivada parcial $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ de f em (x, y) em relação à primeira variável é definida por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

contanto que o limite exista.

Outras notações:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (se $z = f(x, y)$), $f_x(x, y)$, $f_1(x, y)$, $D_x f(x, y)$, $D_1 f(x, y)$, $Z'_x, f'_x(x, y)$.

Vamos nos ater apenas às técnicas de derivação parcial, uma vez que não formalizamos o conceito de limite.

Note que, na definição de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, a variá-

vel y é fixa. Segue-se que, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, pode-mos considerar y como constante e derivar $f(x, y)$ em relação a x da maneira usual.

EXEMPLOS: Calcule as derivadas parciais das funções abaixo, em relação à variável x:

a) $f(x, y) = x^2 y$

De acordo com a observação acima,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

b) $z = x^2 \operatorname{sen} y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} y$$

c) $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\, x^{y-1}$$

d) $z = 3x^2 + 4y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x$$

Analogamente, define-se derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a y.

EXEMPLOS: Ache as derivadas parciais das funções abaixo, em relação à variável y:

a) $f(x, y) = x^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

b) $z = x^2 \operatorname{sen} y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

c) $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \, Lx$$

d) $z = 3x^2 + 4y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12y^2$$

OUTROS EXEMPLOS:

a) Se $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$, ache $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Usando a regra do quociente, considerando y constante e diferenciando em relação a x, temos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x + y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x + y) - (x + y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(1 + 0) - (x + y)(2x + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Similarmente

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x + y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x + y) - (x + y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(0 + 1) - (x + y)(0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) Se $z = f(x, y) = e^{xy}$ sen xy, ache $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Aplicando a regra do produto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} \text{ sen } xy) = e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(\text{sen } xy) + \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) \text{ sen } xy =$$

$$= y\, e^{xy} \cos xy + y\, e^{xy} \text{ sen } xy.$$

OBSERVAÇÃO 1 (REGRA DA CADEIA): Há muitas versões da regra da cadeia aplicadas às derivadas parciais. A mais simples delas é uma transcrição direta da regra da cadeia para funções a uma variável:

normal grega

Se w é uma função de u e $u = g(x, y)$ então,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

desde que as derivadas $\frac{dw}{du}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ existam.

EXEMPLO: Se $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, encontre $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$.

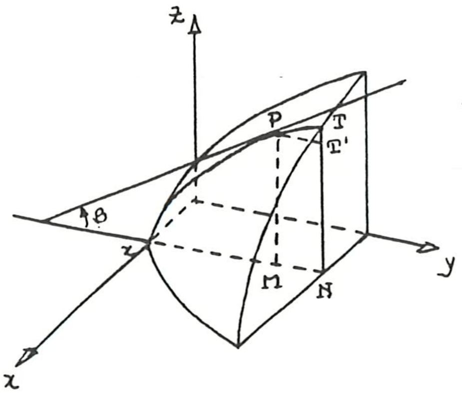
Faça $u = 1 - x^2 - y^2$, ou seja, $w = \sqrt{u}$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{du}\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\frac{\partial}{\partial y}(1 - x^2 - y^2) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

OBSERVAÇÃO 2 (INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA PARCIAL):

Seja $z = f(x, y)$ a equação da superfície abaixo:



Desenho o plano $x = \underline{c}te$. Para um dado x, considere o ponto M no plano xy. Ao ponto M, corresponde o ponto P na superfície. Deixando x constante, dê um acréscimo $\Delta y = MN = PT'$ à variável y.

O quociente $\dfrac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}$ é igual à tangente do ângulo formado pela reta secante PT, ou seja,

$$\frac{f(x,y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} = \text{tg}\ T\hat{P}T'.$$

Conseqüentemente, o limite

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$ → ou seja, x é considerado constante

é a tangente do ângulo β.

Analogamente para a derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

OBSERVAÇÃO 3 (DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR):

Seja dada uma função a duas variáveis $z = f(x,\ y)$.

As derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,\ y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,\ y)$ são também funções nas variáveis x e y. Podemos, então, achar suas derivadas parciais. Existem, então, quatro derivadas parciais ditas de segunda ordem, a saber:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,\ y)$: f é derivado duas vezes com respeito a x.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f_{xy}(x,\ y)$: f é derivado primeiro em relação a x e então o resultado é derivado com respeito a y.

∂y ∂x então certo

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f_{yx}(x,\ y)$: f é derivado primeiro em relação a y e então o resultado é derivado com respeito a x.

∂x ∂y

a) $z = x^4y^3 - 2xy^2 + y - 5$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2y^0$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^4y - 4x$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3y^3 - 2y^2$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^4y^2 - 4xy + 1$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^3y^2 - 4y$

b) $z = \sqrt{x^2 - \operatorname{sen} xy}$ $\qquad w = x^2 - \operatorname{sen} xy$ $\qquad z = w^{1/2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\cancel{2}} w^{-1/2} \cdot (\cancel{2}x - y\cos xy) = \frac{2x - y\cos xy}{2\sqrt{x - \operatorname{sen} xy}}$$

c) $z = L\sqrt{x^3y^2 - y^3}$ $\qquad w = \sqrt{x^3y^2 - y^3} \Rightarrow z = Lw$

$t = x^3y^2 - y^3 \Rightarrow w = t^{1/2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{Le} \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2} \cdot (2x^3y - 3y^2)$$

$$= \frac{2x^3y - 3y^2}{2\sqrt{x^3y^2 - y^3} \cdot \sqrt{x^3y^2 - y^3}} = \frac{2x^3y - 3y^2}{2(x^3y^2 - y^3)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) \quad : \text{ f é derivado duas vezes com respeito a y.}$$

EXEMPLOS:

a) Seja $f(x, y) = x^2y + y^3$. Encontre as derivadas parciais de segunda ordem de f.

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$.

Assim, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 2x$.

b) Se $f(x, y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x + y)$, encontre $f_{xx}(x, y)$ e $f_{xy}(x, y)$.

Como $f_x(x, y) = ye^{xy} + \cos\,(x + y)$, $u'v + uv'$

$f_{xx}(x, y) = y^2\, e^{xy} - \operatorname{sen}(x + y)$ e $f_{xy}(x, y) = yxe^{xy} + e^{xy} - \operatorname{sen}(x + y)$.

Podemos, de igual modo, definir derivadas parciais de ordens superiores a 2.

EXERCÍCIOS 7.2.

1. Em cada uma das funções abaixo, obter o requerido:

a) $z = x^4y^3 - 2xy^2 + y - 5$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$

b) $z = \sqrt{x^2 - \operatorname{sen} xy}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$

c) $z = L\sqrt{x^3y^2 - y^3}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$

d) $z = \text{arc tg } \dfrac{x + y}{x - y}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

e) $z = x^3 \text{ tg } xy$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}$

f) $z = \text{sen}^3 \sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}$

g) $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}$

h) $z = x^3y^2 + 3xw^3 - 2y^2w + 3w^2$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ \dfrac{\partial z}{\partial w}$

i) $z = \text{arc tg} \sqrt{\dfrac{1 - \cos xy}{1 + \cos xy}}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ \dfrac{\partial z}{\partial x \partial y}$ $\dfrac{\partial z}{\partial x \partial y}$

j) $z = e^{\sqrt{x/y}}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}$

l) $z = e^{xy} \text{ sen}^2 \, x^2y$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ \dfrac{\partial z}{\partial x}$

m) $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y}$

2. Encontre cada derivada parcial abaixo, usando a regra da cadeia vista na seção 7.2.:

a) $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, onde $w = \sqrt{u}$ e $u = 3x^2 + y^2$

b) $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, onde $w = Lu$ e $u = 7x^2 + 4y^3$

c) $\dfrac{\partial}{\partial x} g(x, y)$, onde $g(x, y) = \text{sen } (xy)^2$

d) $\dfrac{\partial L}{\partial y} (x^2/y)$

e) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, onde $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

f) $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, onde $w = \int_1^u e^{\operatorname{sen} t}\, dt$ e $u = x^2 - 5y$

3. Encontre as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem das funções abaixo:

a) $f(x, y) = 7x^2 - 13xy + 18y^2$

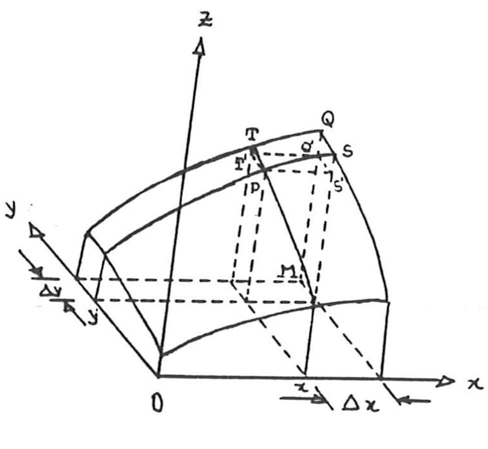
b) $f(x, y) = kx^n y^m$, m, n e k constantes

c) $f(x, y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x + y)$

d) $f(x, y) = y \cos x - x\, e^{2y}$

7.3. INCREMENTO E DIFERENCIAL TOTAL

7.3.1. Considere a linha de interseção PS da superfície $z = f(x, y)$ com o plano y = constante paralelo ao plano xz.



Neste plano, dê um acréscimo Δx em x. Então, z crescerá. Este acréscimo é chamado incremento parcial de z com respeito a x e é denotado por $\Delta_x z$ (na figura, o segmento SS'). Então,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Similarmente, se x ē deixado constante e ē dado um acrēscimo Δy em y, o acrēscimo em z ē chamado incremento parcial de z em relação a y (na figura, $\overline{TT'}$) e denotado

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Finalmente, dando acrēscimo Δx em x e Δy em y, obtemos em z um incremento Δz, chamado incremento total da função z:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Na figura, Δz ē o segmento QQ'.

7.3.2. Se f ē uma função a duas variāveis e $z = f(x, y)$, então, afirmo que

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

onde ε_1 e ε_2 são funções de Δx e Δy tais que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

A demonstração desse fato pode ser encontrada nos livros constantes na bibliografia.

Chamaremos de diferenciais das variāveis independentes x e y os incrementos Δx e Δy e denotaremos por dx e dy, respectivamente.

Definimos a diferencial total dz da variāvel z por

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Comparando as expressões acima, vemos que quando dx (isto ē, Δx) e dy (isto ē, Δy) se aproximam de zero, ε_1 e ε_2 também se aproximam de zero e concluīmos que dz ē uma boa aproximação de Δz.

Como dz é mais fácil de se calcular que Δz, valemo-nos do fato que $dz \simeq \Delta z$ em certas situações.

EXEMPLOS:

a) Se $z = f(x, y) = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$, encontre a diferencial total dz.

Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2y^2 - 2y^3 + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^3y - 6xy^2 + x,$$

$$dz = (9x^2y^2 - 2y^3 + y)\,dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)\,dy.$$

b) O volume V de um cone circular reto de altura h e raio da base r é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Se a altura é aumentada de 5 cm para 5,01 cm e o raio da base é diminuido de 4 cm para 3,98 cm, encontre uma aproximação da variação ΔV no volume.

Usemos o diferencial total dV para aproximar ΔV.

Logo,

$$dV = \frac{\partial v}{\partial h}\,dh + \frac{\partial v}{\partial r}\,dr = \frac{1}{3}\pi r^2 dh + \frac{2}{3}\pi r\,h\,dr$$

Quando $h = 5$, $dh = 0{,}01$

$r = 4$, $dr = -0{,}02$

Assim,

$$\Delta V \simeq dV = \frac{1}{3}\pi 4^2(0{,}01) + \frac{2}{3}\pi 4 \,.\, 5(-0{,}02) \simeq -0{,}6702 \text{ cm}^2$$

O valor correto de ΔV, com 5 casas decimais, é $-0{,}66978$ cm^2.

EXERCÍCIOS 7.3.

1. Nos exercícios abaixo, determine dz:

a) $z = x^3 - x^2y + 3y^2$

b) $z = x^2 \text{ sen } y + 2y^{3/2}$

c) $z = y\, e^{-2x} - 3x^4$

d) $z = x^2\, L(x^2 + y^2)$

e) $z = x^2\, e^{xy} + \dfrac{1}{y^2}$

2. Obtenha uma aproximação da variação de área de um triângulo isósceles se cada um dos lados iguais aumenta de 100 a 101 e se o ângulo entre eles decresce de 120 para 119.

3. Calcular e estimar pela diferencial total, a alteração de área ocorrida num curral retangular de 35 x 20 m e que após concluído apresentou as dimensões 35,4 x 20,6 m.

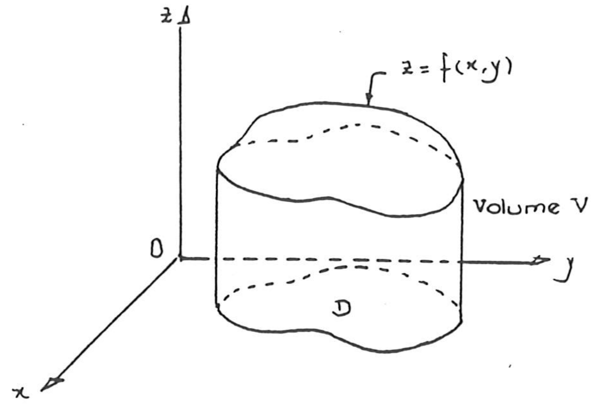
7.4. INTEGRAIS DUPLAS

7.4.1. Se $f(x, y)$ é contínua em uma região D, então sua integral dupla sobre a região D é denotado por

$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$.

A região D é chamada domínio de integração.

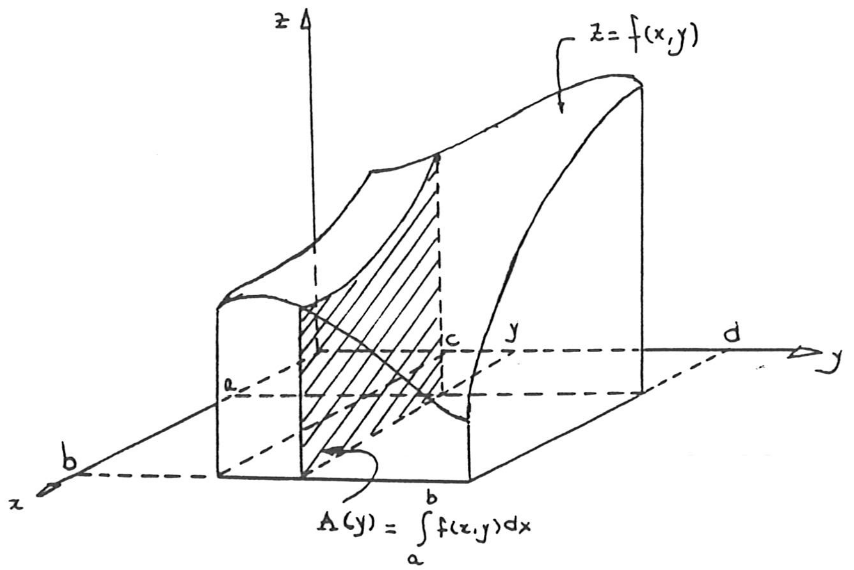
Geometricamente, se $f(x, y) \geqslant 0$, então $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$, a integral dupla de $f(x, y)$ sobre D é igual ao volume V do sólido que é limitado acima pelo gráfico de f, abaixo pela região D e lateralmente pelo cilindro sobre o limite de D cujas geratrizes são paralelas ao eixo z.



7.4.2. INTEGRAIS DUPLAS NUM DOMÍNIO RETANGULAR

Seja $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ o domínio de $z = f(x, y)$ e vamos considerar, inicialmente, que y seja fixo. Então $f(x, y)$ pode ser interpretada como função de uma variável independente. Denotemos por $A(y)$ a integral

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$



Como função de y, podemos integrar $A(y)$ no intervalo $[c, d]$. Temos, então

$$\iint_{D=[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d A(y)\, dy$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

OBSERVAÇÃO: Apesar de não ser a definição mais exata da integral de Riemann para funções de duas variáveis, para o nível do curso presente será suficiente.

EXEMPLOS:

a) Calcule $\iint_D x \cos xy\, dx\, dy$, onde $D = [1, 2] \times \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

$$\iint_D x \cos xy\, dx\, dy = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x \cos xy\, dy\, dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x \cos xy\, dy\right) dx = \int_1^2 [\operatorname{sen} xy]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\, dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\operatorname{sen} 2\pi x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \operatorname{sen} 2\pi x\, dx - \int_1^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x\, dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x\right]_1^2 = -\frac{2}{\pi}$$

b) Calcule $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y)\, dx\, dy$

$$\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6\, x^2y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^2 [x^2 + 2x^3y]_1^4\, dy = \int_{-1}^2 (16 + 128y - 1 - 2y)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^2 (126y + 15)\, dy = \left[63y^2 + 15y\right]_{-1}^2 = 234$$

EXERCÍCIOS 7.4.2.

Calcular

a) $\int_0^3 \int_1^3 (3x^2y + 4xy^3)\, dx\, dy$

b) $\int_0^{\pi/2} \int_1^3 2x \cos y\, dx\, dy$

c) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi} (\text{sen } x + \cos y)\, dx\, dy$

d) $\int_{-2}^1 \int_0^2 (x + e^x y^2)\, dx\, dy$

e) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \cos 2x\, \text{sen}^3 y\, dy\, dx$

f) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} 8\, \text{sen} \left(\frac{x}{2} + y\right) dx\, dy$

g) $\int_{-1}^2 \int_0^1 \frac{4xy(1 + x^2)}{1 + y^2}\, dy\, dx$

h) $\int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} 2y^2 \cos x\, e^{-y}\, dx\, dy$

i) $\int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} y^2\, x^4\, e^{-(x^2 + y)}\, dy\, dx$

j) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \cos^5 x\, \text{sen}^4 2y\, dy\, dx$

l) $\int_0^{\infty} \int_1^e \frac{y^2 (Lx)^3 (1 - Lx)^4 e^{-y}}{x}\, dx\, dy$

m) $\int_0^{\pi} \int_1^3 x \cos y\, e^{x+y}\, dx\, dy$

n) $\int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{x^2(1 + 2y)}{1 + y^2}\, dx\, dy$

o) $\int_0^3 \int_0^3 \frac{4\, xy}{(3 + x^2)\sqrt{16 + y^2}}\, dx\, dy$

p) $\int_{-2}^2 \int_0^4 (x^2 + y^3)\, dx\, dy$

q) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi} \text{sen } \frac{x}{2} \cos^3 2y\, dx\, dy$

r) $\int_{-2}^{2} \int_{2}^{3} \dfrac{3 + x^2}{4 + y^2}\, dx\, dy$

s) $\int_{-2}^{0} \int_{0}^{2} (3x^2 + e^{2x}\, y)\, dx\, dy$

t) $\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \cos(x - y)\, dy\, dx$

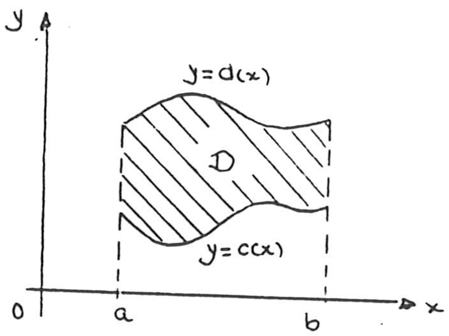
u) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{3} \dfrac{x^2(1 - x)^3}{9 + y^2}\, dy\, dx$

v) $\int_{0}^{1} \int_{1}^{2} 2x(x^2 + y)^3\, dx\, dy$

x) $\int_{0}^{\pi/2} \int_{1}^{3} 3x \cos^2 y\, dx\, dy$

7.4.3. INTEGRAIS DUPLAS NUM DOMÍNIO QUALQUER

Consideremos o caso abaixo, em que o domínio tem forma não retangular:

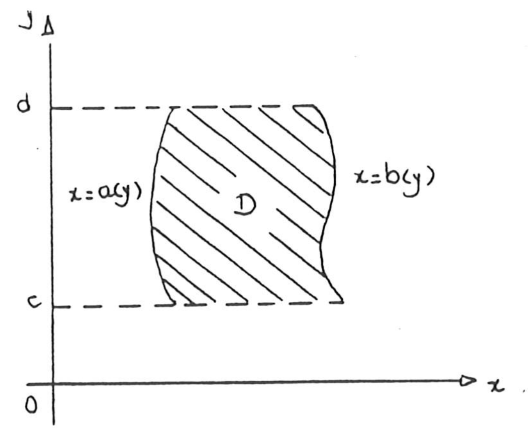


Se $f(x, y)$ é contínua em D e $y = c(x)$ e $y = d(x)$ são funções contínuas no intervalo $[a, b]$, então a integral dupla de $f(x, y)$ sobre a região D é definida por

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy\right] dx$$

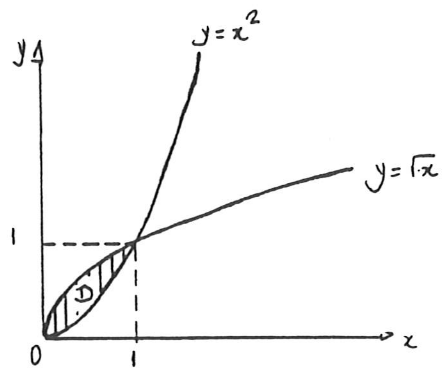
Obviamente, se D é a região abaixo, limitada por $x = a(y)$, $x = b(y)$, $y = c$ e $y = d$, então

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx\right] dy$$



EXEMPLOS:

a) Calcule $\iint_D (x + y)\, dx\, dy$, onde D é a região no primeiro quadrante acima da curva $y = x^2$ e abaixo da curva $y = \sqrt{x}$.



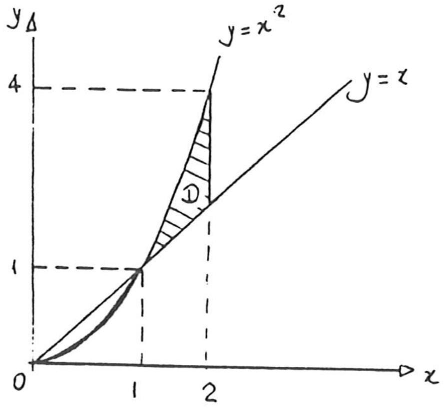
Logo, $\iint_D (x + y)\, dx\, dy =$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{3/2} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{10} .$$

b) Calcular $\iint_D (2x - y)\, dx\, dy$, onde D é limitada pelas re tas $x = 2$, $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.



Temos $\iint_D (2x - y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_x^{x^2} (2x - y)\,dy\right] dx =$

$$= \int_1^2 \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]_x^{x^2} = \int_1^2 \left(2x^3 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + \frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{3}{2}x^2\right) dx = \left[-\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_1^2 =$$

$$= -\frac{16}{5} + 8 - 4 + \frac{1}{10} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} = \frac{9}{10}.$$

EXERCÍCIOS 7.4.3.

1. Calcular

   a) $\int_0^2 \int_{-x}^{x+1} (2x + 3y)\,dy\,dx$

   b) $\int_1^3 \int_y^{6-y} (x + y)\,dx\,dy$

2. Determine o volume do sólido cuja base é a região do plano xy, delimitada pela parábola $y = 4 - x^2$ e pela reta

$y = 2 - x$ e cuja parte superior é o plano $u = x - 5$.

3. Calcular $\iint_D x^2 y \, dx \, dy$ onde D é dado pelas retas $y = x$, $y + x = 5$, $y = 3$ e $x = 4$.

4. Calcular $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$ onde D é dado pelos eixos x e y e pelas retas $y = 1$ e $y = 2 - x$.

5. Calcular a área do domínio D, limitado pelo eixo y e as retas $y = 2x$ e $y = 3$.

6. Calcular $\iint_D e^{y/x} \, dx \, dy$ onde D é um triângulo limitado pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 1$.

7. Calcular o volume no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados, pelo plano $2x + y + z = 4$ e pelo cilindro de base $x^2 + y^2 = 1$.

7.4.4. MUDANÇA DE VARIÁVEIS NAS INTEGRAIS DUPLAS

No caso de funções de uma variável, vimos que se tivermos

$\int_a^b z(x) \, dx$ e fizermos uma mudança de variável $x = g(u)$, obtemos

$$\int_\alpha^\beta z[g(u)] \, g'(u) \, du$$

com $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$

Vejamos o caso de funções a duas variáveis: Seja $z = f(x, y)$ uma função contínua numa região D e $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$.

Fazendo-se as mudanças de variáveis

$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$

temos

$$I = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \, |J| \, du \, dv,$$

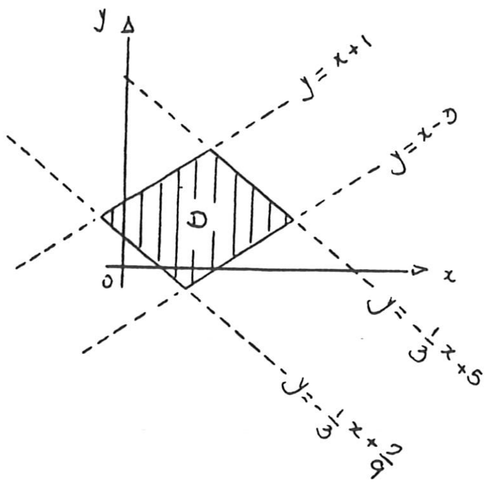
onde D' é uma região tal que existe uma correspondência um a um entre os pontos de D e D', e J é o chamado jacobiano, definido por

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

EXEMPLO: Calcule $\iint_D (y - x) \, dx \, dy$,

onde D é a região limitada pelas retas

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}, \quad y = -\frac{1}{3}x + 5$$



É trabalhoso calcular esta integral dupla diretamente. Entretanto, uma simples mudança de variável permite reduzir ao caso de domínio retangular:

$$\begin{cases} u = y - x \\[2ex] v = y + \dfrac{1}{3}x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4}u + \dfrac{3}{4}v \\[2ex] y = \dfrac{1}{4}u + \dfrac{3}{4}v \end{cases}$$

As retas serão transformadas pelas mudanças, em

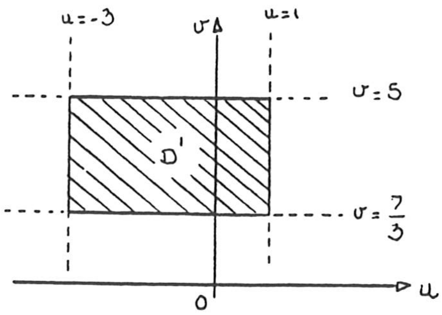
$$y = x + 1 \implies u = 1$$

$$y = x - 3 \implies u - 3$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \implies v = \frac{7}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 5 \implies v = 5$$

Consequentemente, a região D será transformada na região D' abaixo:



Como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4},$$

temos

$$I = \iint_D (y - x)\, dx\, dy = \iint_{D'} u \cdot \frac{3}{4}\, du\, dv =$$

$$= \int_{7/3}^{5} \int_{-3}^{1} \frac{3}{4} u\, du\, dv = -18$$

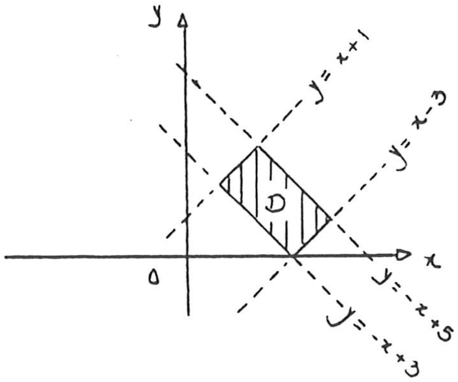
EXERCÍCIOS 7.4.4.

1. Calcule a integral $\iint_D (2x + y)\, dx\, dy$;

onde a região D é limitada pelas retas $y = x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x + 2$ e $y = -x + 6$.

2. Calcule $\int_D\int xy\, dx\, dy$, onde D é limitado pelas retas $y = 3x + 1$, $y = 3x - 3$, $y = -x + 1$ e $y = -x + 3$.

3. Calcular o volume do prisma de base D abaixo e truncado pelo plano definido por $z = z + y$.



APÊNDICE A - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A.1. DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 1: Chama-se equação diferencial toda equação que envolve uma função e suas derivadas.

Simbolicamente, uma equação diferencial pode ser escrita como

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{ou}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Se a função incógnita depende apenas de uma variável, temos uma equação diferencial ordinária. Se depende de mais de uma variável, temos uma equação diferencial parcial.

EXEMPLOS:

a) $\dfrac{dy}{dt} = y \cos t$

b) $\dfrac{d^2y}{dt} - 2\,\dfrac{dy}{dt} + y = t\,e^t$

c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u = u(t, x)$

DEFINIÇÃO 2: Chama-se ordem de uma equação diferencial ordinária, o número n que corresponde à ordem máxima das derivadas da equação.

Exemplos: No exemplo (a) acima, a equação tem ordem 1 e no exemplo (b), ordem 2.

DEFINIÇÃO 3: Uma solução de uma equação diferencial é qual-

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

c) $2\sqrt{t} - \text{arc tg } y = c$

$$(1 + y^2)\, dt - \sqrt{t}\, dy = 0$$

d) $y = CL\left(\frac{1}{x}\right)$

$$xy'' + y' = 0$$

A.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM UM

Uma equação diferencial de primeira ordem é da forma $F(x, y, y') = 0$.

Consideremos equações que podem ser colocadas na forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, onde f é definida numa região D.

Para tais equações, o seguinte teorema garante a existência de uma única solução:

TEOREMA: Se na equação $y' = f(x, y)$ a função $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em alguma região D do plano xy contendo (x_0, y_0), então existe uma única solução $y = \varphi(x)$ que satisfaz a condição $x = x_0 \Rightarrow y = y_0$.

Este problema de encontrar a solução de uma equação diferencial satisfazendo algum valor conhecido num dado instante é conhecido como problema de valor inicial.

DEFINIÇÃO 1: Uma solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem é a função $y = \varphi(x, c)$, que depende de uma constante arbitrária c e que satisfaz as seguintes condições:

i) Ela satisfaz a equação diferencial para qualquer valor específico de c.

ii) Seja qual for o valor inicial ($y = y_0$ para $x = x_0$), é possível achar um valor $c = c_0$ tal que a função $y = \varphi(x, c_0)$ satisfaz a dada condição inicial.

DEFINIÇÃO: Uma solução particular é qualquer função $y = \varphi(x, c_0)$ que é obtido da solução geral $y = \varphi(x, c)$ ao atribuirmos à constante arbitrária c um valor definido $c = c_0$.

EXEMPLO:

Para a equação de primeira ordem $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$,

a solução geral é uma família de funções $y = \dfrac{c}{x}$ (para checar, basta fazer as substituições convenientes).

Vamos encontrar uma solução particular que satisfaz a seguinte condição inicial: $y_0 = 1$ quando $x_0 = 2$.

Daí, $1 = \dfrac{c}{2}$ ou $c = 2$.

Consequentemente, a função $y = \dfrac{2}{x}$ será a solução particular que procuramos.

OBSERVAÇÃO: Do ponto de vista geométrico, a solução geral é uma família de curvas no plano coordenado, que depende de uma constante arbitrária c. Uma solução particular está associada a uma curva desta família que passa por um dado ponto do plano.

A.3. EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARADAS E SEPARÁVEIS

Consideremos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\ f_2(y) \tag{1}$$

Assumindo que $f_2(y) \neq 0$, temos

$$\frac{1}{f_2\ (y)}\ dy = f_1(x)\ dx.$$

Então, as integrais indefinidas à esquerda e à direita diferem por uma constante. Integrando à esquerda em relação à y e à direita em relação a x, obtemos a solução geral da equação (1):

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\ dy = \int f_1(x)\ dx + c$$

Uma equação diferencial do tipo $M(x)\ dx + N(y)\ dy = 0$ é chamado uma equação com variáveis separadas. Sua solução geral é dada por

$$\int M(x)\ dx + \int N(y)\ dy = c.$$

EXEMPLO: Seja uma equação com variáveis separadas:

$$e^x dx - 2y\ dy = 0.$$

Integrando, obtemos a solução geral

$$e^x - y^2 = c.$$

Uma equação da forma

$$M_1(x)\ N_1(y)\ dx + M_2(x)\ N_2(y)\ dy = 0$$

é chamada uma equação com variáveis separáveis. Pode ser reduzida a uma equação com variáveis separadas dividindo-se ambos os lados pela expressão $N_1(y)\ M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)\ N_1(y)}{N_1(y)\ M_2(x)}\ dx + \frac{M_2(x)\ N_2(y)}{N_1(y)\ M_2(x)}\ dy = 0 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\ dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\ dy = 0.$$

EXEMPLO: Seja a equação

$$(1 + x)y\ dx + (1 - y)x\ dy = 0$$

Separando as variáveis, temos

$$\frac{1 + x}{x}\ dx + \frac{1 - y}{y}\ dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0.$$

Integrando, obtemos

$$L|x| + x + L|y| - y = c \quad \text{ou} \quad L|xy| + x - y = c.$$

EXERCÍCIOS A.3.

1. Resolver as equações diferenciais abaixo:

   a) $3\ e^x\ tg\ y\ dx + (1 - e^x)\ sec^2\ y\ dy = 0$

   b) $dy + y\ tg\ x\ dx = 0$

   c) $(x - y^2x)\ dx + (y - x^2y)\ dy = 0$

2. Ache a curva que passa por $(0, -2)$ tal que a declividade $(tg\ \alpha)$ num ponto qualquer seja igual à ordenada nesse mesmo ponto acrescida de 3 unidades.

3. Sob certas condições, o açúcar da cana, em água, se transforma em dextrose, numa razão $\frac{dq}{dt}$ que, em qualquer tempo é proporcional à quantidade ainda não transformada. Se, de 75 gramas no tempo $t = 0$, 8 gramas forem transformados nos primeiros 30 minutos, achar a quantidade transformada em 1 1/2 horas.

4. Em uma certa colônia de bactérias, nascem e morrem em taxas proporcionais ao número presente, de modo que a equação que rege o crescimento da colônia é

$$\frac{dy}{dt} = (k_1 - k_2)\, y.$$

Determinar k_1 e k_2, sabendo que a colônia dobra de tamanho cada 24 horas e teria seu tamanho reduzido à metade em 8 horas se não houvesse nascimento.

5. Numa reação química, uma substância A se transforma em outra B com uma velocidade proporcional à quantidade A ainda não transformada. Dispondo inicialmente de 8 gramas de A, verifica-se que ao cabo de meia hora restam ainda 4 gramas. Achar a expressão da quantidade que resta no fim de t horas. Quantos gramas restam ao cabo de 2 horas?

6. A meia-vida de uma substância radioativa é definida como o espaço de tempo necessário para que metade dos átomos em qualquer amostra da substância decaiam.

   a) A meia-vida do carbono radioativo 14 é 5.600 anos. Ache a quantidade de carbono 14 que resta de uma amostra de quantidade x_0 ao fim de t anos (suponha a taxa de queda proporcional à quantidade presente).

   b) Se 90% do carbono 14 de uma dada amostra de carbono decaiu, ache a idade da amostra.

A.4. EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM UM:

Uma equação linear de ordem um é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x), \tag{1}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas.

Se $P(x) \equiv 0$, a equação é dita linear homogê-

nea. Caso contrário, linear não homogênea.

Para acharmos a solução geral de (1), multipliquemos a equação (1) por $e^{\int P(x)\,dx}$, ou seja,

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} P(x)\, y = e^{\int P(x)dx} Q(x).$$

Pela regra do produto,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} \cdot y\right] = e^{\int P(x)dx} Q(x) \qquad \text{ou}$$

$$e^{\int P(x)dx}\, y = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\, dx + c$$

e assim,

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)\, dx + c\right]$$

é a solução geral da equação (1).

Quando $Q(x) \equiv 0$, temos que

$y = c\, e^{-\int P(x)dx}$ é a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\, y$$

OBSERVAÇÃO: A função $e^{\int P(x)dx}$ introduzida acima é chamada um fator integrante para a equação $y' + P(x)\, y = Q(x)$.

EXEMPLOS:

a) Resolver a equação $\dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen} x\, y = 0$

com a condição inicial $y_0 = 3$ e $x_0 = 0$ (ou $y(0) = 3$).

Temos a solução geral

$$y = c\, e^{-\int \operatorname{sen} x\, dx} = c\, e^{\cos x}$$

Pela condição inicial, $3 = c\, e$, ou $c = 3e^{-1}$.

Assim, $y = 3e^{\cos x - 1}$ é a solução procurada.

b) Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x} y = 4x$, $x > 0$, com a condição $y(1) = 2$.

O fator integrante é

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1/x\ dx} = e^{L|x|} = |x| = x$$

Assim,

$$x\ .\ \frac{dy}{dx} + x.\ \frac{1}{x}\ y = x.\ 4x \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}\ (xy) = 4\ x^2 \quad \text{ou}$$

$$xy = \int 4x^2\ dx + c \quad \text{e, logo,} \quad xy = \frac{4}{3}\ x^3 + c.$$

Então, $y = \dfrac{4}{3}\ x^2 + \dfrac{c}{x}$

Pela condição inicial $y(1) = 2$, $2 = \dfrac{4}{3} + c$ ou $c = \dfrac{2}{3}$.

Portanto $y = \dfrac{4}{3}\ t^2 + \dfrac{2}{3t}$ é a solução procurada.

EXERCÍCIOS A.4.

1. Resolver as equações, dadas as condições iniciais:

   a) $e^{-x}\ \dfrac{dy}{dx} + 2\ e^x y = e^x$, $\qquad y(0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{e}$

   b) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$, $\qquad y(0) = 0$

   c) $\dfrac{dy}{dt} = (\cos\ t)\ y$, $\qquad y(0) = 1$

2. Uma colônia de bactérias cresce a uma razão proporcional ao número de bactérias presente. Se o número duplica em 24 horas, quantas horas serão necessárias para que as bactérias aumentem de 100 vezes a sua quantidade original?

APÊNDICE B - INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES A DADOS EXPERIMENTAIS: MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS

No primeiro semestre, vimos que uma condição necessária para que $z = z(x)$ tivesse um extremo em $x = xo$ era que $dz = z'(xo)dx = 0$ para todo dx, resultando daí que, necessariamente $z'(xo) = 0$.

No caso de z ser uma função a duas variáveis podemos, de igual modo, expressar essa condição colocando

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(xo,\ yo)\ dx + \frac{\partial z}{\partial y}(xo,\ yo)\ dy = 0$$

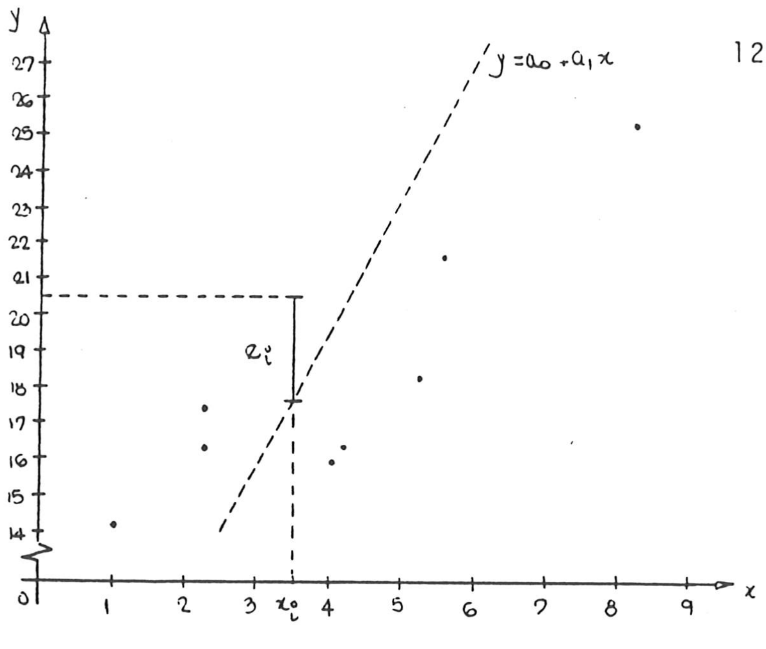
para todo dx e dy, resultando necessariamente que

$$\frac{\partial z}{\partial y}(xo,\ yo) = 0 \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y}(xo,\ yo) = 0.$$

Sejam dados os pontos

x	y
4,0	15,9
3,5	20,4
8,1	25,2
2,3	16,1
4,1	16,1
5,2	18,0
2,1	17,3
5,5	21,5
1,0	14,0

cujo gráfico é representado abaixo:



Suponha que queiramos adaptar a esses pontos uma função linear $y = a_0 + a_1 x$.

O problema é descobrir que valores atribuir a a_0 e a_1.

Seja e_i (chamado erro ou desvio) a diferença do valor observado y_i ao valor calculado pela função linear $a_0 + a_1 x_i$ (vide figura). Assim, $e_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i)$.

O método dos quadrados mínimos se resume na minimização da função

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

em relação às incognitas a_0 e a_1.

Ou seja, queremos ajustar aos pontos (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ uma reta $y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$ tal que

$$Q(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

seja mínima para $a_0 = \hat{a}_0$ e $a_1 = \hat{a}_1$.

Pelo comentário no início dessa seção, é neces-

sário que

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0}(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial a_1}(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = 0, \qquad \text{ou seja,}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)\,(-1) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)\,(-x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left[(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i)x_i - y_i x_i\right] = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} n\,\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

Logo, a solução $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_1$ que minimiza $Q(a_0, a_1)$ é obtida do sistema acima, chamado sistema de equações normais.

Voltemos ao exemplo dado. Para facilitar os cálculos, organizemos a tabela abaixo, completando, inicialmente, as colunas de (1) a (4):

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
y_i	x_i	x_i^2	$x_i\ y_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$
15,9	4,0	16,00	63,60	18,31	-2,41
20,4	3,5	12,25	71,40	17,62	2,78
25,2	8,1	65,61	204,12	23,95	1,25
16,1	2,3	5,29	37,03	15,97	0,13
16,1	4,1	16,81	66,01	18,45	-2,35
18,0	5,2	27,04	93,60	19,96	-1,96
17,3	2,1	4,41	36,33	15,70	1,60
21,5	5,5	30,25	118,25	20,37	1,13
14,0	1,0	1,00	14,00	14,18	-0,18
$\sum_{i=1}^{9}$ 164,5	35,8	178,66	704,34	164,51	-0,01

Temos, então, as equações normais

$$\begin{cases} 9\ \hat{a}_0 + 35{,}8\ \hat{a}_1 = 164{,}5 & \text{(I)} \\ 35{,}8\ \hat{a}_0 + 178{,}66\ \hat{a}_1 = 704{,}34 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo (II) por 35,8 e multiplicando por (-9),

$$\begin{cases} 9\ \hat{a}_0 + 35{,}8\ \hat{a}_1 = 164{,}5 & \text{(III)} \\ -9\ \hat{a}_0 - 44{,}9\ \hat{a}_1 = -177{,}1 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Somando-se (III) e (IV), temos

$-9{,}11\ \hat{a}_1 = -12{,}53 \Rightarrow \hat{a}_1 = 1{,}375.$

Logo, $\hat{a}_0 = 12{,}81$ e a solução de quadrados mínimos será $\hat{y} = 12{,}81 + 1{,}375\ x$.

Com essa solução, podemos completar as colunas (5) e (6) da tabela acima, correspondendo à estimativa $\hat{y}_i$ e ao erro cometido $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$.

A solução de quadrados mínimos, além de minimizar a soma de quadrados dos desvios, acarreta num balanceamento entre os erros positivos e negativos. A menos de aproximação, a soma Σe_i deve dar zero.

Generalizemos o que foi visto acima, considerando o modelo $y = a_0 + a_1 f(x)$.

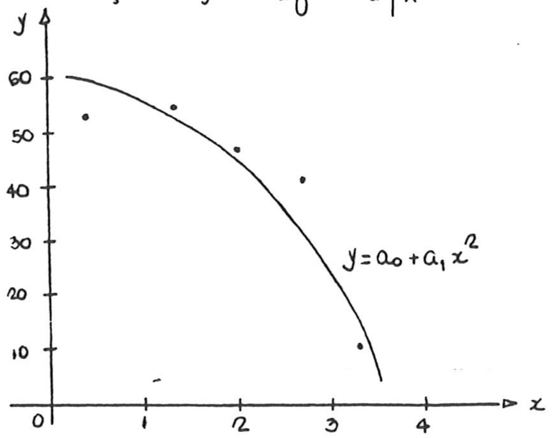
Do que foi visto anteriormente, se $f_i = f(x_i)$, a solução de quadrados mínimos $\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 f(x)$ será obtida pela resolução do sistema de equações normais abaixo

$$\begin{cases} n\,\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} f_i = \Sigma y_i \\ \hat{a}_0\, \Sigma f_i + \hat{a}_1\, \Sigma f_i^2 = \Sigma y_i\, f_i \end{cases}$$

EXEMPLOS:

a) Ajustar aos pontos abaixo, a função $y = a_0 + a_1 x^2$

x	y
1,4	54,5
3,2	12,8
2,5	40,0
0,4	53,8
1,9	47,6



Organizemos o quadro seguinte:

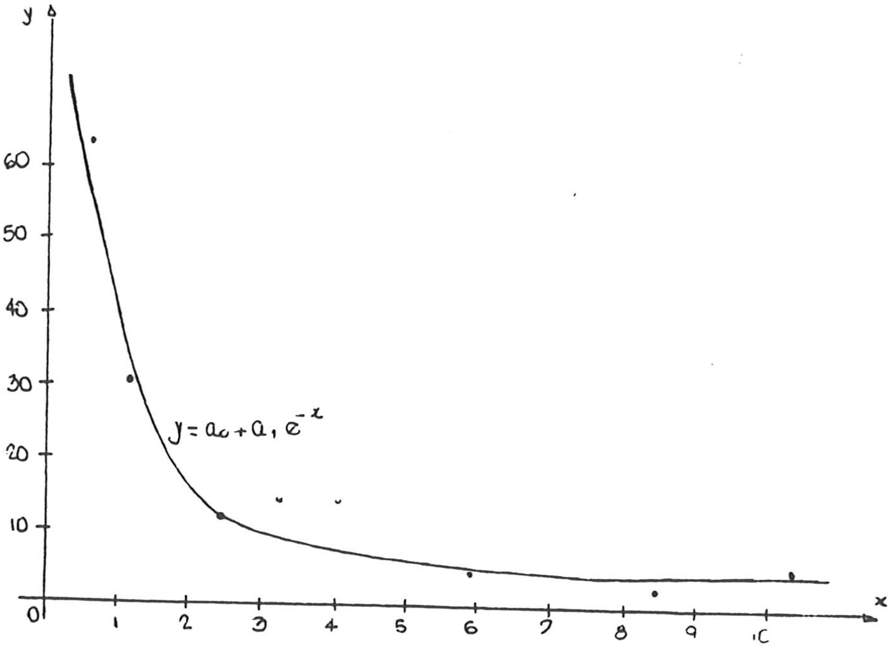
	y_i	x_i	$f_i = x_i^2$	f_i^2	$f_i\ y_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$
	54,5	1,4	1,96	3,8416	106,820	52,12	2,38
	12,8	3,2	10,24	104,8576	131,072	17,59	-4,79
	40,0	2,5	6,25	39,0625	250,000	34,23	5,77
	53,8	0,4	0,16	0,0256	8,608	59,62	-5,82
	47,6	1,9	3,61	13,0321	171,836	45,24	2,36
Σ	208,7		22,22	160,8194	668,336	208,80	-0,10

Resolvendo as equações normais, obtemos

$\hat{y} = 60{,}29 - 4{,}17\ x^2$

b) Considere os dados abaixo:

y_i	x_i
30,1	1,2
13,6	4,1
1,1	8,4
14,0	3,2
7,0	10,5
62,6	0,5
12,2	2,5
5,2	6,0



Ajustar a função $y = a_0 + a_1\ e^{-x}$ aos pontos dados.

No caso, temos $f(x) = e^{-x}$ e podemos organizar o sistema de equações normais, com base no quadro abaixo:

	y_i	x_i	$f_i = e^{-x_i}$	f_i^2	$f_i y_i$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$
	30,1	1,2	0,30119	0,090718	9,065819	33,49	-3,39
	13,6	4,1	0,01657	0,000275	0,225352	7,37	6,23
	1,1	8,4	0,00022	0,000000	0,000242	5,87	-4,77
	14,0	3,2	0,04076	0,001662	0,570640	9,59	4,41
	7,0	10,5	0,00003	0,000000	0,000210	5,85	1,15
	62,6	0,5	0,60653	0,367879	37,968778	61,51	1.09
	12,2	2,5	0,11080	0,006738	1,351760	16,02	-3,82
	5,2	6,0	0,00248	0,000006	0,012896	6,08	-0,88
Σ	145,8		1,07858	0,467278	49,195697	145,78	0,02

As equações normais ficam

$$\begin{cases} 8\ \hat{a}_0 + 1{,}07858\ \hat{a}_1 = 148{,}8 & \text{(I)} \\ 1{,}07858\ \hat{a}_0 + 0{,}467278\ \hat{a}_1 = 49{,}195697 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo (II) por 1,07858,

$$\begin{cases} 8\,\hat{a}_0 + 1{,}07858\,\hat{a}_1 = 145{,}8 & \text{(III)} \\ \hat{a}_0 + 0{,}433234\,\hat{a}_1 = 45{,}611542 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (IV) por (-8) e somando esta a (III), temos

$-2{,}387292\,\hat{a}_1 = -219{,}092336 \Rightarrow \hat{a}_1 = 91{,}774419$

Logo, $\hat{a}_0 = 5{,}851743$ e a solução de quadrados mínimos fica

$\hat{y} = 5{,}85 + 91{,}77\,e^{-x}$.

Para finalizar, citemos o caso de 3 incógnitas (a_0, a_1 e a_2) a uma variável independente.

À semelhança do que já foi visto, se queremos ajustar a pontos dados uma função do tipo

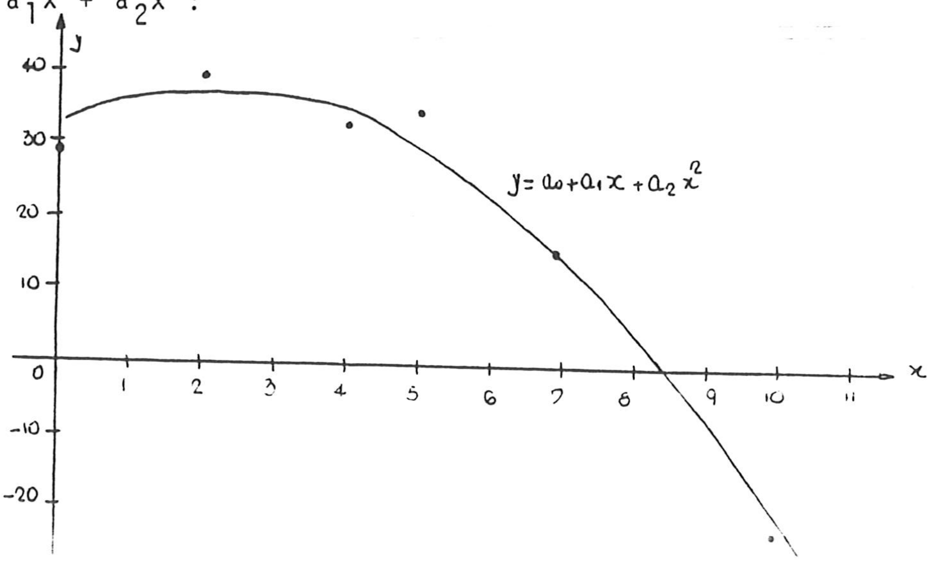
$y = a_0 + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$,

basta resolver o sistema de equações normais

$$\begin{cases} n\,\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i} + \hat{a}_2\,\Sigma f_{2i} = \Sigma y_i \\ \hat{a}_0\,\Sigma f_{1i} + \hat{a}_1\,\Sigma f_{1i}^{\,2} + \hat{a}_2\,\Sigma f_{1i}\,f_{2i} = \Sigma y_i\,f_{1i} \\ \hat{a}_0\,\Sigma f_{2i} + \hat{a}_1\,\Sigma f_{2i}\,f_{1i} + \hat{a}_2\,\Sigma f_{2i}^{\,2} = \Sigma y_i\,f_{2i} \end{cases}$$

EXEMPLO: Dados os pontos abaixo, ajustá-los a uma função do tipo $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$:

y	x
33	5
-23	10
38	2
32	4
-36	11
29	0
14	7



Organizando o quadro abaixo, temos:

	y_1	$f_{1i}= x_i$	$f_{2i}= x_i^2$	f_{1i}^2	$f_{1i}f_{2i}$	f_{2i}^2	$y_i f_{2i}$	$y_i f_{2i}$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$
	33	5	25	25	125	625	165	825	30,01	2,99
	-23	10	100	100	1000	10000	-230	-2300	-21,28	-1,72
	38	2	4	4	8	16	76	152	36,19	1,83
	32	4	16	16	64	256	128	812	34,11	-2,11
	-36	11	121	121	1331	14641	-396	-4356	-37,69	1,69
	29	0	0	0	0	0	0	0	3,02	-1,02
	14	7	49	49	343	2401	98	686	15,65	-1,65
Σ	87	39	315	315	2871	27939	-159	-4481	86,99	0,01

As equações normais ficam

$$\begin{cases} 7\,\hat{a}_0 + 39\,\hat{a}_1 + 315\,\hat{a}_2 = 87 \\ 39\,\hat{a}_0 + 315\,\hat{a}_1 + 2871\,\hat{a}_2 = -159 \\ 315\,\hat{a}_0 + 2871\,\hat{a}_1 + 27939\,\hat{a}_2 = -4481 \end{cases}$$

Dividindo-se as equações acima pelos coeficientes de $\hat{a}_0$,

$$\begin{cases} \hat{a}_0 + 5{,}5714\,\hat{a}_1 + 45{,}0000\,\hat{a}_2 = 12{,}4286 & \text{(I)} \\ \hat{a}_0 + 8{,}0769\,\hat{a}_1 + 73{,}6153\,\hat{a}_2 = -4{,}0769 & \text{(II)} \\ \hat{a}_0 + 9{,}1143\,\hat{a}_1 + 88{,}6952\,\hat{a}_2 = -14{,}2254 & \text{(III)} \end{cases}$$

Fazendo (II) - (I) e (III) - (I), temos

$$\begin{cases} 2{,}5055\,\hat{a}_1 + 28{,}6153\,\hat{a}_2 = -16{,}5055 \\ 3{,}5429\,\hat{a}_1 + 43{,}6952\,\hat{a}_2 = -26{,}6540 \end{cases}$$

Dividindo-se as equações pelos coeficientes de $\hat{a}_1$,

$$\begin{cases} \hat{a}_1 + 11{,}4210\,\hat{a}_2 = -6{,}5877 & \text{(IV)} \\ \hat{a}_1 + 12{,}3332\,\hat{a}_2 = -7{,}5232 & \text{(V)} \end{cases}$$

Fazendo (V) - (IV),

$0{,}9122\ \hat{a}_2 = -0{,}9355 \implies \hat{a}_2 = -1{,}0255$

Logo, $\hat{a}_1 = 5{,}1245$ e $\hat{a}_0 = 30{,}0253$

Portanto a solução de quadrados mínimos fica

$\hat{y} = 30{,}0253 + 5{,}1245\ x - 1{,}0255\ x^2.$

BIBLIOGRAFIA

DEMIDOVICH, B. Problems in Mathematical Analysis.

LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica (vol. 1 e 2).

MUNEM, M.A. & D.J.FOULIS. Cálculo (vol. 1 e 2).

PIMENTEL GOMES, F. & I.R.NOGUEIRA. Análise Matemática.

PISKONOV, N. Differential and Integral Calculus.

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica (vol. 1 e 2).