UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Departamento de Ciências Exatas

Cálculo Diferencial e Integral

(Notas de aula)

Prof. Idemauro Antonio Rodrigues de Lara

Piracicaba SP
dezembro 2013

Sumário

Capítulo 1

Fundamentos e tópicos de revisão

A Matemática é uma das Ciências mais ricas da História e seu desenvolvimento está intrinsicamente ligado à evolução da humanidade. A Matemática fundamenta diversas áreas do conhecimento humano, como por exemplo a Agronomia, Física, Química, Engenharia, Estatística, Economia, entre outras. Nessas Ciências, grande parte das estruturas teóricas pode ser descrita por um **modelo matemático**.

Definição 1.1 Modelo matemático é constituído, em geral, por uma ou mais equações (funções) que descrevem a estrutura do modelo: variável dependente, variáveis independentes ou livres, inter-relações, suposições, parâmetros. Por outras palavras o modelo matemáico é uma representação sintética do fenômeno em estudo.

A título de ilustração, apresenta-se a seguir, duas situações em que se têm o emprego de um modelo matemático.

Exemplo 1.1 Na Agronomia é comum a condução de experimentos para verificar o efeito de um determinado nutriente ou fertilizante sob a produção de uma espécie. Há vários modelos teóricos disponíveis na Literatura[1], a função do 2^o grau é um desses:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.1}$$

em que y representa a produção, em kg/ha, de uma determinada variedade; x representa a dose do nutrientre, em kg/ha e a, b e c são os parâmetros que irão particularizar a equação. O modelo 1.1, por ser uma função bem conhecida, apresenta algumas vantagens. Porém, uma desvantagem desse modelo é quando pretendemos utilizá-lo para prever uma produção dado um valor de x por extrapolação. Na função do 2^o grau, com $a < 0$, os valores de y descrescem "rapidamente" após o ponto de máximo, o que não corresponde bem à realidade experimental. Devido a isso, um modelo alternativo foi proposto por Mitscherlich:

$$y = A[1 - 10^{-c(x+b)}], \tag{1.2}$$

em que A, b e c são os parâmetros, representando, A: produção máxima teoricamente possível, b: quantidade do nutriente estudado existente no solo em forma assimilável e c: coeficiente de eficácia.

[1]Gomes, P.; Nogueira, I. R. Análise Matemática, 2ed. 1980.

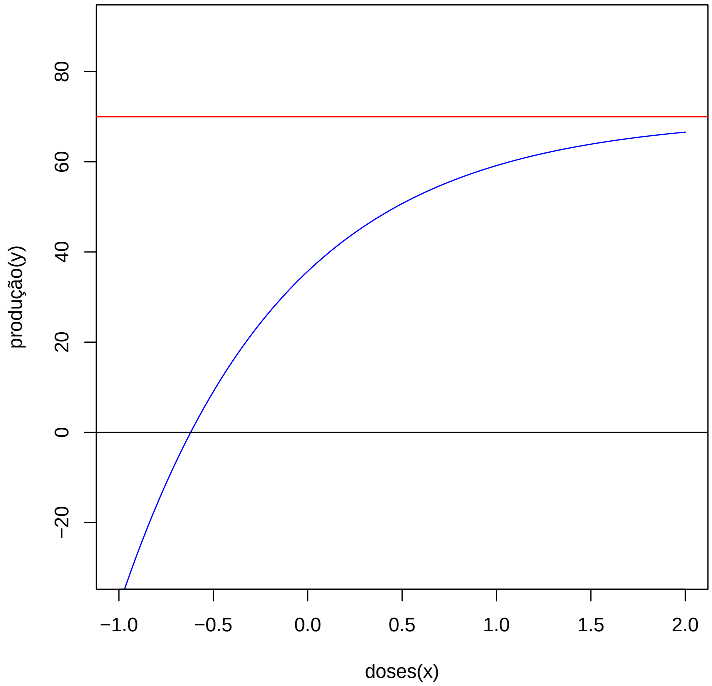

Figura 1.1: Gráfico da função $y = 70[1 - 10^{-0,5(x+0,62)}]$

Exemplo 1.2 Em Economia a quantidade demandada (Qd) e a quantidade ofertada (Qs) de um determinado bem ou serviço podem ser descritas como função do preço P desse produto. Nesse contexto, uma condição clássica é a construção de um modelo de equilíbrio de mercado, constituído de três equações, a terceira, nesse caso, é justamente a condição para que o equilíbrio se estabeleça. Suponha que tanto a demanda quanto a oferta sejam funções do 1^o grau. O modelo pode ser representado pelo conjunto:

$$\begin{cases} Qd = a - bP; & (I) \\ Qs = -c + dP; & (II) \\ Qd = Qs. & (III) \end{cases}$$

em que a, b, c, d são os parâmetros. O problema, nesse caso, consiste em se determinar o valor P_0 que iguala a demanda e a oferta, ou seja, $P_0 = \dfrac{a+c}{b+d}$. Note que $b + d \neq 0$. Geometricamente equivale a encontrar o ponto de encontro entre as duas retas. Logicamente, dependendo das condições de demanda e oferta de mercado as equações (I) e (II) podem assumir outras formas e caracterizações.

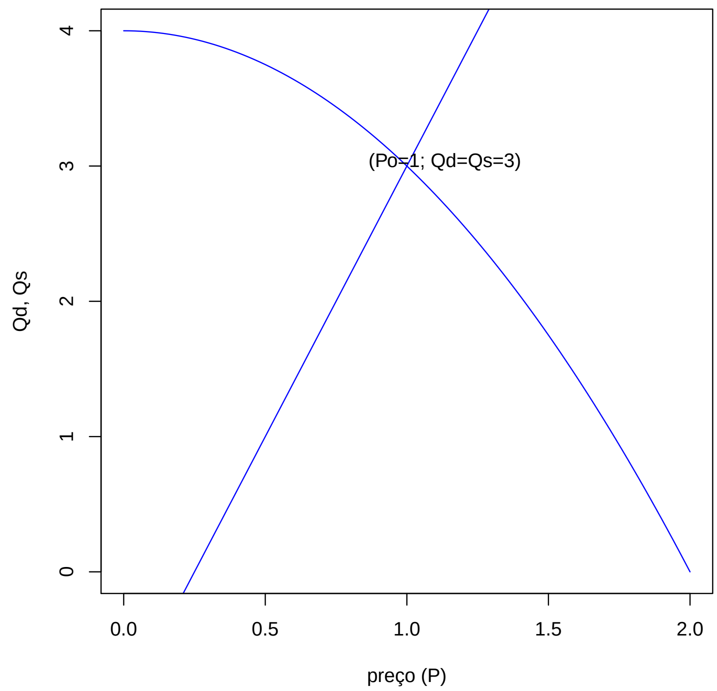

Figura 1.2: Ponto de equilíbrio de mercado em que $Qd = 4 - P^2$ e $Qs = 4P - 1$.

Esses dois exemplos ilustram como a Matemática é utilizada em situações em que se deseja estabelecer um modelo teórico com aplicações práticas, para representação de um objeto de estudo. Portanto, para o exercício profissional com competência é necessário o conhecimento de fundamentos da Matemática. Nesse texto são apresentados conceitos básicos sobre funções além de parte da Teoria relativa ao Cálculo Diferencial e Integral. $\mathbb{A}$

1.1 Funções

Definição 1.2 Função. Sejam A e B dois conjuntos não vazios, uma função definida em A e com valores em B é uma lei que associa a cada elementos $x \in A$ um único valor $y \in B$. Notação:

$$f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

Observações

i) Quando $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ a função é dita real de variável real.

ii) O conjunto A é denominado domínio da função, enquanto que o conjunto B é o contradomínio.

iii) Quando não se especificarem os valores de $x \in A$, subentende-se que é o próprio conjunto $\mathbb{R}$.

Definição 1.3 Conjunto Imagem. Seja $y = f(x)$ uma função definida em A com valores em B, o conjunto imagem da função é definido por $\mathrm{I}(f) = \{y \in B \mid y = f(x)\}$.

Exemplo 1.3 Nas funções a seguir, identificar o domínio:

a. $y = x + 1$

b. $y = \dfrac{3}{x+1}$

c. $y = \sqrt{x-3}$

Definição 1.4 Gráfico de uma função. Seja $y = f(x)$ uma função definida em A com valores em B, o gráfico da função, $\mathrm{G}(f)$, é constituído de todos os pontos (x, y) tais que:

$$\mathrm{G}(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

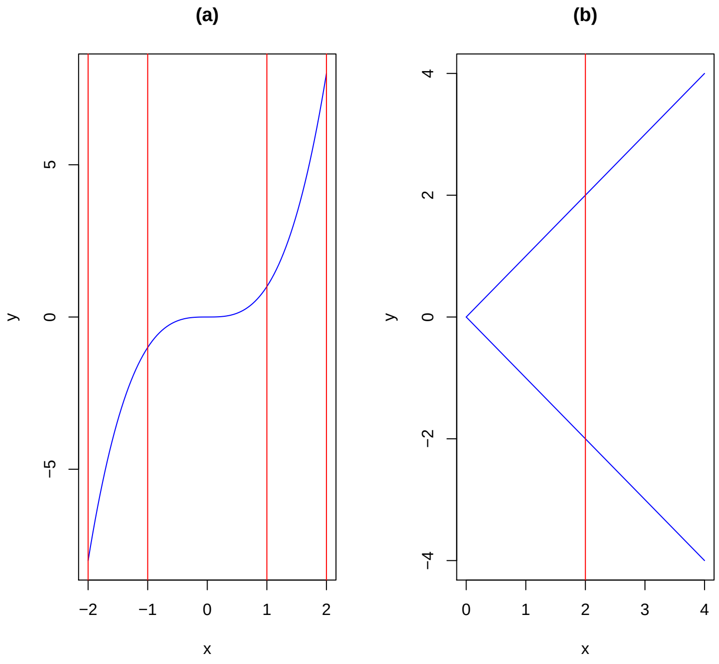

Figura 1.3: Exemplo de gráfico de uma função (a) e de um gráfico de uma relação que não é função (b).

Definição 1.5 Monotonicidade. Seja $y = f(x)$ uma função real e (a, b) um subintervalo do domínio dessa função, se:

a) $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) < f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente crescente em (a, b);

b) $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) > f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente decrescente em (a, b);

Observação: Quando a função é crescente ou descrecente um todo seu domínio diz-se que ela é absolutamente monótona.

Exemplo 1.4 Estude a monotonicidade das funções em $\mathbb{R}$:

a. $y = x + 2$

b. $y = x^2 - 5x + 6$

Definição 1.6 Paridade. Seja a função:

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

Admita que $\forall \ x \in A \ \exists \ -x \in A$. Nessas condições:

a) Se $f(x) = f(-x)$, então $y = f(x)$ é uma função par;

b) Se $-f(x) = f(-x)$, então $y = f(x)$ é uma função ímpar.

Observação: O gráfico de uma função par tem como eixo de simetria o eixo Oy, já o gráfico das funções ímpares são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

Exemplo 1.5 Estude a paridade das funções a seguir.

a. $f(x) = (x - 10)^2$

b. $g(x) = x^3 + x^7$

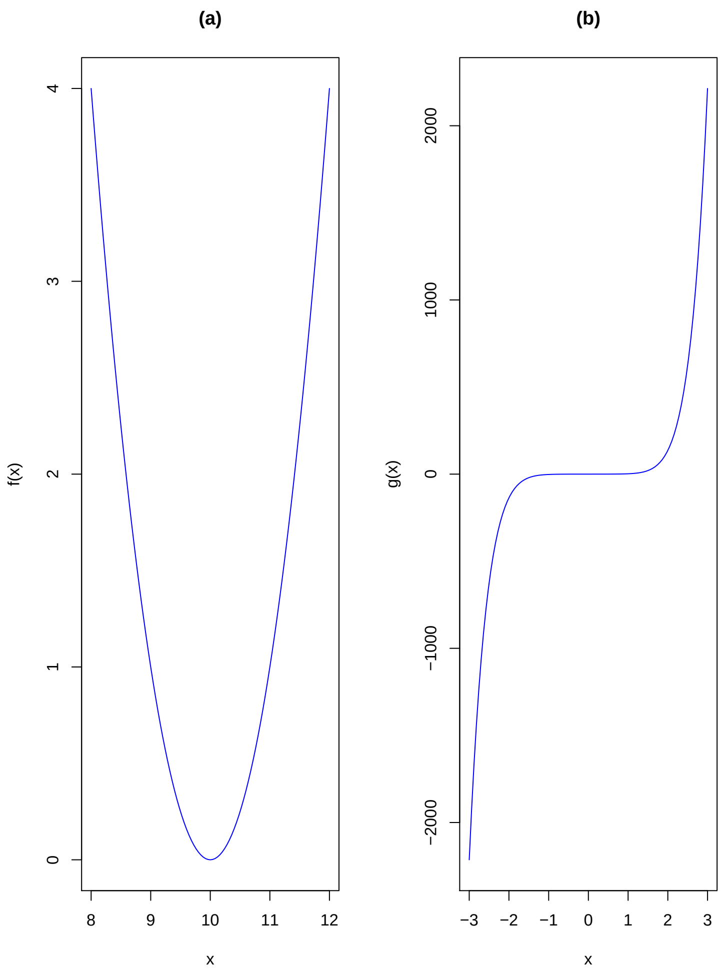

Figura 1.4: Gráficos das funções $f(x) = (x-10)^2$ e de $g(x) = x^3 + x^7$.

Exemplo 1.6 Estude a paridade da função $y = 2x^3 - 2x + 1$.

Definição 1.7 Função Composta. Considere três conjuntos não vazios, A, B e C e duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, tais que:

$$g : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto g(x) \end{cases} \quad \text{e} \quad f : \begin{cases} B \to C \\ g(x) \mapsto f(g(x)) \end{cases}$$

Dessa forma, $f(g(x))$ é denominada função composta de f em g e denota-se $fog(x)$. Note que o domínio de $fog(x)$ é determinado pelos valores reais de x para os quais $g(x)$ exista, tais que $g(x)$ estarão no domínio de f.

Exemplo 1.7 Considere as funções definidas em $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x$. Calcule $f(g(3))$ e $g(f(-1))$. Encontre as leis das funções $fog(x) = f(g(x))$ e $gof(x) = g(f(x))$.

Definição 1.8 Classificação das funções. Seja a função:

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

Pode-se classificá-la em:

a) **Injetora**: Se $\forall\ x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$ verifica-se $f(x_1) \neq f(x_2)$;

b) **Sobrejetora**: Se $\forall\ y \in B$, existe ao menos um $x \in A$ tal que $y = f(x)$;

c) **Bijetora**: Se $y = f(x)$ for simultaneamente injetora e sobrejetora.

Observação: Na função injetora pontos distintos do domínio têm imagens distintas no contradomínio. Na função sobrejetora o contradomínio coincide com o conjunto imagem.

Exemplo 1.8 Classifique as funções a seguir em injetora, sobrejetora ou bijetora.

a.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$$

b.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{cases}$$

Definição 1.9 Função inversa. Seja, por definição, uma função:

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

bijetora. Então, sem perda de generalidade, $y = f(x)$ admite função inversa, tal que:

$$f^{-1} : \begin{cases} B \to A \\ y \mapsto x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

Observação: Os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo 1.9 A função inversa de:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$$

é

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto x = y - 1 \end{cases}$$

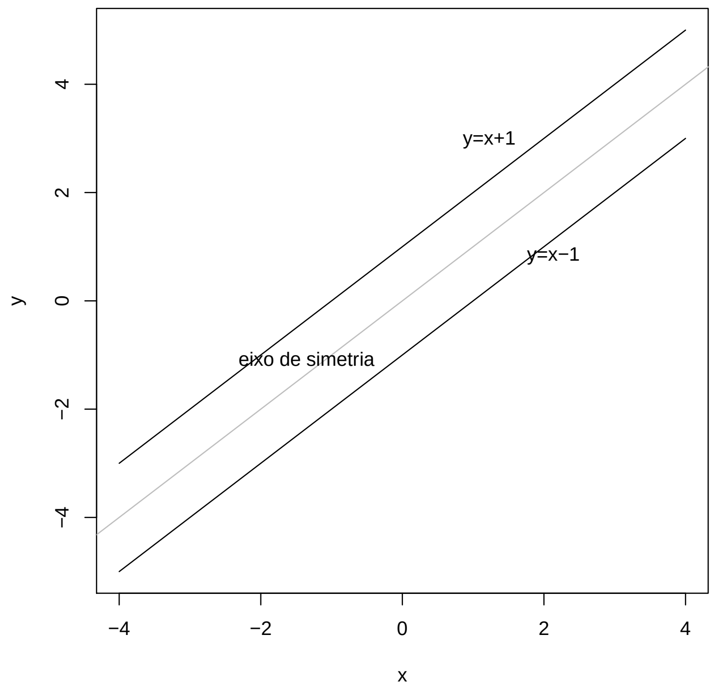

Figura 1.5: Gráficos das funções $f(x) = x + 1$ e de $f^{-1}(x) = x - 1$.

1.1.1 Função do 1^0 grau

Definição 1.10 Função do 1^0 grau. A função

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax + b \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ é uma função do 1^0 grau.

Observações:

i. A raiz da função é dada por $x = -\frac{b}{a}$;

ii. O gráfico da função é uma reta, que tem inclinação determinada por $a = \tan(\alpha)$ (coeficiente angular), isto é a é a tangente do ângulo de inclinação da reta. Essa reta intercepta o eixo Oy no ponto $(0, b)$;

iii. Se $b = 0$ tem-se a função linear, $y = ax$, cuja reta passa pela origem do sistema cartesiano;

iv . Se $a = 0$ tem-se a função constante, $y = b$, cuja reta é paralela ao eixo Ox;

v. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ a função é denominada afim;

vi. Se $a > 0$ a função é absolutamente crescente em $\mathbb{R}$, se, porém $a < 0$ a função é absolutamente decrescente;

vii. Da forma como definida em (1.10) a função é bijetora e, portanto, admite inversa.

Exemplo 1.10 Dada a função $y = 2x + 1$, esboce o gráfico, determine o ângulo de inclinação da reta e encontre sua função inversa.

Exemplo 1.11 Considere um problema de equilíbrio linear de mercado com uma única mercadoria de preço variável P. Sejam também as funções Qd, que representa a função de demanda e Qs, que representa a oferta dessa mercadoria. Admita:

$$\begin{cases} Qd = 20 - 2P; & (I) \\ Qs = -10 + 8P; & (II) \\ Qd = Qs. & (III) \end{cases}$$

Represente nos mesmos eixos cartesianos as funções de demanda e oferta. Estabeleça o ponto de encontro entre as funções, que representa geometricamente a equação de equilíbrio III.

1.1.2 Função do 2^0 grau

Definição 1.11 Função do 2^0 grau. A função:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é denominada função do 2^0 grau ou quadrática.

Observações:

i. As raizes da função podem ser obtidas pela equação de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{em que} \qquad \Delta = b^2 - 4ac \tag{1.3}$$

ii. As relações de Girard para as raizes dessa função são:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

iii. Se na equação (1.3), $\Delta < 0$, então a função não terá raizes reais;

iv. O gráfico de uma função do 2^0 grau é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy;

v . A concavidade da parábola é determinada pelo sinal da constante a, se $a > 0$ a parábola tem concavidade para cima e se $a < 0$ tem concavidade para baixo;

vi. As coordenadas do vértice da parábola são $\left(x_V = -\dfrac{b}{2a}, y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$;

vii. Se $a > 0$, o conjunto imagem da função quadrática é $I = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$, porém se $a < 0$, o conjunto imagem será $I = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$.

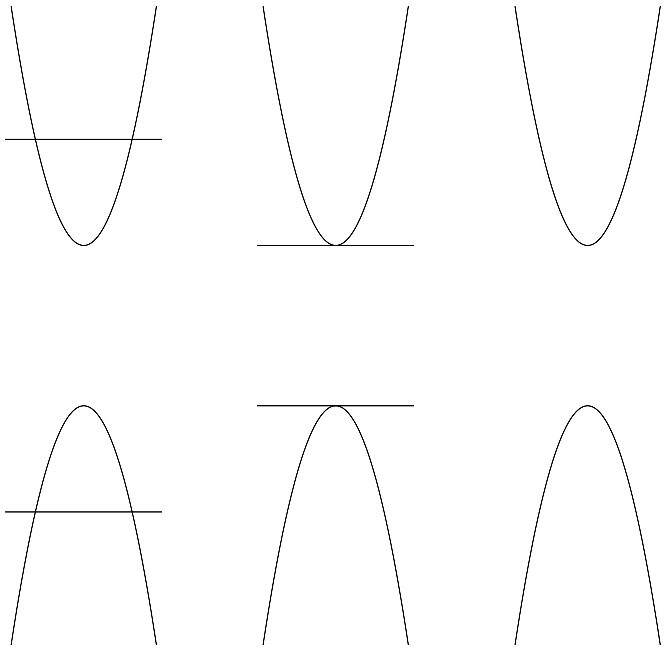

Figura 1.6: Posições relativas da parábola em função de a e Δ.

Exemplo 1.12 Demonstração das coordenadas do vértice.

Exemplo 1.13 Dada a função $y = x^2 - 3x - 10$, pede-se: domínio, conjunto imagem, vértice da parábola, eixo de simetria, esboço do gráfico e estudo da monotonicidade em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.14 (Gomes e Nogueira (1980), pág. 171) Suponha os seguintes dados de um ensaio de adubação

x: doses de nutriente em Kg/ha	y: produção de cana em t/ha
0	42,6
70	55,6
140	60,4

Adaptar um polinômio de grau 2 a esses dados.

Exemplo 1.15 (Aplicação) Considere as funções Receita Total, $R_T = 8q - \frac{1}{5}q^2$ e Custo Total $C_T = 12 + 1,6q$ de um insumo agrícola. Considere também que a quantidade produzida, q, pertença ao intervalo $[0, 40]$. Esboce no mesmo eixo cartesiano os gráficos das funções R_T, C_T e Lucro, $L_T = R_T - C_T$. Estude o comportamento da função lucro dada a produção q, estabelecendo os intervalos em que essa função é positiva e os intervalos em que há prejuízo. Qual o nível de produção que nos dá a Receita máxima? E lucro máximo?

1.1.3 Função modular

Definição 1.12 Módulo ou valor absoluto. Seja x um número real, $x \in \mathbb{R}$, o módulo ou valor absoluto de x, denotado por $\mid x \mid$, é:

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Propriedades do módulo:

a. $\mid x + y \mid \; \leq \; \mid x \mid + \mid y \mid$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b. $\mid x.y \mid \; = \; \mid x \mid . \mid y \mid$, $x, y \in \mathbb{R}$.

c. $\mid x \mid \; < \; k \Leftrightarrow -k < x < +k$.

d. $\mid x \mid \; > \; k \Leftrightarrow x > k$ ou $x < -k$.

Definição 1.13 Função modular. Considerando uma função real qualquer $f(x)$, se $g(x) =\mid x \mid$, a função composta $gof(x) = g(f(x)) =\mid f(x) \mid$ é uma função modular. Assim, $h(x) = gof(x) =\mid f(x) \mid$ é definida por duas sentenças:

$$h(x) = gof(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.16 Sejam as funções $f(x) = x - 2$ e $g(x) =\mid x \mid$. Construa os gráficos, especifique o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções: $gof(x)$ e $fog(x)$.

1.1.4 Exercícios

1. Encontre o domínio para cada uma das funções a seguir.

   a. $y = \dfrac{2}{1-x}$

   b. $y = \sqrt[3]{x^2 - 9}$

   c. $y = \sqrt{9 - x^2}$

   Resp. a. $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ b. $D(f) = \mathbb{R}$ c. $D(f) = [-3, 3]$

2. Sendo $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 3$, determine o domínio de cada uma das funções a seguir.

   a. $(f \circ g)(x)$

   b. $(g \circ f)(x)$

   Resp. a. $D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ b. $D(g \circ f) = \mathbb{R}_+$

3. Dada a função $f(x) = -4x + 5$, pede-se:

   a. a raiz da função;

   b. $f(1/4)$;

   c. o valor de x para o qual $f(x) = -11$.

   Resp. a. 5/4 b. 4 c. 4

4. Determine o valor de k para o qual a função $f(x) = (2k - 1)x + 3$ seja crescente. $(k > 1/2)$

5. Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 2$, calcule $f[g(0)]$ e $g[f(0)]$. Construa o gráfico da função $(f \circ g)(x)$.

   Resp. 5 e -1

6. Dada a função $f(x) = (k - 2)x^2 - 2kx + k + 3$, responda:

   a. Para que valores de k teremos uma função polinomial de grau 2?

   b. Dado que $f(x)$ é função do 2^0 grau, para que valores de k temos uma raiz de multiplicidade 2?

   Resp. a. $k \neq 2$ b. $k = 6$

7. Estude a paridade das seguintes funções:

   a. $y = 3x^2 + 5x + 1$

   b. $y = 2x^3$

   c. $y = -\pi$

   d. $y = |x| + 2$

   Resp. a. não é par nem ímpar b. ímpar c. par d. par

8. Representar graficamente as seguintes funções reais. Estudar a monotonicidade dessas funções no campo dos reais.

   a. $f(x) = 3x - 1$

   b. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

   c. $f(x) = 2$

   d. $f(x) = -x^2 + 5x$

   e. $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$ com $x \neq 2$

9. Classifique as funções do exercício 8 em injetora ou não injetora, sobrejetora ou não sobrejetora. Identificar, caso existam, aquelas que são bijetoras. Caso existam funções bijetoras, encontrar as suas funções inversas e representar graficamente.

10. Faça o gráfico e dê o domínio e o conjunto imagem da função definida por $f(x) = n$, se $n \leq x < n+1$, para todo $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

11. Para cada função a seguir identificar: domínio, contradomínio e conjunto imagem. Construir seus gráficos.

    a.
$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{se } 10 \leq x \leq 11; \\ 12 - x, & \text{se } 11 < x \leq 12; \\ 0, & \text{se } x < 10 \text{ ou } x \geq 12. \end{cases}$$

    b.
$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } x < 0; \\ x^2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

    c.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

12. O vértice da parábola $y = x^2 + bx + c$ é o ponto V$(-3, 1)$. Calcule b e c. (b=6, c=10)

13. (Gomes e Nogueira (1980)) Num ensaio de adubação fosfatada de milho foram obtidos os seguintes resultados

x: doses de P_2O_5 em Kg/ha	y: produção de milho em Kg/ha
0	2850
60	3200
120	3100

    Adaptar um polinômio de grau 2 a esses dados. ($y = -0,0625x^2 + 9,583x + 2850$)

14. Resolver as seguintes equações

    a. $| x |= 5$

    b. $| 2x - 5 |= -2$

    c. $| x^2 - 3x |= 4$

    d. $| x |^2 - 4 | x | + 3 = 0$

    Resp. a. $\{-5, 5\}$ b. $\emptyset$ c. $\{-1, 4\}$ d. $\{-3, -1, 1, 3\}$

15. Construa o gráfico da seguintes funções

    a. $f(x) =| 2x - 1 |$

    b. $f(x) =| x + 1 | + | x - 2 |$

    c. $f(x) =| x^2 - 7x + 10 |$

    d. $f(x) = \dfrac{| x |}{x}$

16. Dada a função $f(x) = (2x^2 + x - 1)(3x^2 + 2x - 1)$, calcule os valores de x em cada caso a seguir.

    a. para que $f(x) = 0$ Resp. $x = 1/2$ ou $x = 1/3$ ou $x = -1$

    b. para que $f(x) > 0$ Resp. $x < 1/3$ com $x \neq -1$ ou $x > 1/2$

17. Determinar o domínio da função $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$.
    (Resp.$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$)

18. Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações a seguir

    a. $-5x + 3 > -1$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4/5\}$

    b. $x^2 - 9x + 18 \geq 0$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$

    c. $-x^2 - 9 < 0$ Resp.: $\mathbb{R}$

    d. $\dfrac{3x + 2}{2x - 3} > 0$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2/3 \text{ ou } x > 3/2\}$

    e. $\dfrac{6x - 2}{3} - \dfrac{6x - 3}{2} < 5$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -25/6\}$

    e. $x(x - 1)(2x - 1) < 0$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 1/2 < x < 1\}$

    f. $(x^2 - 5x + 6)(x + 3) \geq 0$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

    g. $\dfrac{(2x + 1)(3 - 2x)}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1/2 \text{ ou } 1 < x \leq 3/2 \text{ ou } x > 3\}$

    h. $\mid x \mid < 3$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

    i. $\mid 2x + 3 \mid \geq 2$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1/2 \text{ ou } x \leq -5/2\}$

    j. $\mid -x^2 + x + 6 \mid < 6$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0 \text{ ou } 1 < x < 4\}$

1.1.5 Função exponencial

A função exponencial tem aplicações em problemas de crescimento e dinâmica. Apresenta-se a seguir alguns pré-requisitos.

Definição 1.14 Propriedades de potências. Para as potências do tipo a^n ou a^m, com $a > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$, valem as propriedades:

i. $a^n = \underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{\text{n vezes}}$

ii. $a^0 = 1$

iii. $a^1 = a$

iv. $a^n a^m = a^{m+n}$

v. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

vi. $(a^n)^m = a^{nm}$

vii. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Definição 1.15 Equação exponencial. Uma equação em que a variável x figura no expoente é denominada equação exponencial. Com base nas propriedades das potências, podemos reduzir uma equação exponencial em:

i. Potências de mesma base

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

ii. Potências de mesmo expoente

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow a = b$$

com $a > 0$, $a \neq 1$ $b > 0$ e $b \neq 1$.

Exemplo 1.17 Resolver em $\mathbb{R}$ a equações exponenciais:

a. $3^x = 81$

b. $5^{2x^2-3x-2} = 1$

c. $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$

Definição 1.16 Função exponencial. Denomina-se função exponencial de base b ($b > 0$ e $b \neq 1$) à função:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = b^x \end{cases}$$

Observações:

i. A restrição $b > 0$ e $b \neq 1$ se faz necessária para garantir a existência da função;

ii. Se $b > 1$ a função exponencial (1.16) é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, porém, se $0 < b < 1$ a função exponencial (1.16) é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$;

iii. Se $0 < b < 1$, pode-se efetuar uma mudança de base, fazendo o expoente negativo, por exemplo, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Assim as condições $b > 0$ e $b \neq 1$ de existência da função exponencial (1.16) podem ser simplificadas pela condição única $b > 1$;

iv. Se considerarmos uma restrição no contradomínio da função (1.16), fazendo-o igual a $\mathbb{R}_+^*$, a função torna-se bijetora e, portanto, admite inversa.

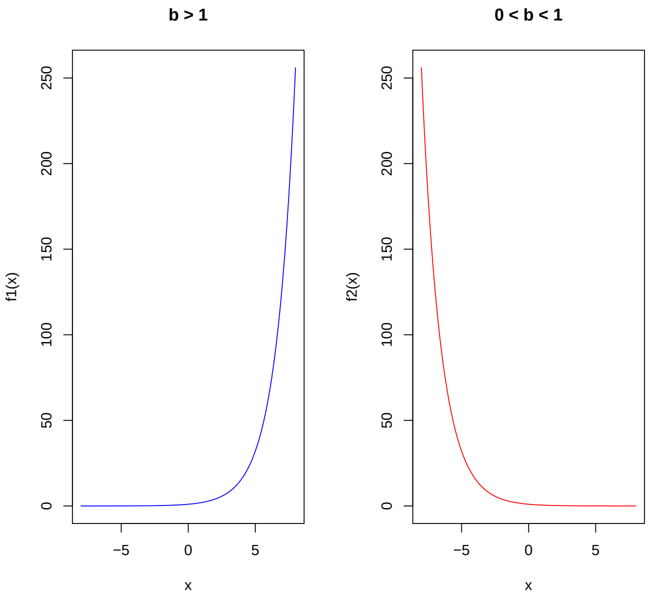

Figura 1.7: Gráficos das funções exponenciais $y = 2^x$ e $y = (\frac{1}{2})^x$.

Exemplo 1.18 Considere as funções: $y = 2^x$, $y = 4^x$ e $y = 2.2^x$. Os gráficos dessas funções são apresentados, a seguir.

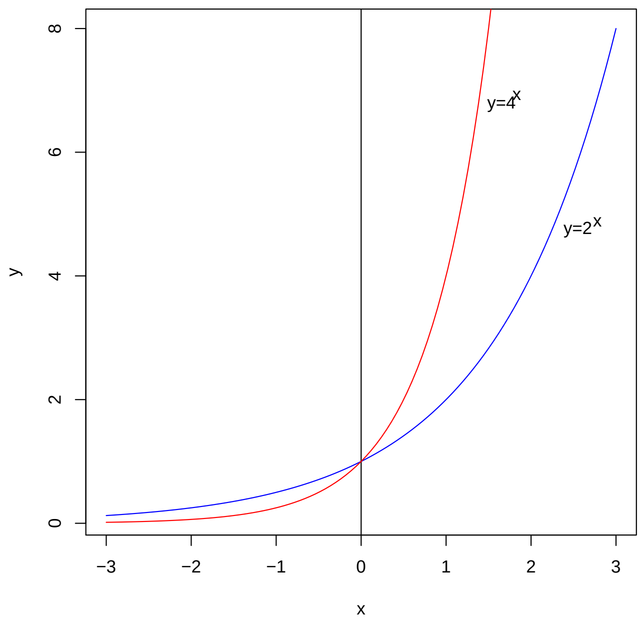

Figura 1.8: Gráficos das funções exponenciais $y = 2^x$ e $y = 4^x = 2^{2x}$.

Observa-se pela Figura (1.8) que o efeito da constante 2 no expoente é o de contrair a curva exponencial à metade da distância do eixo Oy.

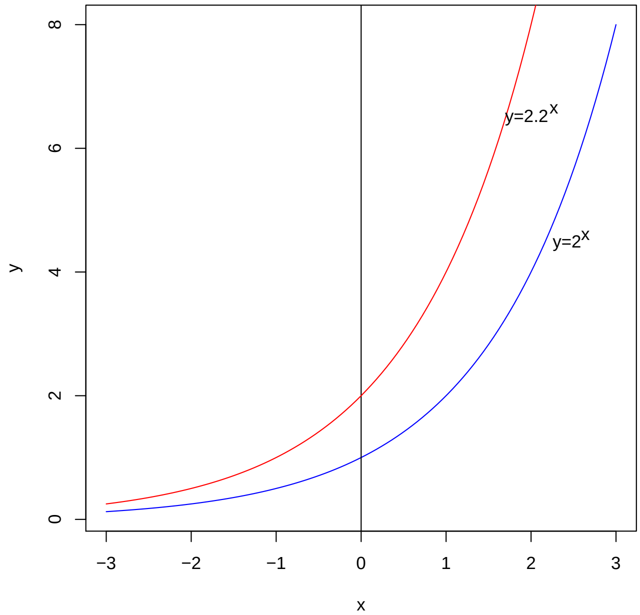

Figura 1.9: Gráficos das funções exponenciais $y = 2^x$ e $y = 2.2^x$.

Observa-se pela Figura (1.9) que o efeito da constante 2, que pré-multiplica 2^x é o de estender verticalmente a curva exponencial.

Definição 1.17 Função exponencial de base e**.** Uma base especial para a função exponencial é o número irracional $e = 2,718282...$, também chamada de base natural. Sendo assim:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = e^x \end{cases}$$

Definição 1.18 Função exponencial generalizada. Uma forma mais geral de definir a função exponencial é por meio da relação

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = k_1 b^{k_2 x} \end{cases}$$

em que $b > 0$ e $b \neq 1$ (b pode ser inclusive a base e), k_1 e k_2 são constantes "compressoras" e "extensoras" da curva exponencial.

Exemplo 1.19 Represente no mesmo eixo cartesiano, os gráficos das funções $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$.

Exemplo 1.20 Em um habitat, o número de indivíduos de uma espécie é 5000 e a taxa de crescimento anual da população é de 4%. Estime o número de indivíduos da população desse espécie daqui a 10 anos.

Exemplo 1.21 Interpretação econômica do número e**.** (Chiang, A. 1982, pág.251) Considere uma situação hipotética de capitalização a juros compostos, com um capital inicial R$1,00 a uma taxa de juros nominal de 100% ao ano. Assim, se considerarmos:

$$\text{Capitalização anual} \Rightarrow M = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = \text{R\$}2,00$$

$$\text{Capitalização semestral} \Rightarrow M = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} = \text{R\$}2,25$$

$$\text{Capitalização trimestral} \Rightarrow M = \left(1+\frac{1}{4}\right)^{4} = \text{R\$}2,44$$

$$\vdots$$

$$\text{Capitalização mensal} \Rightarrow M = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \text{R\$}2,61$$

$$\vdots$$

$$\text{Capitalização diária} \Rightarrow M = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = \text{R\$}2,71$$

$$\vdots$$

$$\text{Capitalização na } n\text{-ésima fração de tempo} \Rightarrow M = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \text{R\$ } e$$

Matematicamente, então, o número e é o limite da função $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ quando x cresce indefinidamente e, economicamente pode ser visto como o valor montante limite dessa forma hipotética de capitalização, ou seja, e é o valor acumulado ao final de um ano de capitalização do principal R$1,00 aplicado a taxa nominal de 100% ao ano, se o juro for calculado continuamente. Nesse caso, o investidor tem taxa limite efetiva de juros igual a 172% ao ano.

1.1.6 Função logarítmica

Definição 1.19 Logaritmo. Considere a equação exponencial

$$b^x = a \qquad b > 0, \quad b \neq 1 \quad \text{e} \quad a > 0 \tag{1.4}$$

pode-se escrever a expressão (1.4):

$$\log_b^a = x \qquad b > 0, \quad b \neq 1 \quad \text{e} \quad a > 0$$

diz-se, então, que x é o logaritmo de a na base b. O número a é chamado de logaritmando.

Exemplo 1.22 Calcular os logaritmos:

a. $\log_2^8$

b. $\log_{\sqrt[3]{2}}^{0,25}$

Consequências imediatas da definição:

i. $\log_b^1 = 0$

ii. $\log_b^b = 1$

iii. $\log_b^{b^n} = n$

iv. $b^{\log_b^a} = a$

Definição 1.20 Bases de Logaritmos. Algumas bases de logaritmos são especiais, a saber:

i. Sistema decimal ou de Briggs: $\log_{10}^a = \log(a)$ (base 10);

ii. Sistema natural ou neperiano $\log_e^a = \ln(a)$ (base e).

Definição 1.21 Propriedade da mudança de Base de Logaritmos. Suponha que se conheça $\log_b^a$, mas deseja-se obter $\log_c^a$, esse pode ser obtido pela seguinte relação:

$$\log_c^a = \frac{\log_b^a}{\log_b^c}$$

Exemplo 1.23 Calcular $\log_3^2$, sabendo-se que $\log(2) = 0,3010$ e $\log(3) = 0,4771$

Definição 1.22 Propriedades operatórias de Logaritmos. Sejam $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ as seguintes propriedades são válidas para as operações:

i. Produto: $\log_b^{a.c} = \log_b^a + \log_b^c$

ii. Quociente: $\log_b^{\frac{a}{c}} = \log_b^a - \log_b^c$

iii. Potência: $\log_b^{a^k} = k.\log_b^a$

Exemplo 1.24 Calcular $\log_2^{\frac{\sqrt[3]{2}}{4}}$.

Exemplo 1.25 Resolver a equação $2720 = 500(1 + 0,02)^x$.

Definição 1.23 Função logarítmica. Denomina-se função logarítmica de base b ($b > 0$ e $b \neq 1$) à função:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \log_b^x \end{cases}$$

Observação: Logicamente, dependendo da natureza do problema ou fenômeno a função logarítmica pode assumir outras formas mais gerais.

A função da definição (1.23) é a inversa da função exponencial dada pela definição (1.16).

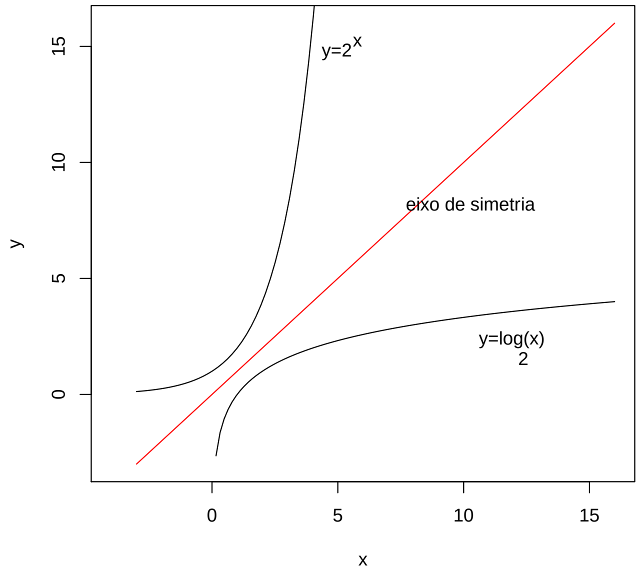

Figura 1.10: Gráficos das funções exponencial e logarítmica.

Exemplo 1.26 Dada a função $y = \log_2^{(x+1)}$, pede-se domínio e conjunto imagem, estudo da monotonicidade em seu domínio, esboço do gráfico.

1.1.7 Funções e relações trigonométricas

Definição 1.24 Ciclo trigonométrico. Denomina-se ciclo trigonométrico a circunferência de raio unitário e centro na orgiem do sistema cartesiano $O(0,0)$. Assim, a cirunferência intercepta os eixos nos pontos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ e $D(0,-1)$.

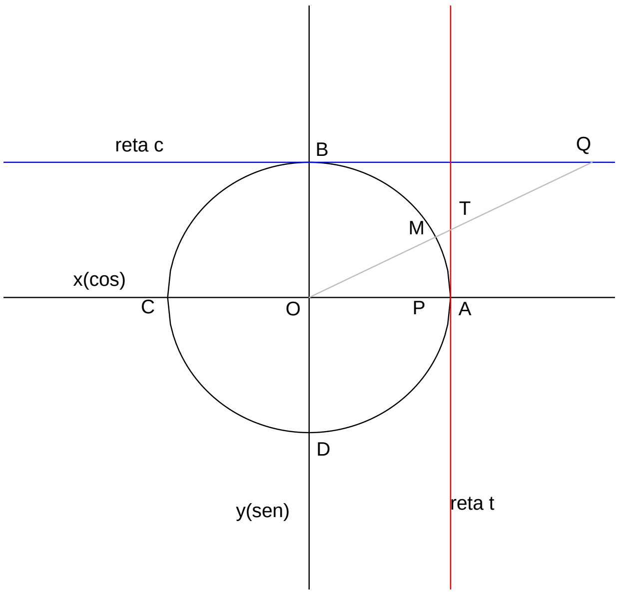

Figura 1.11: Ciclo trigonométrico

Considere, no primeiro quadrante, o ângulo α que define o arco $\widehat{AM}$. Por definição:

i. $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}\widehat{AM} = \overline{MP}$

ii. $\cos(\alpha) = \cos\widehat{AM} = \overline{OP}$

iii. $\text{tag}(\alpha) = \text{tag}\widehat{AM} = \overline{AT}$

iv. $\text{cotg}(\alpha) = \text{cotg}\widehat{AM} = \overline{BQ}$

De modo análogo para os demais quadrantes. É imediato observar que para um arco qualquer:

$$-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq +1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq \cos(\alpha) \leq +1$$

$$\text{tag}(\alpha) \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \text{cotg}(\alpha) \in \mathbb{R}$$

função	0	$\pi/6$	$\pi/4$	α $\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosseno	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0
cotangente	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

Observações:

i. $\text{tag}(\alpha)$ existe $\Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$;

ii. $\text{cotg}(\alpha)$ existe $\Leftrightarrow \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.25 Relações trigonométricas essenciais. Seja α um ângulo associado a um arco $\widehat{AM}$. Para $k \in \mathbb{Z}$, as seguintes identidades trigonométricas são válidas:

i. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

ii. $\text{tag}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

iii. $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}, \quad \alpha \neq k\pi$

iv. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

v. $\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}, \quad \alpha \neq k\pi$

vi. $\sec^2\alpha = 1 + \text{tag}^2\alpha, \quad \alpha \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

vii. $\text{cossec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha, \quad \alpha \neq k\pi$

Definição 1.26 Função Trigonométrica. É toda função regida por uma relação trigonométrica. Ao considerar uma função trigonométrica deve-se observar:

a. As condições de sua existência (domínio);

b. O conjunto imagem;

c. O período da função.

Definição 1.27 Função periódica. Uma função $y = f(x)$, definida em um domínio D é dita periódica se existe um número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in D$. O menor valor de p para o qual se verifica essa relação é chamado de período da função.

Exemplo 1.27 Considere a função:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \text{sen}(x) \end{cases}$$

Pede-se: domínio, conjunto imagem, período, gráfico.

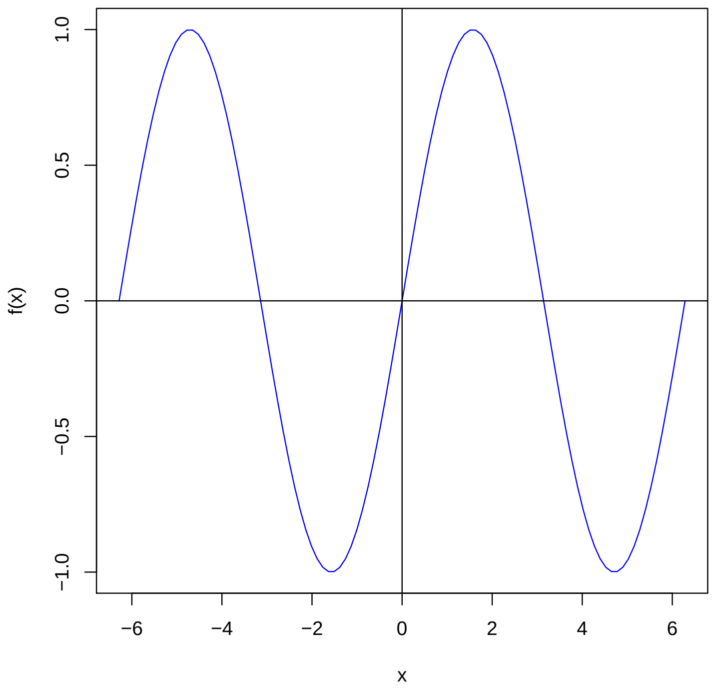

Figura 1.12: Gráfico da função $y = \text{sen}(x)$.

Observa-se que:

a. Domínio $= \mathbb{R}$ e conjunto imagem $= [-1, +1]$;

b. $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, o período da função é $p = 2\pi$. Assim, em cada intervalo:$\ldots - 4\pi \leq x \leq -2\pi, -2\pi \leq x \leq 0, 2\pi \leq x \leq 4\pi, \ldots$, o gráfico da função é "igual".

c. A função seno da forma como está definida não admite inversa, pois não é bijetora. Agora se considerarmos:

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, +1] \\ x \mapsto \text{sen}(x) \end{cases}$$

a função passa a ser bijetora e, portanto, existe f^{-1}.

$$f^{-1}: \begin{cases} [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ y \mapsto \text{arcsen}(y) \end{cases}$$

Exemplo 1.28 Considere a função:

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \mid \cos(x) \mid \end{cases}$$

Pede-se: domínio, conjunto imagem, período, gráfico. Essa função admite inversa?

1.1.8 Exercícios

1. Resolva as equações exponenciais a seguir.

   a. $2^{x^2+1} = 2^{3x-1}$

   b. $3^{2x-1} = \dfrac{1}{3}$

   c. $(2^x)^x = 16$

   d. $2.4^x - 3.9^x = 0$

   e. $5^{x-1} = \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{25}}{5\sqrt{25}}}$

   f. $25^x - 30.5^x + 125 = 0$

   Resp.: a. $\{1; 2\}$ b. $\{0\}$ c. $\{-2; 2\}$ d. $\{-\frac{1}{2}\}$ e. $\{\frac{1}{3}\}$ f. $\{1; 2\}$

2. Considere a função exponencial generalizada $y = a.b^{cx}$, com $b > 1$. Explique o significado geométrico dos parâmetros a e c do modelo. Obtenha sua função inversa e explique matematicamente o significado da restrição $c \neq 0$.

3. Construa no mesmo eixo cartesiano o gráfico de cada uma das funções a seguir.

   a. $f(x) = 3^x$; $g(x) = 3^{3x}$ e $h(x) = 3.3^x$

   b. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$ e $h(x) = 2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

4. Dadas as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2 - 2x$, calcule $f(g(-1))$ e $g(f(-1))$.

   Resp. 8 e $-\frac{3}{4}$

5. (Aplicação) Numa cultura de bactérias existem inicialmente 1000 bactérias presentes e a quantidade após t minutos é $N(t) = 1000.3^{0,7t}$. Construa uma representação gráfica desse crescimento exponencial. Verifique que em 10 minutos a quantidade de bactérias será superior a 2.000.000.

6. Suponha que um distribuidor de vinho possua uma quantidade dada desse produto, que pode ser vendida no presente por um preço R$$k,00$ ou pode ser estocada por um período de tempo variável e, então, vendida por um preço maior. Suponha que o valor crescente do vinho seja dado pela equação $V = k \exp^{\sqrt{t}}$, sendo V o preço de venda; $\exp = e$ a base natural e t o tempo variável de estocagem. Mostre que quando o tempo de estocagem é zero o preço de venda é K. Calcule o tempo necessário de armazenamento para que o preço de venda seja $4k$ (Adaptado de Chiang, pág. 272).

7. Calcule os valores dos logaritmos a seguir

   a. $\log_2 32$ b. $\log_2 0,25$ c. $\log_{0,5} 8\sqrt{2}$ d. $\log_5 1$ e. $\log_{\frac{9}{4}} \frac{2}{3}$

   Resp. a. 5 b. -2 c. $-3,5$ d. 0 e. $-0,5$

8. Sabendo-se que $\log_{10} 2 = 0,3010$ e $\log_{10} 3 = 0,4771$, calcule:

   a. $\log_{10} 6$ b. $\log_{10} 1,5$ c. $\log_{10} 5\sqrt{2}$ d. $\log_{10} 72$

   Resp. a. 0,7781 b. 0,1760 c. 0,8494 d. 1,8573

9. Resolver as equações logaritmicas a seguir.

   a. $\log_3(2x+7) = 1$

   b. $\ln(3x^2 - 1) = \ln(x-1)$

   c. $\log_2(x-2) - \log_4(2x-3) = 1$

   d. $\log_2(\log_2 x) = 0$

   Resp. a. $S = \{-2\}$ b. $S = \emptyset$ c. $S = \{\frac{12+\sqrt{80}}{2}\}$ d. 2

10. Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações a seguir.

   a. $5^x > 25$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

   b. $4^x \leq 3^x$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

   c. $3^{2x} - 4.3^x + 3 \geq 0$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$

   d. $1 \leq 10^x \leq 100$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

   e. $\log(3x-2) \geq \log(x+4)$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

   f. $\log_2 x - \log_4(x - 3/4) \geq 1$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 3/4 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\}$

   g. $3\log x - \dfrac{\log x}{2} \leq 5$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 100\}$

   g. $(\log x)^2 - 3\log x + 2 > 0$ Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10 \text{ ou } x > 100\}$

11. Encontre o domínio para cada uma das funções a seguir.

   a. $y = \dfrac{1}{2^x - 1}$

   b. $y = \sqrt{2^{x^2} - 1}$

   c. $y = \log(x^2 - 5x + 6)$

   d. $y = \log_x(2x-1)$

   Resp. a. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ b. $D(f) = \mathbb{R}$ c. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
   d. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/2 \text{ e } x \neq 1\}$

12. (Aplicação) O número $-\log_b a$ é denominado cologaritmo de a na base b. Em Química, ele é usado para definir o pH de uma solução. Sendo assim, o número pH = colog[H^+] representa a concentração de íons de hidrogênio em uma solução. Essa medida serve para categorizar a solução em ácida (se pH < 7), básica (se pH > 7) ou neutra (pH = 7). Suponha que em uma solução obteve-se $[H^+] = 2,0 \times 10^{-8}$. Classifique a solução de acordo com seu pH.

13. Construa o gráfico das funções a seguir.

   a. $y = \log_3 x$ b. $y = \log_{1/5} x$ c. $y = \log_4(x-1)$ d. $y = \log_x(x^2)$

14. Considere $\alpha = 135^o$. Represente o arco correspondente no ciclo trigonométrico e calcule seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante de α.

15. Considere $\beta = -\frac{4\pi}{3}$. Represente o arco correspondente no ciclo trigonométrico e calcule seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante de β.

16. Calcule

    a. $\arccos 0$ b. arctg 1 c. arcsen 1 b. arctg 0

17. Demonstre as identidades:

    a. $\text{sen}^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$

    b. $\dfrac{\text{tg}x}{1+\text{tg}^2 x} = \text{sen}x \cos x$

    c. $(\sec x + \text{tg}x)(\sec x - \text{tg}x) = 1$

    d. $\dfrac{\sec x - \text{cossec}x}{\sec x + \text{cossec}x} = \dfrac{\text{tg}x - 1}{\text{tg}x + 1}$

18. Na Trigonometria as identidades:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha \tag{1.5}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \tag{1.6}$$

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha \tag{1.7}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \tag{1.8}$$

    são conhecidas como seno e cosseno da soma e da diferença. Usando as relações 1.5 a 1.8, desenvolva

    a. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ b. $\cos(\pi - x)$ c. $\text{sen}\,(\pi + x)$ d. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

19. Considere $\alpha = 105^o$. Calcule seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante de α.

20. Considere as seguintes identidades envolvendo multiplicação de arcos

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \tag{1.9}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \tag{1.10}$$

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} \tag{1.11}$$

    a. Sabendo-se que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{12}}{12}$, calcule $\cos 2\alpha$.

    b. Se cotg $\alpha = -4$, calcule tg 2 α.

    c. Demonstre a identidade $(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \text{sen}(2\alpha)$

21. Nas funções trigonométricas a seguir, identifique o domínio, conjunto imagem e período. Represente graficamente.

    a. $f(x) = 3\,\text{sen}\,x$ b. $f(x) = 1 + \cos x$ c. $f(x) = \text{cotg}\,x$ d. $f(x) = \text{tg}\,2x$

22. Estude a paridade das funções a seguir.

    a. $f(x) = x\cos x$ b. $x\,\text{sen}\,x + 4$ c. $f(x) = \text{tg}\,x$ d. $f(x) = \sec\,x$

23. Resolver as equações:

a. $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ Resp.: $\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

b. $\text{sen}^2 x - 1 - \cos x = 0,\ 0 \leq x \leq 2\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

c. $\text{tg}\, x = 1,\ 0 \leq x \leq 4\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\}$

d. $2\text{sen}\, x - \text{cossec}\, x = 1,\ 0 \leq x \leq 2\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$

e. $\text{cossec}^2 x = 1 - \text{cotg}\, x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$ Resp.: $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\}$

f. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ Resp.: $\{x \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

g. $\text{tg}\, x = 1$ Resp.: $\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

h. $\text{sen}\, 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Resp.: $\{x \mid x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Capítulo 2

Limite e Continuidade

2.1 Limite

2.1.1 Noção intuitiva de Limite

Considere as seguintes sequências numéricas:

a. $\{1, 2, 3, 4, \dots, 100, 101, \dots\}$

b. $\{-1, -2, -3, -4, \dots, -100, -101, \dots\}$

c. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{1024}, \dots\}$

Observa-se que na sequência (a) os números naturais crescem ilimitadamente, enquanto que na sequência (b) eles decrescem ilimitadamente. Assim, podemos dizer que essas sequências numéricas não tendem a um número específico e sim ao infinito. Notação: $x \mapsto +\infty$ para (a) e $x \mapsto -\infty$ para (b). Já na sequência numérica (c), os termos decrescem mas não ilimitadamente. Esta sequência, embora não assuma o valor zero, aproxima-se cada vez mais desse valor. Notação: $x \mapsto 0$.

Agora, se considerarmos uma função real:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

O conceito de limite refere-se a seguinte questão: qual é o valor para o qual y tende quando x tende a um valor específico?

Estude o limite das funções a seguir nos pontos indicados.

Exemplo 2.1 $y = 2x + 1$ quando $x \mapsto 10$.

Exemplo 2.2 $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ quando $x \mapsto \pm\infty$.

Exemplo 2.3 $y = \ln(x)$ quando $x \mapsto 0$.

Exemplo 2.4 $y = \exp(x)$ quando $x \mapsto -\infty$.

2.1.2 Formalização do conceito de limite

Antes de formalizarmos a definição de limite vejamos alguns conceitos que são fundamentais.

Definição 2.1 Vizinhança de um ponto. Seja $a \in \mathbb{R}$, a vizinhança de a é definida por qualquer intervalo aberto que contenha a. Notação:

$$V(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta_1 < x < a + \delta_2\} \quad \delta_1 > 0; \delta_2 > 0.$$

Obervações:

i. Se $V(a) = (a - \delta; a + \delta)$, diz-se que a vizinhança é de raio δ (simétrica em torno de a);

ii. $V(a) = (a - \delta; a + \delta) \Leftrightarrow \mid x - a \mid < \delta$;

Definição 2.2 Ponto de Acumulação. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ se toda vizinhança de a contém um ponto de B distinto de a.

Obervação: Um ponto de acumulação de um conjunto B não precisa necessariamente pertencer a ele. Ao afirmar que a é ponto de acumulação de $B \subset \mathbb{R}$ significa que a pode ser aproximado por pontos de B. Precisamente, dado $\delta > 0$, por menor que seja, sempre existe $x \in B$, $x \neq a$, tal que $\mid x - a \mid < \delta$ (os pontos de B podem tender a a).

Conceito de Limite de uma função. Seja a função:

$$f : \begin{cases} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

e considere a um ponto de acumulação do domínio D. Considere L um número real. Dizemos que L é o limite da função f quando x tende a a e denota-se:

$$\lim_{x \mapsto a} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad f(x) \mapsto L \ \text{ quando } \ x \mapsto a$$

se para qualquer vizinhança de L, $V(L)$, por menor que seja, sempre existir uma vizinhança de a, $V(a)$, no domínio D tal que $f(x) \in V(L)$ sempre que $x \in V(a)$, para todo $x \neq a$.

Observações:

i. Note que o ponto a não precisa necessariamente pertencer ao domínio da função;

ii. Em uma questão de limite de uma função desejamos investigar para onde $f(x)$ vai quando x tende a a, ficando em segundo plano a questão sobre a existência, ou não, da imagem $f(a)$;

iii. O conceito de limite envolve duas vizinhanças: $V(L)$ que nos diz o quanto desejamos que $f(x)$ esteja próxima do número L e $V(a)$ nos indica o quanto x deve se aproximar de a para que $f(x) \in V(L)$;

iv. Em geral, $V(a)$ dependerá de $V(L)$;

v. Se considerarmos vizinhanças simétricas de raios ϵ e δ em L e a respectivamente, ou seja, $V_\epsilon(L)$ e $V_\delta(a)$, a condição $f(x) \in V_\epsilon(L)$ equivale a $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$, enquanto que $x \in V_\delta(a)$ equivale a desigualdade $0 < \mid x - a \mid < \delta$, uma vez que impomos a condição de que a seja um ponto de acumulação de D.

Com base na observação **v** podemos estabelecer a seguinte definição.

Definição 2.3 Limite de uma função. Dada a função $f : D \mapsto \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D, dizemos que o número $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende a a, ou seja, $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = L$, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$ sempre que $0 < \mid x - a \mid < \delta$.

Nos exemplos a seguir, provar os limites pela definição formal.

Exemplo 2.5 $\lim\limits_{x \mapsto 10} (2x + 1) = 21$

Exemplo 2.6 $\lim_{x \mapsto 3} x^2 = 9$

Teorema 2.1 **Unicidade**. Se $\lim_{x \mapsto a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \mapsto a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Demonstração:

Definição 2.4 Propriedades dos limites. Considere $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) = L_2$ e $c \in \mathbb{R}$.

P1. $\lim\limits_{x\mapsto a}(mx + n) = ma + n, \quad m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0.$

Demonstração:

P2. $\lim\limits_{x\mapsto a}(c) = c;$

P3. $\lim\limits_{x\mapsto a} cf(x) = c. \lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = cL_1;$

P4. $\lim\limits_{x\mapsto a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\mapsto a} f(x) \pm \lim\limits_{x\mapsto a} g(x) = L_1 \pm L_2;$

P5. $\lim\limits_{x\mapsto a}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\mapsto a} f(x). \lim\limits_{x\mapsto a} g(x) = L_1.L_2;$

P6. $\lim\limits_{x\mapsto a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\mapsto a} f(x)}{\lim_{x\mapsto a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} \ \ (L_2 \neq 0);$

P7. $\lim\limits_{x\mapsto a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)]^n = [L_1]^n;$

P8. $\lim\limits_{x\mapsto a}[\log(f(x))] = \log[\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)] = \log[L_1] \ \ (L_1 > 0);$

P9. $\lim_{x \mapsto a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \mapsto a} f(x)} = e^{L_1}$;

P10 $\lim_{x \mapsto a} \cos[f(x)] = \cos[\lim_{x \mapsto a} f(x)] = \cos[L_1]$.

Exemplo 2.7 Calcular os limites a seguir.

a. $\lim_{x \mapsto 4}(x^2 - 5x + 6)$

b. $\lim_{x \mapsto 2} \frac{x-3}{x^3-2}$

c. $\lim_{x \mapsto 0} \exp(\tan(x))$

d. $\lim_{x \mapsto \pi/6} \log_2(\text{sen}(x))$

Definição 2.5 Expressões de indeterminação. Na aritmética dos limites as seguintes expressões são consideradas indeterminações:

1. $\infty - \infty$
2. $0.\infty$
3. $\frac{0}{0}$
4. $\frac{\infty}{\infty}$
5. 0^0
6. ∞^0
7. 1^∞

Do ponto de vista da análise quando qualquer uma destas 7 expressões ocorre nada se pode afirmar, a priori, sobre o limite da função.

Exemplo 2.8 Calcular os limites a seguir.

a. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{x^2}{2x^2}$

b. $\lim\limits_{x \mapsto 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

Definição 2.6 Limites Laterais. Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto (a, c). Se quando x tende para a por valores maiores do que a, a função tende ao número L, então L é chamado de limite lateral à direita e denota-se:

$$\lim_{x \mapsto a^+} f(x) = L$$

se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$, sempre que $a < x < a + \delta$.

De modo análogo pode-se definir o limite lateral à esquerda, basta agora considerar a função definida em um intervalo aberto (d, a). Assim, L será o limite lateral à esquerda de $f(x)$ se quando x tender a a por valores menores, $f(x)$ se aproximar do número L, ou seja,

$$\lim_{x \mapsto a^-} f(x) = L$$

se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$, sempre que $a - \delta < x < a$.

Exemplo 2.9 Calcular os limites laterais a seguir.

a. $\lim\limits_{x \mapsto 2^+} (2x^2 + 5)$

b. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x)$, sendo $y = f(x)$ dada pela lei:

$$f(x) : \begin{cases} -\frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

Teorema 2.2 Existência do limite. O limite de uma função quando x tende a a existe e é L somente se existirem os limites laterais e ambos forem iguais a L.

Demonstração:

Exemplo 2.10 Considere a função:

$$f(x) : \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1; \\ -2x+4 & \text{se } x \geq 1; \end{cases}$$

Existe limite de $f(x)$ quando x tende a 1?

Definição 2.7 Limites no infinito. Seja f uma função real definida no intervalo $(a, +\infty)$. Dizemos que o número real L é o limite no infinito da função f e denota-se:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = L$$

se, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$, sempre que $x > A$. De modo análogo para uma função definida no intervalo $(-\infty, a)$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = L$$

se, dado $\epsilon > 0$, existe $A < 0$ tal que $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$, sempre que $x < A$.

Teorema 2.3 Seja $n \in \mathbb{N}$, então:

i. $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

ii. $\displaystyle\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Demonstração:

Exemplo 2.11 Calcular os limites a seguir.

a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{3}{2x^2}$

b. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}$

c. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{8x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

Definição 2.8 Limites infinitos. Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a. Diz-se que o limite:

$$\lim_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$$

é um limite infinito se, dado $A > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 <| x - a |< \delta$. De modo análogo para:

$$\lim_{x \mapsto a} f(x) = -\infty$$

é um limite infinito se, dado $A < 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < A$ sempre que $0 <\mid x - a \mid< \delta$.

Exemplo 2.12 Calcular o limite: $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \ln(x)$

Teorema 2.4 Seja $n \in \mathbb{N}$, então:

i. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

ii. $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ (n ímpar) e $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ (n par)

Demonstração para i:

Teorema 2.5 Sejam $\lim_{x\mapsto a} f(x) = c$ $(c \neq 0)$ e $\lim_{x\mapsto a} g(x) = 0$, então:

i. $\lim_{x\mapsto a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $c > 0$ e $g(x) \mapsto 0$ por valores positivos;

ii. $\lim_{x\mapsto a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $c < 0$ e $g(x) \mapsto 0$ por valores positivos;

iii. $\lim_{x\mapsto a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $c > 0$ e $g(x) \mapsto 0$ por valores negativos;

iv. $\lim_{x\mapsto a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $c < 0$ e $g(x) \mapsto 0$ por valores negativos.

Exemplo 2.13 Calcular os limites a seguir.

a. $\lim_{x\mapsto 2^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

b. $\lim_{x\mapsto -1} \dfrac{5x+2}{|\ x+1\ |}$

Definição 2.9 Assíntotas horizontais e verticais do gráfico de uma função. A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$ se ao menos uma das condições a seguir for satisfeita:

i. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = b$

ii. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = b$

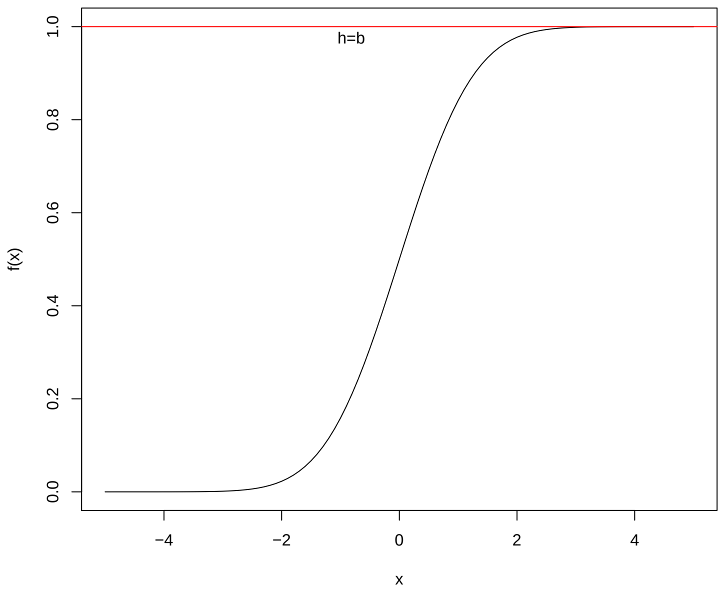

Figura 2.1: Exemplo de gráfico de uma função com uma assíntota horizontal.

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $y = f(x)$ se ao menos uma das condições a seguir for satisfeita:

i. $\lim\limits_{x \mapsto a^+} f(x) = +\infty$

ii. $\lim\limits_{x \mapsto a^-} f(x) = +\infty$

iii. $\lim\limits_{x \mapsto a^+} f(x) = -\infty$

iv. $\lim\limits_{x \mapsto a^-} f(x) = -\infty$

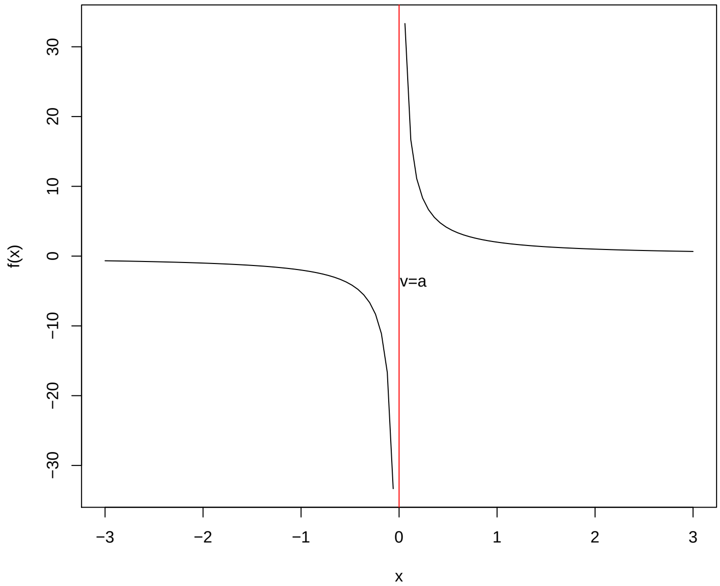

Figura 2.2: Exemplo de gráfico de uma função com uma assíntota vertical.

Exemplo 2.14 Encontrar, caso existam, as assíntotas horizontais do gráfico da função: $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Esboce o gráfico da função.

Exemplo 2.15 Verificar se o gráfico da função: $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ possui assíntotas. Esboce o gráfico da função.

2.1.3 Limites fundamentais

Teorema 2.6 Limite trigonométrico fundamental.

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Demonstração:

Exemplo 2.16 Calcular os limites:

a. $\lim_{x \mapsto 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$

b. $\lim_{x \mapsto 0} \dfrac{\operatorname{tag}(x)}{x}$

Teorema 2.7 Limite exponencial fundamental.

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ou

$$\lim_{u \mapsto 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Exemplo 2.17 Calcular os limites:

a. $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$

b. $\lim_{x \mapsto 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

2.2 Continuidade

Definição 2.10 Diz-se que uma função f é contínua no ponto $x = a$ se e somente se:

i. Existe $f(a)$;

ii. Existe $\lim_{x \mapsto a} f(x)$;

iii. $\lim_{x \mapsto a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 2.18 Verificar se a função: $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ é contínua no ponto $x = 2$.

Exemplo 2.19 Verificar se a função:

$$f(x) : \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1; \\ -2x+4 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

é contínua no ponto $x = 1$.

Observações

i. Quando uma função $y = f(x)$ é contínua em todos os pontos de um intervalo (a, b) então ela é absolutamente contínua em (a, b);

ii. Em geral, as funções racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em seus domínios;

iii. Se f e g são funções contínuas em $x = a$ então as funções $f \pm g$, $f.g$, f/g também serão contínuas em $x = a$.

2.3 Exercícios

1. Considere as funções a seguir. Para cada caso, construa uma tabela com atribuição de valores na vizinhança do ponto x_0, para verificar a tendência de $f(x)$.

   a. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, em que $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; para $x_0 = 1$.

   b. $f(x) = \ln(2x-1)$, em que $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/2\}$; para $x_0 = \dfrac{3}{4}$.

   c. $f(x) = 3^x$; para $x_0 = 0$.

   d. $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, em que $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; para $x_0 = 0$.

   e. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, em que $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$; para $x_0 = 0$.

2. Encontre os limites solicitados com base na análise dos gráficos das funções a seguir.

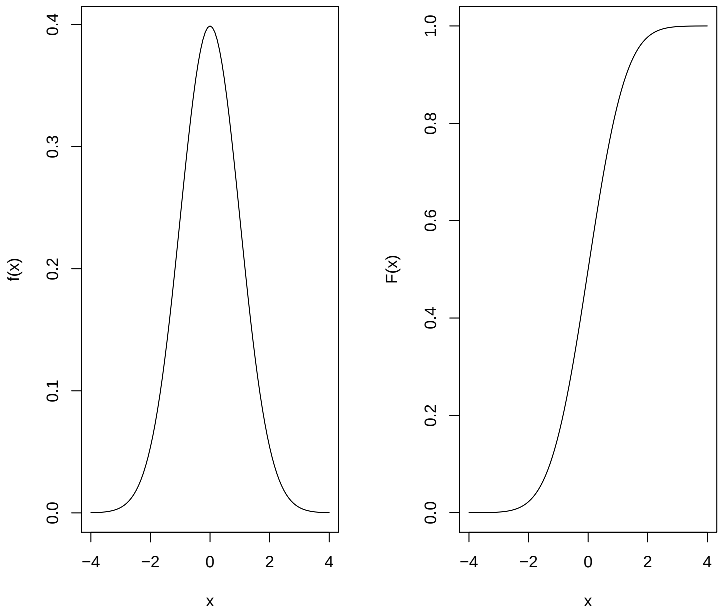

Figura 2.3: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$

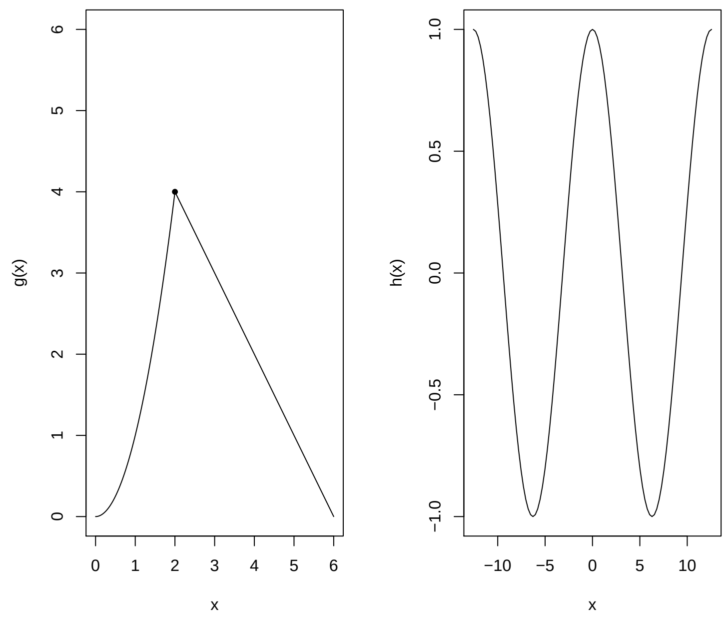

Figura 2.4: $\lim_{x\to 2} g(x)$ e $\lim_{x\to 0} h(x)$

3. Usando a definição formal de limite, mostre que:

    a. $\lim_{x\to 1}(3x-1) = 2, \ \forall \ \epsilon > 0$

    b. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x+3\right) = 5$, considere $\epsilon = 0,002$.

    c. $\lim_{x\to 2}(x^2) = 4$, considere $\epsilon = 0,01$.

    d. $\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right) = -6$, considere $\epsilon = 0,05$.

4. Esboce o gráfico de cada uma das funções a seguir e encontre o limite, se existir. Caso o limite não exista, justificar.

    a.
    $$f(x) = \mid x-2 \mid +1 \qquad\qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

    b.
    $$f(x) = \frac{\mid x \mid}{x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$

    c.
    $$f(x) = \begin{cases} -5, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ 5, & \text{se } x > 0. \end{cases} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$

d.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x < 2; \\ 2, & \text{se } x = 2; \\ 9-x^2, & \text{se } x > 2. \end{cases} \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

e.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x < 3; \\ 10-x, & \text{se } x \geq 3; \end{cases} \qquad \lim_{x\to 3} f(x)$$

f.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1, & \text{se } x \neq 3; \\ 7, & \text{se } x = 3; \end{cases} \qquad \lim_{x\to 3} f(x)$$

5. Aplicando as propriedades e teoremas sobre limites, encontre o limite das funções a seguir.

1. $\lim_{x\to 1}(-5x+3)$ Resp.: -2

2. $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$ Resp.: 7

3. $\lim_{x\to -1}[(x+4)^3(x+2)^{-1}]$ Resp.: 27

4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{(x^2-5)}{(2x^3+6)}$ Resp.: $-1/22$

5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ Resp.: 2

6. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ Resp.: 3

7. $\lim_{x\to 6}\log_2(x+2)$ Resp.: 3

8. $\lim_{x\to 0}\exp(x^2+5)$ Resp.: e^5

9. $\lim_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{8x+1}{x+3}}$ Resp.: $3/2$

10. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ Resp.: $-3/2$

11. $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ Resp.: $11/17$

12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ Resp.: 1/8

13. $\lim\limits_{x\to 3/2} \dfrac{8x^3-27}{4x^2-9}$ Resp.: 9/2

14. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ Resp.: $-\infty$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{-x}\right)$ Resp.: $-1/2$

16. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ Resp.: $+\infty$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ Resp.: 1

18. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ Resp.: $-\infty$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5-x^3}{8x+2}$ Resp.: $-\infty$

20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$ Resp.: 1/2

21. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt[3]{x^3-x}-\sqrt[3]{x^3+1})$ Resp.: 0

22. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-5x^3+2}{7x^3+3}$ Resp.: $-5/7$

23. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1}$ Resp.: 0

24. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{x^2-4}$ Resp.: $+\infty$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^2-9}{x}$ Resp.: 6

26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}; n\in\mathbb{N}^*$ Resp.: n

27. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x}{x-3}$ Resp.: $-\infty$

28. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{\mid x-2\mid}$ Resp.: $+\infty$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x$ Resp.: $3/2$

30. $\lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{x+6}{x^2-36}$ Resp.: $+\infty$

31. $\lim\limits_{x\to 6^-} \dfrac{x+6}{x^2-36}$ Resp.: $-\infty$

32. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x+6}{x^2-36}$ Resp.: não existe

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ Resp.: $1/4$

34. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x-4}$ Resp.: não existe

35. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{3-x}{x^2-2x-8}$ Resp.: $+\infty$

36. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3+\text{sen}x}{x\text{sen}x}$ Resp.: $8/\pi$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ Resp.: 1

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\text{sen}x}{x}$ Resp.: 2

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec x}{\cos x}$ Resp.: 0

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ Resp.: $1/2$

41. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{1+(\cos x)^2}$ Resp.: $-1/2$

42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x\cos x}$ Resp.: 0

43. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\text{sen}x-\cos x}{1-\tan x}$ Resp.: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}ax}{x}$ Resp.: a

45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}5x}{x\cos x}$ Resp.: 5

46. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+5}$ Resp.: e^2

47. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x}$ Resp.: e^{-1}

48. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x}$ Resp.: e^3

49. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{2}{x} - 1}$ Resp.: e^2

50. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^{x}$ Resp.: e^{-1}

6. Encontrar, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico das funções a seguir.

   a. $f(x) = -\dfrac{2}{x+3}$ b. $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$ c. $f(x) = \dfrac{4}{x-4}$

   d. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ e. $f(x) = e^x - 1$ f. $f(x) = \ln(1 + x)$

   g. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ h. $f(x) = \tan x$ i. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

7. Um função real $y = f(x)$ é descontínua no ponto $x = a$ se qualquer um dos três requisitos para continuidade não é satisfeito. Dê três exemplos de funções, em que cada uma delas um desses requisitos é violado.

8. Para cada função a seguir, estude a sua continuidade no ponto solicitado. Esboce os gráficos e justifique sua resposta.

   a.
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16, & \text{se } x \neq -4; \\ 4, & \text{se } x = -4; \end{cases} \quad \text{em} \quad x = -4.$$

   b.
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \text{se } x \neq -2; \\ 3, & \text{se } x = -2; \end{cases} \quad \text{em} \quad x = -2.$$

   c.
   $$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0; \end{cases} \quad \text{em} \quad x = 0.$$

Capítulo 3

Derivada e Diferencial de uma função

3.1 Derivada: conceito e interpretações

Definição 3.1 Derivada de uma função. Considere $y = f(x)$ uma função real de variável real, a derivada dessa função denotada por $y' = f'(x)$ (notação de Isaac Newton) ou por $\frac{dy}{dx}$ (notação de Gottifried Leibniz) é dada por:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se o limite existir e for finito.

Exemplo 3.1 Encontrar a derivada das funções a seguir.

a. $y = 3x + 4$

b. $y = x^2 - 1$

Definição 3.2 Interpretação geométrica. Considere $y = f(x)$ uma função e seja $P(x, y)$ um ponto da curva do gráfico dessa função.

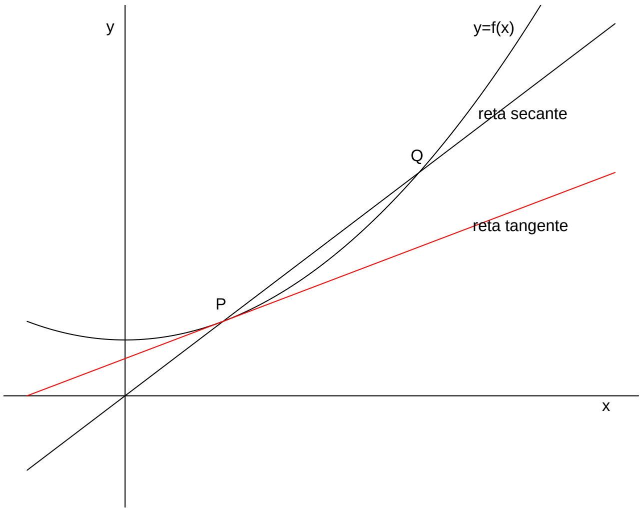

Figura 3.1: Interpretação geométrica da derivada

Vamos dar um acréscimo Δx a variável x, em consequência y sofrerá um acréscimo Δy, constituindo o ponto Q. Na figura acima, a reta secante à curva que passa pelos pontos P e Q tem coeficiente angular:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Façamos $\Delta x \to 0$, assim a reta secante gira em torno do ponto P e, no limite, a reta secante tende para a reta tangente à curva no ponto P com coeficiente angular:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Exemplo 3.2 Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = -x^2 + 5x - 6$ no ponto $P(1, -2)$.

Definição 3.3 Interpretação cinemática ou Física. Considere um corpo que se desloca em linha reta segundo uma função horária do tempo:

$$S = f(t)$$

Considerando $t + \Delta t$ teremos $\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$, de modo que $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ define a velocidade média do corpo. Façamos $\Delta t \to 0$, então:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(x)}{\Delta t}.$$

é a velocidade instantânea. De modo análogo também podemos definir a aceleração média e instantânea.

Exemplo 3.3 (Flemming e Gonçalves, pág. 119) No instante $t = 0$ um corpo inicia seu movimento em linha reta segundo a função $S(t) = 16t - t^2$. Determinar:

a. a velocidade média no intervalo de tempo $[2, 4]$;

b. a velocidade no instante $t = 2$;

c. a aceleração média no intervalo de tempo $[0, 4]$;

d. a aceleração no instante $t = 4$.

3.2 Diferenciabilidade e continuidade

Definição 3.4 Diferenciabilidade. Se existe $f'(x=a)$ então dizemos que $f(x)$ é diferenciável em $x=a$. Porém como consequência do Teorema da existência do limite devemos observar que dada uma função $y=f(x)$, a sua derivada $y'=f'(x)$ existe se e somente se:

i. Existe $f'_{+}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{+}} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

ii. Existe $f'_{-}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{-}} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

iii. $f'_{+}(x) = f'_{-}(x)$

Exemplo 3.4 Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -4; \\ -x-6, & \text{se } x > -4. \end{cases}$$

verificar se $y=f(x)$ é contínua e diferenciável em $x=-4$.

Teorema 3.1 Se uma função $y = f(x)$ é diferenciável em $x = a$ então ela é contínua em $x = a$.

(A recíproca desse teorema nem sempre é verdadeira)

Teorema 3.2 Se uma função não é contínua em $x = a$ então ela não é diferenciável em $x = a$.

Exemplo 3.5 Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x < 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \\ 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

verificar se $y = f(x)$ é contínua e diferenciável em $x = 0$.

3.3 Principais Regras e Propriedades de Derivação

1. Se $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

   Demonstração:

2. Se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

   Demonstração:

3. Se $g(x) = cf(x)$ então $g'(x) = cf'(x)$, com $c \in \mathbb{R}$.

   Demonstração:

Exemplo 3.6 Encontrar as derivadas das funções a seguir.

a. $y = 2x^3$

b. $y = -5x^4$

$y = \frac{3}{4}x^6$

4. **Derivada da soma.** Seja $h(x) = f(x) + g(x)$. Se existem $f'(x)$ e $g'(x)$ então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

   Demonstração:

Exemplo 3.7 Encontrar as derivadas das funções a seguir.

a. $y = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 10$

b. $y = \frac{3}{2}x^4 - x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7$

5. **Derivada do produto.** Seja $h(x) = f(x).g(x)$. Se existem $f'(x)$ e $g'(x)$ então $h'(x) = [f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x)g'(x)$

   Demonstração:

Exemplo 3.8 Encontrar a derivada da função: $h(x) = x^2(2x^3 + 4)$.

6. **Derivada do quociente.** Seja $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Se existem $f'(x)$ e $g'(x)$ então a derivado do quociente será $h'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

   Demonstração:

Exemplo 3.9 Encontrar a derivada da função $y = \dfrac{3x+2}{x^2-1}$.

Exemplo 3.10 Encontrar a derivada da função $y = \dfrac{1}{x}$.

Exemplo 3.11 Sendo $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

7. **Derivada da função exponencial.** Seja $y = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = a^x \ln(a)$.

   Demonstração:

   Observação: Seja $y = e^x$, então $y' = e^x$.

8. **Derivada da função logarítmica.** Seja $y = \log_a(x)$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = \dfrac{1}{x \ln(a)}$.

   Demonstração:

Observação: Seja $y = \ln x$, então $y' = \dfrac{1}{x}$.

9. **Derivadas de algumas funções trigonométricas.**

   a. Se $y = \text{sen}(x)$ então $y' = \cos(x)$.

Demonstração:

   b. Se $y = \cos(x)$ então $y' = -\text{sen}(x)$.

Demonstração:

c. Se $y = \text{tg}(x)$ então $y' = \sec^2(x)$.

Demonstração:

De modo análogo para outras funções trigonométricas.

Exemplo 3.12 Encontrar as derivadas das funções $f(x) = \sec(x)$ e $g(x) = \text{cossec}(x)$.

10. **Regra da Cadeia.** Considere as funções $u = g(x)$ e $y = f(u)$ de tal forma que $y = f(g(x)) = fog(x)$ é uma função composta. Então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Exemplo 3.13 Com auxílio da regra da cadeia encontrar as derivadas a seguir

a. $y = \ln(\cos(x))$

b. $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

c. $y = \exp(\mathrm{tg}(x))$

d. $y = \cos(x)$

Com auxílio da regra da cadeia podemos estabelecer um conjunto de regras de derivação, disposto a seguir.

Considere que u e v são funções diferenciáveis em x.

Função	Função derivada
1. $y = c$, $c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$
2. $y = u^n$, $n \in \mathbb{Q}^\star$	$y' = n.u^{n-1}.u'$
3. $y = c.f(x)$, $c \in \mathbb{R}^\star$	$y' = c.f'(x)$
4. $y = u + v$	$y' = u' + v'$
5. $y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$
6. $y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$
7. $y = a^u$, $a > 0$ e $a \neq 1$	$y' = a^u.\ln(a).u'$
8. $y = e^u$	$y' = e^u.u'$
9. $y = \log_a u$, $a > 0$ e $a \neq 1$	$y' = \dfrac{u'}{u.\ln(a)}$
10. $y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
11. $y = \text{sen} u$	$y' = \cos u.u'$
12. $y = \cos u$	$y' = -\text{sen} u.u'$
13. $y = \text{tg}\, u$	$y' = \sec^2 u.u'$
14. $y = \text{cotg}\, u$	$y' = -\text{cossec}^2 u.u'$
15. $y = \sec u$	$y' = \sec u.\text{tg}\, u.u'$
16. $y = \text{cossec}\, u$	$y' = -\text{cossec}\, u.\text{cotg}\, u.u'$
17. $y = \text{arcsen}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
18. $y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
19. $y = \text{arctg}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Função	Função derivada
20. $y = \text{arc cotg}\, u$	$y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
21. $y = \text{arcsec}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$
22. $y = \text{arc cossec}\, u$	$y' = -\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$
23. $y = u^v$	$y' = e^{v\ln(u)}\left[v'.\ln(u) + v.\dfrac{u'}{u}\right]$

Exemplo 3.14 Derivar a função: $y = e^{x^2}\ln(2x) + \text{arctg}(x^2+1)$.

Exemplo 3.15 Derivar a função: $y = x^2\text{sen}(2x) + 2\sqrt[3]{x} - \text{arcos}(3x)$.

Teorema 3.3 Derivada da função inversa. Seja $f(x)$ uma função definida em (a,b) tal que exista $f'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ com $f'(x) \neq 0$. Se exite $x = g(y) = f^{-1}$ então:

$$g'(y) = [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Exemplo 3.16 Seja $y = \text{arcsen}(x)$, demonstre que $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Definição 3.5 Derivada de uma função na forma implícita. A função $y = f(x)$ está na forma explícita. Se fizermos $f(x,y) = 0$ temos a forma implícita da função. Para obter a derivada de uma função na forma implícita procedemos de modo usual, seguindo as regras básicas de derivação, porém para cada derivação em y, pós multiplicamos por y' (pois estamos derivando em relação a x).

Exemplo 3.17 Encontrar a derivada da função: $x^2y + 2y - 4x + 7 = 0$.

Definição 3.6 Derivadas de ordem superior. A derivada de uma função $y = f(x)$ corresponde a uma outra função $y' = f'(x)$, a qual pode ser derivada novamente. Nesse contexto, a derivada de k-ésima ordem da função é definida por $\dfrac{d^k y}{dx^k} = y^k = f^k(x)$.

Exemplo 3.18 Encontre a derivada de segunda ordem da função $y = \text{sen}(2x) - e^x$.

Exemplo 3.19 Encontre a derivada de terceira ordem da função $y = \text{tg}(x) - 2x^3 + \ln(x)$.

3.4 Diferencial de uma função

Vimos que $\frac{dy}{dx}$ é uma das notações usuais para a derivada de uma função. Embora essa expressão seja uma "entidade única", dy e dx podem ser interpretados separadamente.

Definição 3.7 Diferencial. Seja $y = f(x)$ uma função real. Consideremos uma variação em x, Δx. Em consequência, a variável dependente sofrerá um acréscimo Δy. Por definição $dx = \Delta x$. Porém a diferencial da variável dependente y é definida por

$$dy = f'(x).dx$$

não correspondendo exatamente a Δy. No entanto, quando $\Delta x \to 0$ temos que $\Delta y \simeq dy$. Portanto, a diferencial de uma função, dy, corresponde a uma aproximação linear para a verdadeira taxa de variação Δy, dada uma pequena variação em x.

Exemplo 3.20 Se $y = 3x^2 - 2$ calcule Δy e dy para $x = 2$ e $\Delta x = 0,01$.

Exemplo 3.21 Calcule $+\sqrt{17}$ usando o conceito de diferencial.

Exemplo 3.22 (Gomes e Nogueira, pág.98) Suponha que $y = 1200 + 6,2x - 0,015x^2$ seja a equação que dá a produção de milho, em kg/ha, obtida em função da quantidade x de fertilizante fosfatado adicionado ao solo (por exemplo x pode ser expresso em kg de P_2O_5 por hectare). De acordo com esta função para $x = 50kg/ha$ tem-se $y = 1.472,5kg/ha$. A partir dessa quantidade, se for adicionado mais um quilograma por hectare de nutriente, qual é o aumento de produção que se pode prever?

Exemplo 3.23 Dada a função $y = e^x \text{sen}(x) + \ln(x^2) + 10$, calcular dy.

Exemplo 3.24 Uma caixa cúbica tem aresta $x = 4$ cm com erro máximo de $0,05$ cm. Estime o erro máximo no volume V da caixa.

Definição 3.8 Diferencial de ordem k. Dada uma função real $y = f(x)$, admitindo-se a existência de sua derivada de ordem k, a diferencial de k-ésima ordem da função será dada por $d^k y = f^k(x) dx^k$.

Exemplo 3.25 Dada a função $f(x) = 2x^3 + \mathrm{tg}(x)$, encontre $d^2 y$.

3.5 Exercícios

1. Usando a definição formal, encontre as derivadas das funções a seguir.

   a. $y = -2x + 7$ b. $x^2 - 5x + 7$ c. $y = \dfrac{2}{x}$ d. $\sqrt{3x+1}$ e. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

2. (Flemming e Gonçalves, pág.127) Dadas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:

   a. $f'(1) + g'(1)$ b. $2f'(0) - g'(-2)$

   c. $f(2) - f'(-2)$ d. $[g'(0)]^2 + \frac{1}{2}g'(0) + g(0)$

   e. $f(\frac{5}{2}) - \frac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$

   Resp.: a. 4 b.8 c. 3 d.-1 e. $2/15$

3. Sabendo-se que as funções f e g são diferenciáveis no ponto $x = 1$ e que $f(1) = 1$, $g(1) = 1/2$, $f'(1) = 2$, $g'(1) = -3$. Calcule:

   a. $(f + g)'(1)$ b. $(f.g)'(1)$ c. $(f/g)'(1)$ d. $(f^2g)'(1)$

   Resp.: a. -1 b.-2 c. 16 d.-1

4. Encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de cada uma das funções a seguir nos pontos indicados.

   a. $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $P(-2, 9)$.

   b. $y = x^3 - 4x^2 - 1$ no ponto $P(4, -1)$.

   c. $y = \dfrac{3}{4x-2}$ no ponto $P(4, 3/14)$.

   d. $y = \text{sen}^2 3x$ no ponto $P(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2})$.

   e. $y = (x^2 - 1)^4$ no ponto $P(2, 81)$.

5. (Gomes e Nogueira, pág.91) Dada a função $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x$, achar a equação da reta tangente à curva dessa função no ponto $x = 0$. Determinar, a seguir, o ângulo de inclinação. (Resp: $y = 2x$, $\alpha = 63^o 26' 5''$)

6. Um objeto está se movendo de tal maneira que ao final de t segundos, sua distância, em cm, do seu ponto de partida é dada pela função: $d(t) = 2t^2 + 3t + 5$, $t \geq 0$. Determine:

   a. A velocidade média do objeto entre $t = 1$ e $t = 5$;

   b. A velocidade instantânea no tempo $t = 1$.

   Resp.: a. 15 cm/seg b. 7 cm/seg

7. A função $S(t) = S_0 + V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ é bem conhecida na Física e está associada ao movimento uniformemente acelerado de um corpo. Usando o conceito de derivada encontre a função horária da velocidade e a aceleração correspondente.

8. A reta tangente ao gráfico da função $y = ax^2 + bx + 9$ no ponto P(2,-1) é perpendicular à reta $y = \frac{1}{11}x - 5$. Encontre os valores de a e b. ($a = -3$; $b = 1$)

9. A produção y, em ton/ha de uma cultura, em função da quantidade de nutriente x adicionada ao solo é dada pela função:

$$y = -\frac{1}{25000}x^2 + \frac{3}{250}x + 1, \qquad 0 \leq x \leq 100.$$

Determine:

a. a taxa de variação média entre $x = 20$ e $x = 80$;

b. a taxa de variação instantânea em $x = 20$.

10. Mostre que os gráficos da funções $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 2x^3 + 1$ são tangentes no mesmo ponto $P(1, 3)$. Esboce os gráficos.

11. (Flemming e Gonçalves, pág.163) Dada a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ definida para $x \in [3, +\infty)$, desenvolver os seguintes itens:

a. Determinar a função inversa $g(x) = f^{-1}(x)$ e identificar seu dominío;

b. Encontrar a equação da reta tangente à curva de $f(x)$ no ponto com $x = 5$;

c. Encontrar a equação da reta tangente à curva de $g(x)$ no ponto com $x = 0$;

d. Representar graficamente e identificar a relação estabelecida com o Teorema da derivada da função inversa.

12. Estude a diferenciabilidade das funções a seguir nos pontos indicados. Justifique sua resposta.

a.
$$f(x) = \mid x - 2 \mid +1; \qquad x = 2$$

b.
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x < 3; \\ 10 - x, & \text{se } x \geq 3. \end{cases} \qquad x = 3$$

c.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 2; \\ 9 - x^2, & \text{se } x \geq 2. \end{cases} \qquad x = 2.$$

d.
$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \leq -4; \\ -(x + 6), & \text{se } x > -4. \end{cases} \qquad x = -4$$

13. Considere $f(x)$ uma função diferenciável em x. Nessas condições mostre que se $f(x)$ é par então $f'(x)$ é ímpar.

14. Encontre a derivada das funções a seguir.

1. $y = -\dfrac{5}{3}x + 7$ Resp.: $y' = -\frac{5}{3}$
2. $y = x^5 + 2x^3 - x + 4$ Resp.: $y' = 5x^4 + 6x^2 - 1$
3. $y = (x+4)^3$ Resp.: $y' = 3(x+4)^2$
4. $y = x^2\sqrt[3]{x^2}$ Resp.: $y' = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$
5. $y = (x^2+3x)(x^3-9x)$ Resp.: $y' = 5x^4 + 12x^3 - 27x^2 - 54x$
6. $y = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$ Resp.: $y' = -\dfrac{2x^2+6x-25}{(x^2-5x+5)^2}$
7. $y = \log_2(x+2)$ Resp.: $y' = \dfrac{1}{(x+2)\ln 2}$
8. $y = e^{(x^2+5)}$ Resp.: $y' = 2xe^{x^2+5}$
9. $y = \sqrt{x^{14} + x^2 + \sqrt{3}}$ Resp.: $y' = \dfrac{14x^3 + 2x}{2\sqrt{x^{14} + x^2 + \sqrt{3}}}$
10. $y = \sqrt{\cos(2x)}$ Resp.: $y' = -\dfrac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$
11. $y = \ln(x^4)$ Resp.: $y' = \frac{4}{x}$
12. $y = x\cos x$ Resp.: $y' = \cos x - x\text{sen}x$
13. $f(t) = \sqrt{\dfrac{2t+1}{t-1}}$ Resp.: $f'(t) = -\dfrac{3}{2(t-1)^{3/2}(2t+1)^{1/2}}$
14. $y = \text{arc sen}(1/x)$ Resp.: $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
15. $f(s) = 2^{3s^2+6s}$ Resp.: $f'(s) = 6\ln 2(s+1)2^{3s^2+6s}$
16. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ Resp.: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
17. $y = \text{sen}(\text{sen}(x))$ Resp.: $y' = \cos x\cos(\text{sen}x)$
18. $f(x) = (2x-5)^4 + \dfrac{1}{x+1} - \sqrt{x}$ Resp.: $f'(x) = 8(2x-5)^3 - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

19. $y = \arctan(x/a)$ Resp.: $y' = \dfrac{a}{a^2 + x^2}$

20. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ Resp.: $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

21. $y = \arccos\sqrt{x}$ Resp.: $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

22. $y = e^{-x}\cos 2x$ Resp.: $y' = -e^{-x}(2\text{sen}(2x) + \cos 2x)$

23. $y = \lg_{10}(x^4 + 3x^2 + 1)$ Resp.: $y' = \dfrac{4x^3 + 6x}{(x^4 + 3x^2 + 1)\ln 10}$

24. $y = \ln\tan(x/2)$ Resp.: $y' = \text{cossec}x$

25. $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ Resp.: $y' = \dfrac{2}{1 - x^2}$

26. $f(x) = (x\tan x)^2$ Resp.: $y' = 2x^2\sec^2 x\tan x + 2x\tan^2 x$

27. $y = \ln(\cos^2 t)$ Resp.: $y' = -2\tan t$

28. $f(t) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$ Resp.: $f'(t) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}\ln(a/b)\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

29. $y = \ln(\text{sen}x)$ Resp.: $y' = \cot x$

30. $y = \tan(x^2 + 1)$ Resp.: $y' = 2x\sec^2(x^2 + 1)$

31. $f(t) = \left(\dfrac{7t + 1}{2t^2 + 3}\right)^3$ Resp.: $f'(t) = \dfrac{3(7t + 1)^2(-14t^2 - 4t + 21)}{(2t^2 + 3)^4}$

32. $y = \dfrac{3\sec^2 x}{x}$ Resp.:$y' = \dfrac{6x\sec^2 x\tan x - 3\sec^2 x}{x^2}$

33. $y = \cos(\pi/2 - x)$ Resp.: $y' = \text{sen}(\pi/2 - x)$

34. $y = \sqrt{5x^3} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x^4}}$ Resp.$y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{5x^2} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$

35. $y = \cot^4(2x - 3)^2$ Resp.: $y' = -16(2x - 3)\cot^3(2x - 3)^2\text{cossec}^2(2x - 3)^2$

36. $f(s) = \dfrac{3}{2}\pi$ Resp.: $f'(s) = 0$

37. $y = \dfrac{\tan x}{x}$ Resp.: $y' = \dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

38. $f(s) = \dfrac{1}{(s^2 - s + 4)^3}$ Resp.: $f'(s) = -\dfrac{3(2s-1)}{(s^2 - s + 4)^4}$

39. $f(t) = \dfrac{1}{\cos\theta} + 2t + \theta$ Resp.: $f'(t) = 2$

40. $y = \arctan[(2x-1)^{10} + 2]^{1/2}$ Resp.: $y' = \dfrac{10(2x-1)^9}{\sqrt{[(2x-1)^{10} + 2]^3}}$

15. Encontre a derivada das funções implícitas a seguir.

a. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ b. $xy - \cos y = 0$

c. $3x^2 + 5xy^2 - xy + x - 7 = 0$ d. $2x^2y + e^{x+y} + \ln x = 0$

e. $\arctan(y) + x^2 - 12xy = 0$ f. $x^3y^2 + 3\text{sen}y + \dfrac{1}{y} = 0$

16. Encontre as equações das retas tangente e normal à curva $x^2 + \dfrac{y}{2} - 1 = 0$ no ponto $P(-1, 0)$.

17. Obter a derivada de ordem n das seguintes funções.

a. $y = 3x^4 + 6x^2 - 12x; \quad n = 3$ b. $y = e^{3x^2}; \quad n = 2$

c. $y = x^2 + \ln 2x; \quad n = 2$ d. $y = \cos 3x; \quad n = 4$

e. $y = \text{sen}x; \quad n = 1000$ f. $y = e^x + \cos x; \quad n = 1000$

18. Dada a função $y = 2x^2 - 4x + 9$, obter e interpretar dy quando x varia de de 2 a $2,05$.

19. Usando o conceito de diferencial encontrar $\sqrt{35}$.

20. Encontrar a diferencial de segunda ordem das funções:

a. $y = -x(x^2 + 2)$ b. $y = e^{-x}$

c. $y = (x-4)(x+3)$ d. $y = \cos^2 x$

Capítulo 4

Aplicações de Derivadas

Há muitas aplicações do conceito de derivada, as quais certamente um curso introdutório de Cálculo não daria conta. A seguir são apresentadas algumas aplicações no estudo de funções e em problemas de otimização.

4.1 Taxas de variação

Seja $y = f(x)$ uma função real com domínio D. De um modo geral:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

corresponde a taxa média de variação de y em relação a x. Também:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

corresponde a taxa instantânea de variação.

Assim na Física:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \Rightarrow \text{velocidade média}$$

e

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \Rightarrow \text{velocidade instantânea}$$

Exemplo 4.1 Aplicação em Economia: funções Custo. Seja U uma utilidade qualquer e q a quantidade produzida, possivelmente $q_1 \leq q \leq q_2$, o custo total é dado pela função: $C = f(q)$, a qual pode assumir uma forma linear ou não linear. (Base: Chiang, cap. 7)

a. $C = \underbrace{5,15}_{CF} + \underbrace{0,92q}_{CV}$ com $0 \leq q \leq 10$;

b. $C = \underbrace{4q^3 - 40q^2 + 200q}_{CV}$ com $0 \leq q \leq 10$;

sendo que C correponde ao custo total associado à produção q, CF é o custo fixo (independe da quantidade produzida) e CV é o custo variável (depende de q).

Também temos:

$$C_M = \frac{C}{q} \Rightarrow \text{Custo Médio Total}$$

$$CF_M = \frac{CF}{q} \Rightarrow \text{Custo Médio Fixo}$$

$$CV_M = \frac{CV}{q} \Rightarrow \text{Custo Médio Variável}$$

Desse modo, CV_M representa a taxa média de variação da função custo entre 0 e q unidades. Agora se fizermos $C' = f'(q) = C_{Mg}$ temos a função custo marginal, ela nos dá a variação no custo total para uma variação unitária na produção, ou ainda, a taxa instantânea do Custo Total, quando a produção passa de q para $q + 1$.

Exemplo 4.2 O Custo total associação à produção q de um bem, em reais, é dado pela função $C = 20 + 4q$, com $0 \leq q \leq 200$. Esboce o gráfico das funções C, CF e CV. Ao nível $q = 50$, calcule C_M, CF_M, CV_M e C_{Mg}.

De modo análogo temos aplicações em outras áreas como Agronomia, Biologia etc.

4.2 Estudo de funções

4.2.1 Pré-requisitos: Teoremas

Teorema 4.1 Teorema do valor médio. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Observação:

i. O ponto c pode não ser único;

ii. O Teorema 4.1 garante que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $Q(c, f(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $P_1(a, f(a))$ e $P_2(b, f(b))$.

iii. Caso particular: se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos então existe uma raiz de f em (a, b).

Teorema 4.2 Teorema de Cauchy. Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

Observação: O Teorema 4.1 é um caso particular do Teorema 4.2, basta fazer $g(x) = x$.

Exemplo 4.3 Considere a função $y = x^2$. Verifique se a função satisfaz ao teorema do valor médio, considere $I = [2, 4]$.

Teorema 4.3 Teorema de Rolle. Seja $y = f(x)$ uma função contínua em em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Observações:

i. O ponto c pode não ser único;

ii. O Teorema 4.3 permanece válido se $f(a) = f(b) = 0$.

Demonstração:

Exemplo 4.4 Verifique se a função $y = x - x^3$, com $x \in [-1, 1]$ satisfaz ao Teorema de Rolle e encontre c tal que $f'(c) = 0$.

4.2.2 Monotonicidade

Vimos que para um um intervalo (a, b) do domínio de uma função real $y = f(x)$ se:

a) $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) < f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente crescente em (a, b);

b) $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$ com $x_1 < x_2$ se verifique $f(x_1) > f(x_2)$, então $y = f(x)$ é uma função estritamente decrescente em (a, b);

O estudo da monotonicidade por ser feito com auxílio do Teorema:

Teorema 4.4 Seja Seja $y = f(x)$ uma função contínua em em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), se:

i. $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (a, b)$ então $y = f(x)$ é uma função estritamente crescente em $[a, b]$;

ii.$f'(x) < 0\ \forall\ x \in (a, b)$ então $y = f(x)$ é uma função estritamente decrescente em $[a, b]$.

Demonstração para i

Observação: O Teorrema 4.4 pode ser reescrito substituindo nos itens i e ii as condições $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ por $f'(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0$, respectivamente. Nesse caso teríamos:

i. $f'(x) \geq 0\ \forall\ x \in (a, b)$ então $y = f(x)$ é uma função crescente em $[a, b]$;

ii. $f'(x) \leq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$ então $y = f(x)$ é uma função decrescente em $[a, b]$.

Exemplo 4.5 Nas funções a seguir, faça um estudo de sua monotonicidade nos intervalos indicados.

a. $y = x^2 - 5x + 6$ em $I = \mathbb{R}$

b. $y = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ em $I = \mathbb{R}$

c. $y = \text{sen}(x)$ em $I = [-\pi/2, \pi/2]$

4.2.3 Extremos Relativos: máximos e mínimos

Definição 4.1 Se c é um ponto do domínio de uma função $y = f(x)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $\nexists f'(c)$ então c é chamado de ponto crítico da função.

Exemplo 4.6 Encontre um ponto crítico da função $y = x^2 - 5x + 6$.

Definição 4.2 Seja c um ponto do domínio da função $y = f(x)$ então:

i. $f(c)$ é chamado de máximo relativo de $f(x)$ (ou máximo local) se existir um intervalo aberto contendo c tal que: $f(c) \geq f(x)\ \forall\ x \in (a, b)$;

ii. $f(c)$ é chamado de mínimo relativo de $f(x)$ (ou mínimo local) se existir um intervalo aberto contendo c tal que: $f(c) \leq f(x)\ \forall\ x \in (a, b)$.

Teorema 4.5 Se uma função tem extremo relativo em c, então c é um ponto crítico da função.

Observação: A recíproca desse Teorema nem sempre é verdadeira.

Teorema 4.6 Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), exceto possivelmente em c, tal que c seja um ponto crítico de $f(x)$ então:

i. Se $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (a, c)$ e $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (c, b)$, então $f(x)$ tem um máximo local em c;

ii. Se $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (a, c)$ e $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (c, b)$, então $f(x)$ tem um mínimo local em c;

Exemplo 4.7 Encontre os extremos relativos da função $y = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

Exemplo 4.8 Faça um estudo da função $y = x^2(x-1)^2$ quanto à monotonicidade e extremos relativos.

Teorema 4.7 Critério da 2^a derivada. Considere $f(x)$ uma função derivável em (a,b) e c um ponto crítico dessa função $[f'(c) = 0]$. Se $f(x)$ admite 2^a derivada em (a,b) então:

i. $f''(c) < 0$ então $f(x)$ tem um máximo relativo em c;

ii. $f''(c) > 0$ então $f(x)$ tem um mínimo relativo em c;

Exemplo 4.9 Aplique o teste da segunda derivada para o estudo dos extremos relativos da função $y = x^2(x-1)^2$.

4.2.4 Concavidade e Pontos de inflexão

Definição 4.3 Concavidade. Seja $f(x)$ uma função diferenciável no ponto c. Diz-se que o gráfico da função é côncavo para cima no ponto $P(c, f(c))$ se existir um intervalo aberto contendo c, $(a < c < b)$, tal que em (a, b) a curva do gráfico está acima da reta tangente ao gráfico em P.

Ilustração:

De modo similar, o gráfico da função é côncavo para baixo no ponto $P(c, f(c))$ se existir um intervalo aberto contendo c, $(a < c < b)$, tal que em (a, b) a curva do gráfico está abaixo da reta tangente ao gráfico em P.

Definição 4.4 Ponto de inflexão. Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função é chamado de ponto de inflexão desse gráfico se em P houver uma mudança de concavidade.

Os dois teoremas apresentados a seguir podem ser usados para o reconhecimento de pontos de inflexão de uma função, caso existam.

Teorema 4.8 Se uma função tem em $P(c, f(c))$ um ponto de inflexão, então c é um ponto crítico de $f'(x)$, isto é $f''(c) = 0$ ou $\nexists f''(c)$.

Teorema 4.9 Seja uma função $y = f(x)$ que admita segunda derivada em (a, b). Se para todo $x \in (a, b)$:

i. $f''(x) > 0$ então o gráfico é côncavo para cima em (a, b);

ii. $f''(x) < 0$ então o gráfico é côncavo para baixo em (a, b);

Teorema 4.10 Seja uma função $y = f(x)$ que admita segunda derivada em (a, b) e seja c um ponto crítico de $f'(x)$, então:

i. Se $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, c)$ e $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (c, b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $y = f(x)$;

ii. Se $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (a, c)$ e $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (c, b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $y = f(x)$;

Exemplo 4.10 Fazer um estudo da função $y = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ quanto à concavidade e pontos de inflexão.

4.2.5 Estudo Completo de uma função

Definição 4.5 Com base nos fundamentos vistos até agora podemos realizar um estudo completo de uma função. Nesse curso, por estudo completo de uma função entendemos:

1. Determinar seu domínio e conjunto imagem;
2. Encontrar os pontos de intercepção com o eixos cartesianos (caso existam);
3. Estudar a paridade da função e identificar, quando possível, eixo de simetria da função;
4. Estudar a monotonicidade da função, pontos críticos e extremos relativos;
5. Encontrar as assintotas horizontais e verticais do gráfico da função (caso existam);
6. Estudar o gráfico da função quanto à concavidade e pontos de inflexão;
7. Esboço do gráfico.

   Observações:

- i. O gráfico de uma função par tem o eixo y como eixo de simetria enquanto que uma função ímpar tem seu gráfico simétrico em relação à origem;
- ii. As funções polinomiais, via de regra, não possuem assíntotas.

Exemplo 4.11 Realizar um estudo completo da função:$y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$.

4.3 Teoria da Otimização

Há diversas aplicações nas Ciências em que se tem como meta maximizar algo (lucro, espaço, produção etc) ou minimizar algo (custo, material, tempo etc). Os processos em que buscam a maximização ou minimização podem ser chamados genericamente de Otimização $\Rightarrow$ "buscar o ótimo". Um problema de otimização envolve basicamente:

i. Uma função que descreva (traduza) matematicamente o problema em estudo;

ii. Um conjunto de Variáveis composta por uma variável dependente que representa o "objeto" a ser maximizado ou minimizado; uma ou mais variáveis independentes que são variáveis escolhidas com vistas à otimização;

iii. Determinação do valor (ou conjunto de valores) das variáveis escolhidas que geram o extremo da função.

Exemplo 4.12 Com uma folha de cartolina quadrada de lado 48 cm deseja-se fazer uma caixa (sem tampa), cortando-se de cada um de seus quatro cantos quadradinhos iguais e dobrando-se adequadamente o material restante. Determinar a medida do lado dos quadradinhos que devem ser cortados a fim de que o volume da caixa seja o maior possível.

Exemplo 4.13 (Adaptado de Chiang, pág. 229) Suponha que na produção de um insumo agrícola, a função receita total seja dada por $R_T = 1000q - 2q^2$ com $0 < q < 500$. A função custo total é dada por $C_T = q^3 - 59q^2 + 1315q + 2000$. Com R_T e C_T medidos em reais, enquanto q é em toneladas por semana. Encontre o nível de produção $\bar{q}$ que torna máximo o lucro. Calcule esse lucro.

4.4 Polinômio de Taylor

Definição 4.6 Polinômio de Taylor. Seja $y = f(x)$ uma função real que admita derivadas até de ordem k em um ponto x_0 do seu domínio D. O polinômio de Taylor de ordem k da função f no ponto x_0 é dado por:

$$P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{4.1}$$

Exemplo 4.14 Obtenha a expansão em polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = e^x$ no ponto $x = 0$. Como se chama essa série?

Observações:

i. Uma vez obtida a expansão em série de Taylor podemos escrever: $f(x) = P_k(x) + R_k(x)$, sendo $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$ chamado de "resto", muitas vezes, quando a aproximação é "boa" ele é desprezível.

ii. No *software Maple* use o seguinte código para obter a expansão da função em Taylor: $taylor(f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}, k = 3)$.

4.4.1 Método de Newton-Raphson para o cálculo da raiz de uma função

Definição 4.7 Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Vamos admitir que $f(x)$ tenha uma raiz x_* em $[a, b]$ e que $f'(x)$ $[f'(x) \neq 0]$ e $f''(x)$ também sejam contínuas em (a, b). Uma aproximação para a raiz x_* pode ser obtida pelo método numérico denominado Newton-Raphson, a partir da expansão da função em um polinômio de Taylor de grau 1 (4.1) ao redor de um ponto arbitrário x_0.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \simeq 0$$

$$x^{(1)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

$$\vdots$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \tag{4.2}$$

Um valor arbitrário x_0 é atribuído e obtemos $x^{(1)}$, a seguir, sucessivamente os valores são atualizados por meio da equação 4.2 até que se obtenha uma diferença desprezível. Critério de parada: $\mid x^{(n+1)} - x^{(n)} \mid < \epsilon$.

Exemplo 4.15 Calcular a raiz da função: $f(x) = 2x^3 + ln(x) - 5$.

```
 x0=1.5
 x=NULL
 x[1]=1.34
 mf=function(x) 2*x^3+log(x)-5
 md=function(x) 6*x^2+1/x
 niter=5
 for(i in 2:niter) x[i]=x[i-1] - mf(x[i-1])/md(x[i-1])
 cbind(seq(1,niter,1),x)
              x
[1,] 1 1.340000
[2,] 2 1.330896
[3,] 3 1.330840
[4,] 4 1.330840
[5,] 5 1.330840
```

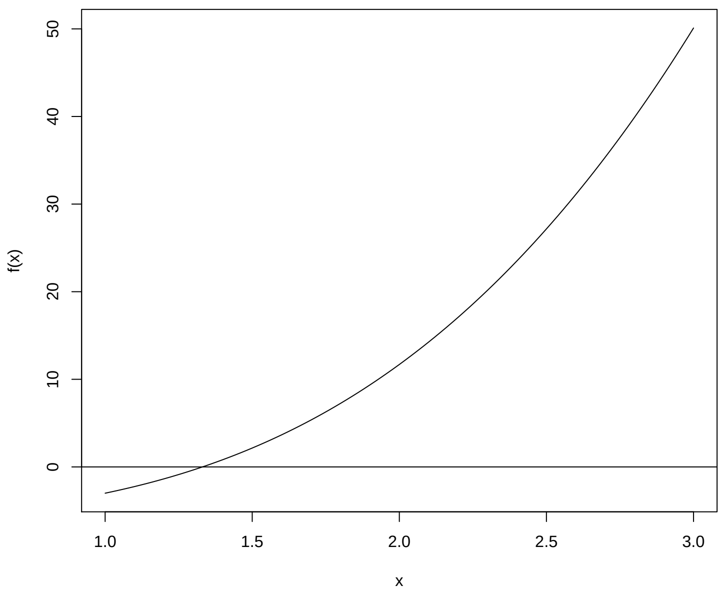

Figura 4.1: Gráfico da função $f(x) = 2x^3 + ln(x) - 5$.

4.5 Regra de L'Hospital

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis em (a, b), exceto possivelmente em $c \in (a, b)$, com $g'(x) \neq 0$. Se:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Observação: Esse resultado auxilia no cálculo de limites para várias formas indeterminadas, desde que possam ser escritas nas formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo 4.16 Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln(x)$.

4.6 Exercícios

1. Use o conceito de diferencial para aproximar o crescimento da área da superfície esférica de um balão se seu diâmetro varia de 2 m para 2,02m, sabendo-se que a área de superfície é dada por $A = 4\pi r^2$.

2. Verifique se as funções abaixo satisfazem às condições do Teorema do Valor Médio e do Teorema de Rolle.

   a.
   $$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}, \quad \text{se } x \in [0,4]$$

   b.
   $$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \in [-3,2); \\ -x+7, & \text{se } x \in [2,7]. \end{cases}$$

3. (Apostol, 1983) Seja $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca se anula no intervalo $[-1,1]$. Como isso é possível, em face do Teorema de Rolle?

4. Obter a expansão de cada uma das funções a seguir, em polinômio de Taylor de grau n, ao redor do ponto x_0.

   a. $f(x) = \ln(x)$, considere $n = 2$ e $x_0 = 3$;

   b. $f(x) = \sqrt{x}$, considere $n = 3$ e $x_0 = 4$;

   c. $f(x) = \cos(x)$, considere $n = 4$ e $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5. Use o método de *Newton* para encontrar ao menos uma raiz real das funções a seguir. Considere $\epsilon = 0,0001$.

   a. $f(x) = 2x - \sin(x) + 4$ b. $f(x) = 10^x + x^3 + 2$.

6. Faça um estudo das funções abaixo, quanto à monotonicidade e extremos relativos.

   a. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ b. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

   c. $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$ d. $f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$

   e. $f(x) = x - \ln(1+x)$ f. $f(x) = e^x \sin(x), x \in [0, 2\pi]$

7. Demonstre que se $y = \cos(x)$ então suas raízes são também seus pontos de inflexão.

8. Faça um estudo das funções abaixo, quanto à concavidade e pontos de inflexão.

   a. $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$ b. $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$

   c. $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$ d. $f(x) = (1 + x^2)e^x$

   e. $f(x) = x^2 \ln(x)$ f. $f(x) = e^{-x}\cos(x), x \in [0, 2\pi]$

9. Faça um estudo completo das funções a seguir.

   a. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b. $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$

   c. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+3}$ d. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

   e. $f(x) = x^2e^x$ f. $f(x) = -x + \tan(x), x \in [0, 2\pi]$

10. Considere a função do 2^o grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Demonstre que o extremo relativo desta função é dado pelas coordenadas do vértice da parábola, $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\triangle}{4a}\right)$. Prove, também, que a função não tem pontos de inflexão.

11. O Custo variável médio de produção de um certo bem é de R\$12,00 e o custo fixo é de R\$60,00 para quantidades que variam entre 0 e 1000 unidades. Se o preço de venda na mesma faixa é de R\$20,00. Estabeleça:

    a. A função Custo Total, função Receita e função Lucro;

    b. O custo marginal (interprertá-lo);

    c. A produção necessária para que o Lucro seja de R\$3.940,00

12. Considere as funções Receita Total, $R = 8q - \frac{1}{5}q^2$ e Custo Total $C = 12 + 1,6q$ de um insumo agrícola (valores em 1000 reais). Considere também que a quantidade produzida (em toneladas) pertença ao intervalo $0 \leq q \leq 40$.

    a. Encontre a função Custo marginal e interprete-a;

    b. Encontre o nível de produção q que possibilita o maior lucro;

    c. Esboce no mesmo eixo os gráficos das funções: Receita Total, Custo Total e Lucro e estabeleça os intervalos de produção que geram prejuízos.

13. (Apostol, 1983) Um agricultor dispõe de L metros de rede para cercar uma pastagem de forma retangular, adjacente a uma longa parede de pedra. Que dimensões darão a área máxima da pastagem?

14. (Apostol, 1983) Um agricultor deseja cercar uma pastagem retangular de área A, adjacente a uma longa parede de pedra. Quais as dimensões convenientes de modo a gastar o menos possível de rede?

15. A função Custo total de um monopolista é $C = 3q + 65$, para $0 \leq q \leq 100$. A função demanda de mercado é dada por $Qd = 100 - 5P$. Admita, nesse caso, que a função receita é de preço variável. Estabeleça:

    a. O menor valor de q para um lucro total de R$265,00 e o respectivo preço de venda;

    b. O nível de produção que maximiza o lucro e seu respectivo preço de venda.

16. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais. Prove que a função $d = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ é mínima somente quando a corresponde a média aritmética dos n números reais.

17. (Flemming e Gonçalves, 2007) Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α. Seja L o alcance do canhão, dado por $L = \dfrac{2v^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, em que v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

18. (Flemming e Gonçalves, 2007) O gráfico da função $C(q) = kq^{\frac{1}{\alpha}} + F$, com $q \in [q_0, q_1]$, sendo k, α e F constantes positivas é denominado curva de custos a curto prazo de Cobb-Douglas. Essa curva é bastante utilizada para representar os custos de uma empresa com a produção de um produto.

    a. Dê o significado da constante F;

    b. Verificar que, quando $\alpha > 1$, a curva é côncava para baixo e interpretar esse resultado do ponto de vista da Economia;

    c. Supor $k = 2$, $\alpha = 3$, $F = 8$ e determinar, se existir, o valor de q que fornece o custo médio mínimo;

    d. Usando os mesmos valores do item c, determinar o nível de produção que minimiza o custo marginal, no intervalo $125 \leq q \leq 125.000$.

19. Demonstre o limite fundamental exponencial, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, usando o Regra de L'Hospital.

20. Encontrar os limites das funções:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$	b. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$
c. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^3\ln x$	d. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x)$
e. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$	f. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)\tan(2x)$
g. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$	h. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(3x+9)^{\frac{1}{x}}$

Capítulo 5

Teoria da Integração e aplicações

Na história da Matemática os problemas referentes ao cálculo de áreas de figuras não retangulares são bastante remotos e precedem a ideia de derivadas. Na Grécia antiga usava-se o método da "exaustão" para se aproximar a área de uma figura qualquer, muito antes de se pensar no conceito de derivadas. Este método é a base para interpretação geométrica da técnica da integração (integral de Riemann), objeto de estudo deste capítulo. A teoria da integração não serve apenas para se calcular áreas e volumes, há uma infinidade de aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento. Logicamente, a sequência de tópicos sobre limites, derivadas e integral é bem mais didática e, por isso, está sendo usada neste texto. Para maiores detalhes sobre registros históricos do Cálculo Diferencial e Integral ver Apostol (1980).

5.1 Integral indefinida

Considere o seguinte tipo de problema: dada a derivada de uma função $f(x)$, deseja-se encontrar a sua primitiva, ou seja, a função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Podemos pensar nesta situação como um problema inverso ao processo de derivação. Assim, se $f(x) = x^3$, tem-se que $F(x) = \frac{x^4}{4}$. No entanto, também seria solução qualquer função da família $F(x) = \frac{x^4}{4} + c$, com $c \in \mathbb{R}$.

Definição 5.1 Antiderivada ou função primitiva. Uma função $F(x)$ é chamada de antiderivada da função $f(x)$ em (a, b) se $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in (a, b)$. Se $F(x)$ é uma antidervada de $f(x)$ em (a, b), então sua antiderivada mais geral é a família de funções $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$.

Definição 5.2 Integral indefinida. Se $F(x)$ é uma antiderivada da função $f(x)$, então a família de funções $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$, é chamada de integral indefinida da função $f(x)$ e denota-se:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Resumindo: desejamos encontrar a família de funções $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$, para uma determinada diferencial de função $dy = f(x)dx$. Quando a antiderivada for facilmente identificada, a solução da integral será imediata (função primitiva). A seguir apresenta-se algumas integrais e suas respectivas antiderivadas.

1. $\displaystyle\int dx = x + c$
2. $\displaystyle\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \ (m \neq -1)$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
6. $\displaystyle\int \mathrm{sen}(x)dx = -\cos(x) + c$
7. $\displaystyle\int \cos(x)dx = \mathrm{sen}(x) + c$
8. $\displaystyle\int \sec^2(x)dx = \mathrm{tg}(x) + c$
9. $\displaystyle\int \mathrm{cossec}^2(x)dx = -\mathrm{cotg}(x) + c$
10. $\displaystyle\int \sec(x)\mathrm{tg}(x)dx = \sec(x) + c$
11. $\displaystyle\int \mathrm{cossec}(x)\mathrm{cotg}(x)dx = -\mathrm{cossec}(x) + c$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x) + c$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsen}(x) + c$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{arcsen}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arcsec}(x) + c$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}\,| + c$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{a-x}{a+x}\Big| + c$
19. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \mathrm{sen} x \cos x) + c$
20. $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \mathrm{sen} x \cos x) + c$

Exercício. Mostre que as funções $F(x) + c$ acima são antiderivadas para as respectivas funções $f(x)$.

Definição 5.3 Propriedades das integrais

a. $\displaystyle\Big[\int f(x)dx\Big]' = \Big[F(x) + c\Big]' = f(x)$

b. $\displaystyle\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$

c. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, k \in \mathbb{R}^*$

d. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(este resultado se estende para um número finito de funções)

5.1.1 Técnicas de integração

Nem sempre identificamos "facilmente" a função primitiva. Para situações mais complexas recorremos às técnicas de integração simples.

5.1.1.1 Integral por substituição

Suponha que se deseja calcular a integral simples $\displaystyle\int f(x)dx$, mas $F(x)$ não é explícita. A ideia desta técnica é "tentar" uma substituição conveniente que possibilite identificar a antiderivada da função, após as devidas trocas. Genericamente, tem-se, que se:

$$x = g(t) \qquad \Rightarrow \qquad dx = g'(t)dt$$

Então:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

Exemplo 5.1 Resolver as integrais a seguir.

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

b. $\int \text{sen}(2x+1)dx$

c. $\int \text{tag}(x)dx$

d. $\int \operatorname{sen}^3(x)dx$

e. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

f. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

g. $\displaystyle\int \frac{xdx}{1 - x^2}$

h. $\int x^{-2}\text{sen}(1/x)dx$

5.1.1.2 Integrais de funções contendo trinômio

Esta técnica de integração pode ser útil em integrais de dois tipos básicos.

Caso 1. Integrais na forma

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Neste caso, a ideia é completar o trinômio do denominador tornando-o quadrado perfeito, de tal forma a obter uma soma ou diferença de dois quadrados.

Exemplo 5.2 Calcular a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

Caso 2. Integrais na forma

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Exemplo 5.3 Calcular a integral $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-2x-5}}dx$.

5.1.1.3 Integrais por partes

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções reais da variável x, a integral por partes é definida por:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Demonstração:

Exemplo 5.4 Calcular as integrais a seguir.

a. $\displaystyle\int \frac{x\text{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

b. $\displaystyle\int xe^x dx$

c. $\displaystyle\int x^5 \ln x dx$

d. $\int x \cos x dx$

e. $\int \ln x dx$

f. $\int \text{arctg} x dx$

h. $\int e^x \cos x dx$

5.1.1.4 Integrais de funções racionais

Suponha que se deseje integrar a função $\frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções polinomiais, de graus m e n, respectivamente. Se $m < n$ a função racional é chamada de própria, caso contrário é chamada de imprópria. Toda função racional imprópria pode ser decomposta numa soma de um polinômio com uma função racional própria. A integração de polinômios é elementar e sendo assim, a dificuldade está em integrar as funções racionais próprias. A ideia desta técnica é escrever a "fração própria" como uma soma de "frações parciais", de tal forma que:

i. Cada raiz (a) do denominador da função racional própria contribui com uma fração do tipo:

$$\frac{A}{x-a}$$

ii. Se a raiz (a) do denominador da função racional própria tem multiplicidade k, então as frações parciais serão do tipo:

$$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)}$$

iii. Se a função do denominador apresentar raízes complexas, deve-se observar que elas aparecem em pares conjugados que dão origem a polinômios do tipo: x^2+px+q. Então as raízes complexas conjugadas dão origem a uma fração parcial do tipo:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Exemplo 5.5 Calcular as integrais a seguir.

a. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}dx$

b. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}dx$

c. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-5x+14}dx$

5.1.1.5 Integrais de funções irracionais

No caso de integrais que envolvam funções irracionais, uma substituição do radicando por:

$$R(x) = t^q$$

em que $q = \text{m.m.c}\,\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, em geral, fornece uma função racional.

Exemplo 5.6 Resolver a integral $\displaystyle\int \frac{x}{3+\sqrt{x}}dx$

5.2 Exercícios

1. Determinar a função $f(x)$ tal que $\int f(x)dx = 3x^2 + e^x + \cos(3x) + c$

2. Calcular as seguintes integrais

1. $\int (3-\sqrt{x}+x)dx$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	27. $\int \frac{dx}{4x+5}$
2. $\int e^{-10x}dx$	15. $\int x\ln x dx$	28. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-1}dx$
3. $\int (\frac{2}{x}-x+4)dx$	16. $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$	29. $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$
4. $\int e^{-(x-8)^3}(x-8)^2dx$	17. $\int \frac{dx}{x^3+8}$	30. $\int \sqrt{\frac{\text{arcsen}(x)}{1-x^2}}dx$
5. $\int 3^{2x+1}dx$	18. $\int xe^{-2x}dx$	31. $\int \frac{x\ \text{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$
6. $\int \text{sen}(3x+1)dx$	19. $\int xe^{-2x^2}dx$	32. $\int e^x \text{sen} x dx$
7. $\int x\cos(2x^2-7)dx$	20. $\int \frac{\text{sen}(x)dx}{(3-\cos(x))^2}$	33. $\int \frac{x^3-3x+4}{(x+1)(x-1)^3}dx$
8. $\int x\sqrt{1-3x^2}dx$	21. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$	34. $\int \frac{x^3-x^2+2x+3}{x^2+3x+2}dx$
9. $\int (x^{10}-x^5+4)^3(2x^9-x^4)dx$	22. $\int \cos^3 x dx$	35. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$
10. $\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$	23. $\int x\sqrt{x+1}dx$	36. $\int \frac{3+\ln(x)}{x}dx$
11. $\int (x^{-3/2}-4x^{-3}+2)dx$	24. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$	37. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$
12. $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	25. $\int \frac{x-3}{(x+1)^2(x-2)}dx$	38. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$
13. $\int \cos^2 dx$	26. $\int \text{sen}^2 dx$	39. $\int \text{sen}^3 dx$

5.3 Integral Definida

5.3.1 Ideia básica

A integral $\int f(x)dx = F(x) + c$ é uma função da variável x e, portanto, é classificada como integral indefinida. Entretanto, sendo $f(x)$ integrável, se selecionarmos dois pontos a e b do domínio da função ($a < b$) e efetuarmos:

$$[F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$$

obtém-se um valor que independe da constante c. Este valor é chamado de integral definida da função $f(x)$ no intervalo de a até b.

Exemplo 5.7 Dada a função $f(x) = x^2 + 1$. Verifique se $f(x)$ é integrável em $I = [1, 3]$.

Exemplo 5.8 Dada a função $f(x) = -\frac{1}{x^2}$. Verifique se $f(x)$ é integrável em $I = [0, 2]$.

Observação: é importante que a função $f(x)$ seja integrável num determinado intervalo real. O Teorema a seguir é útil para tal propósito.

Teorema 5.1 Se $y = f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$ então ela é integrável no intervalo $[a, b]$.

Definição 5.4 Seja $y = f(x)$ uma função real definida no intervalo $[a, b]$, a integral definida de $y = f(x)$ de a até b é definida por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

se esta integral existe dizemos que $f(x)$ é integrável em $[a, b]$.

5.3.2 Interpretação geométrica

Seja $y = f(x)$ uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$. Suponha que se deseja calcular a área A, limitada pelo gráfico da função, pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o pelo eixo Ox.

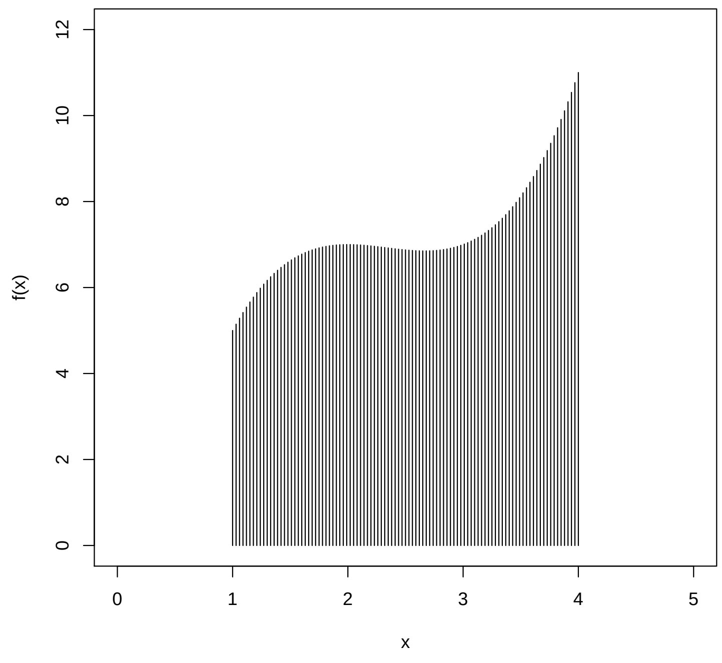

Figura 5.1: Região limitada pela função $y = f(x)$ e o eixo Ox

Historicamente o método utilizado para o cálculo desta área A era o da exaustão. Para tanto, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n partes:

$$\underbrace{x_0}_{a} < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < \underbrace{x_n}_{b}$$

Considere $h_i = x_i - x_{i-1}$ a amplitude de cada intervalo e seja também m_i e M_i o menor e o maior valor assumido pela função, respectivamente, em cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Formemos as somas:

$$Sn^- = \sum_{i=1}^{n} h_i m_i \qquad \text{e} \qquad Sn^+ = \sum_{i=1}^{n} h_i M_i$$

Estas somas correspondem as somas das áreas dos retângulos inscritos e circunscritos e são aproximações para a verdadeira área A por falta ou por excesso. Se agora, tomarmos em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ um ponto arbitrário $\bar{x}_i$ e formarmos a soma:

$$Sn = f(\bar{x}_1)h_1 + f(\bar{x}_2)h_2 + \dots f(\bar{x}_n)h_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)h_i \tag{5.1}$$

chamada de soma de Riemann. Façamos $n \to \infty$. Se à medida que $n \to \infty$ Sn tende a um número I, dizemos que a soma (5.1) é Riemann integrável o limite I é a integral definida da função $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$, ou seja:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)h_i \tag{5.2}$$

Assim, geometricamente a integral da equação (5.2) representa a área A entre a curva do gráfico da função e o eixo Ox, sendo que esta área é contada positivamente conforme a região esteja acima ou abaixo do eixo Ox.

Observação Se $y = f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, a área limitada entre a curva do gráfico da função e o eixo Ox é:

i. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, se $f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in [a, b]$

ii. $\displaystyle|\int_a^b f(x)dx\ |$, se $f(x) < 0 \quad \forall \ \ x \in [a, b]$

Exemplo 5.9 Calcular a área limitada pela parábola da função $y = x^2 - 5x + 6$ e as retas $x = 0$ e $y = 0$.

Exemplo 5.10 Calcular a área limitada pela parábola da função $y = -4 + x^2$ e o eixo Ox.

Exemplo 5.11 Calcular as integrais definidas a seguir.

a. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \text{tag}^3 x \sec^2 x \, dx$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx$

Definição 5.5 Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais integráveis em $[a, b]$, são definidas e válidas as seguintes propriedades:

P1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$

P2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

P3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k.\int_a^b f(x)\, dx$, com $k \in \mathbb{R}^*$

P4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$, se $f(x) \geq g(x)$

P5. $\displaystyle\mid \int_a^b f(x)\, dx \mid \leq \int_a^b \mid f(x) \mid \; dx$

P6. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$, $a < c < b$

Teorema 5.2 : Do valor médio para integral definida. Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a).f(c)$$

Prova: Omitida.

Exemplo 5.12 Retome o exemplo 5.9 e encontre c para o qual o teorema acima é satisfeito.

Teorema 5.3 : Fundamental do Cálculo. Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e, $F(x)$ uma primitiva (antiderivada) de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Prova: como exercício.

Exemplo 5.13 Calcular as integrais

a. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x(1 + x^2)\,dx$

b. $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^3 - 4x^2 + 1)\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Teorema 5.4 : para funções pares e ímpares. Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[-a, a]$, então:

i. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2.\int_0^a f(x)\,dx$ se $f(x)$ é uma função par;

ii. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ se $f(x)$ é uma função ímpar;

Prova: como exercício.

Exemplo 5.14 Calcular as integrais

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$

Teorema 5.5 : área entre curvas. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas e positivas no intervalo $[a,b]$ tal que $f(x) > g(x), \quad \forall \quad x \in [a,b]$ então a área A limitada entre as curvas das duas funções é dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Prova: como exercício.

Exemplo 5.15 Calcular a área da região do plano cartesiano em que $f(x) > g(x)$, sendo $f(x) = -x^2 + 4$ e $g(x) = x + 2$.

Exemplo 5.16 Calcular a área limitada pela curva da parábola $y = x^2 - 7x + 10$ e os eixos coordenados.

Exemplo 5.17 Calcular a área da região do primeiro quadrante do plano cartesiano, limitada pelas curvas das funções $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = \frac{1}{4}x$.

5.3.3 Aplicação: volume de um sólido de revolução

Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $[a, b]$. Vamos considerar a rotação da região plana A ao redor do eixo x, como consequência obtemos um sólido de revolução. Veja, por exemplo a Figura a seguir.

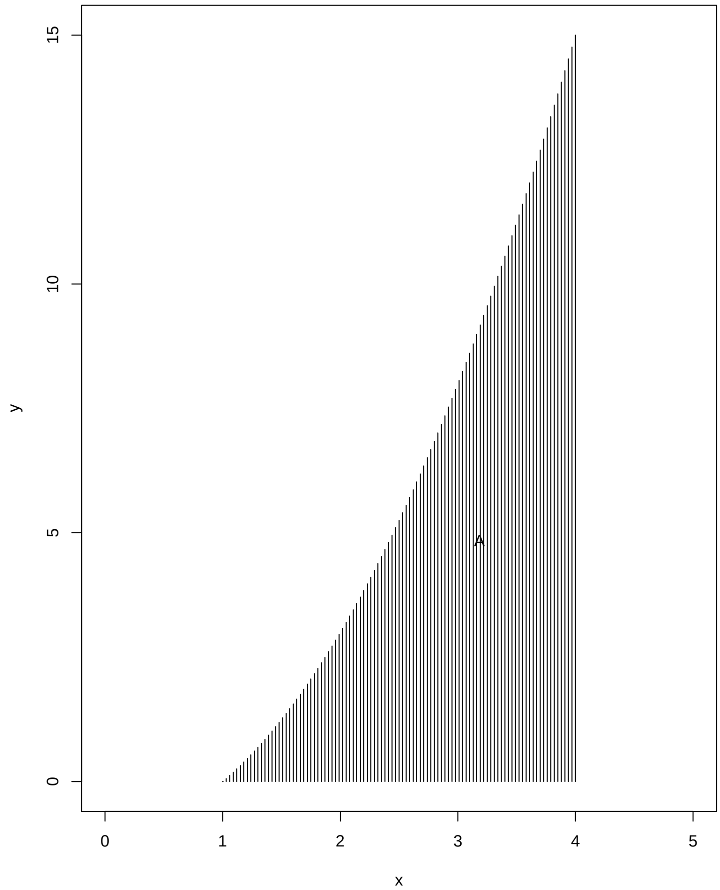

Figura 5.2: Região plana A, limitada pelo gráfico da função $y = x^2 + 1$ e o eixo Ox, no intervalo [1,4].

Para obter o volume V procedemos de modo análogo ao cálculo da área, ou seja, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes:

$$\underbrace{x_0}_{a} < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < \underbrace{x_n}_{b}$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a amplitude de cada subintervalo. Tomemos um ponto arbitrário, $\bar{x}_i$, em cada um dos subintervalos. O volume V é dado pelas somas dos volumes dos n cilindros:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\bar{x}_i)]^2 \Delta x_i$$

Façamos $n \to \infty$. Se à medida que $n \to \infty$ V se aproxima de um número I, dizemos que esta soma (5.3) é Riemann integrável e o limite I é o volume do sólido de revolução delimitado pelo intervalo $[a, b]$, ou seja:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\bar{x}_i]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{5.3}$$

Exemplo 5.18 Calcular o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região A limitada pelo gráfico da função $y = x^2$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$ ao redor do eixo x.

Observações:

i. O resultado permanece válido mesmo que $f(x)$ assuma valores negativos.

$$V = \pi \int_a^b \mid f(x) \mid^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

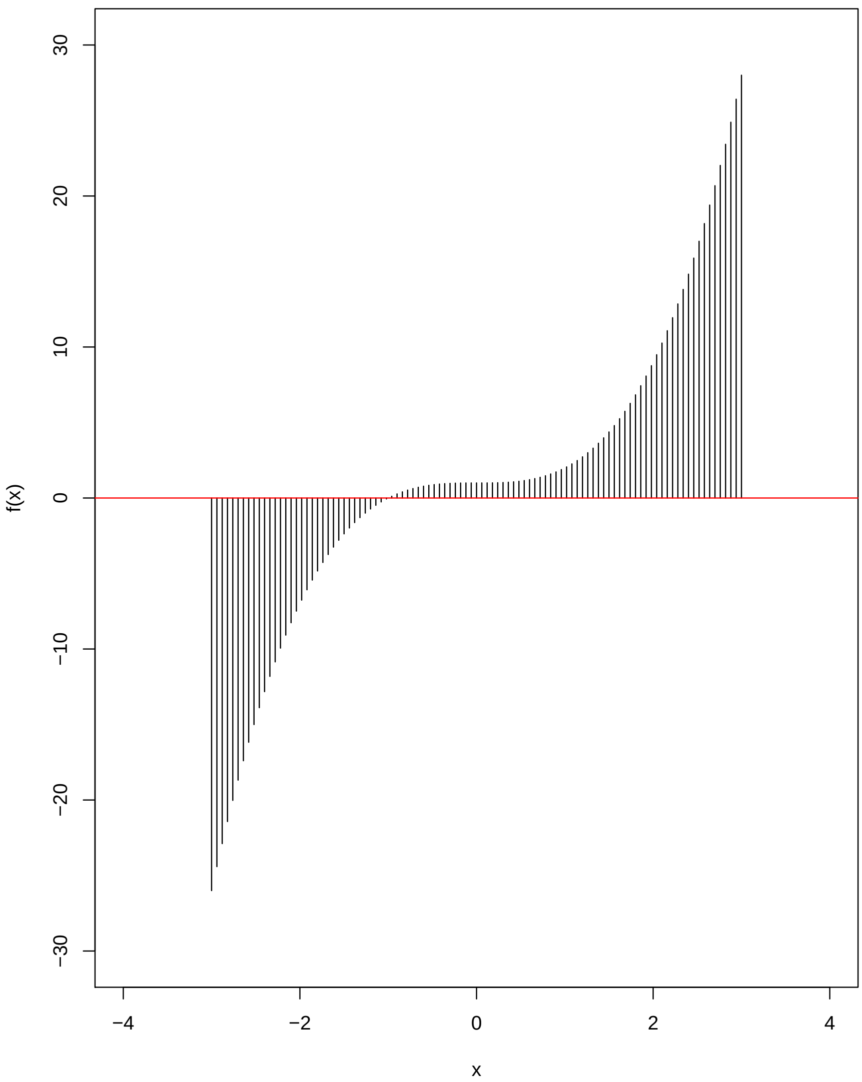

Figura 5.3: Região plana A, limitada pelo gráfico da função $y = x^3 + 1$ e o eixo Ox, no intervalo [-3,3].

ii. Volume de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região plana A limitada entre duas curvas: $V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$.

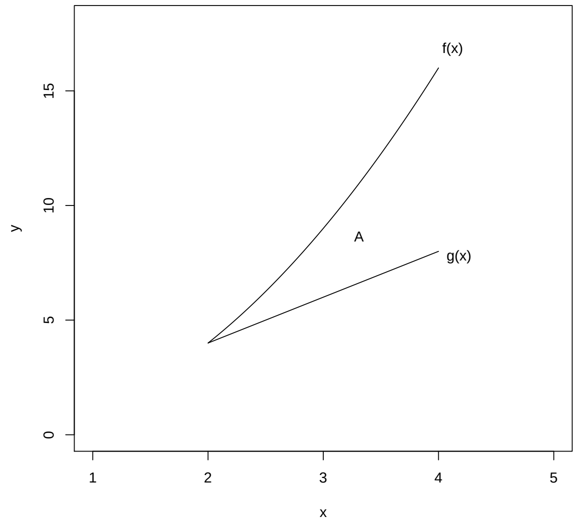

Figura 5.4: Região plana A de rotação, limitada pelos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$.

iii. Volume de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região plana A ao redor do eixo Oy: $V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$.

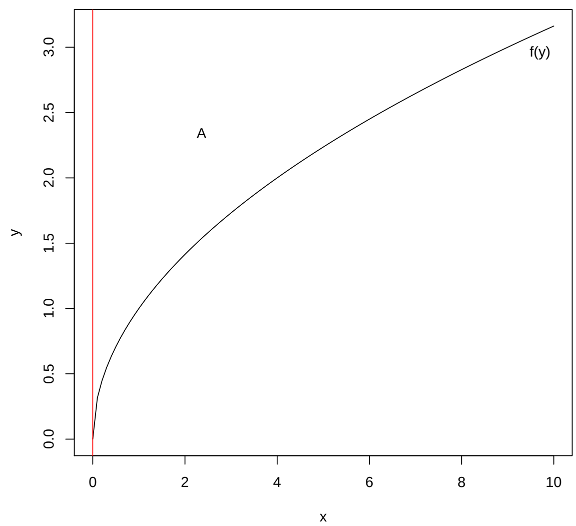

Figura 5.5: Região plana A de rotação, limitada pelo gráfico da função $f(y)$ e o eixo Oy.

iv. Volume de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região plana A ao redor de uma reta paralela ao eixo Ox: $V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx$.

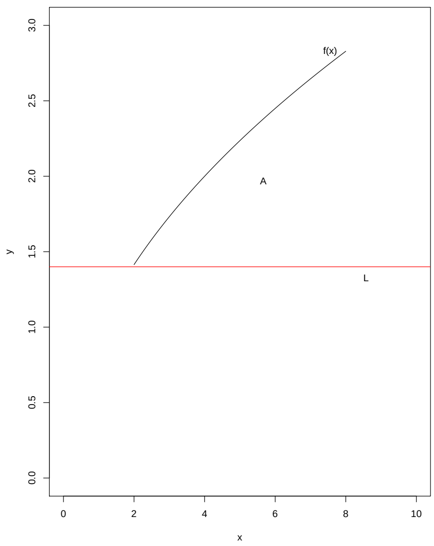

Figura 5.6: Região plana A de rotação, limitada pelo gráfico da função $f(x)$ e a reta horizontal L.

iv. Volume de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região plana A ao redor de uma reta paralela ao eixo Oy: $V = \pi \int_a^b [f(y) - M]^2 dy$.

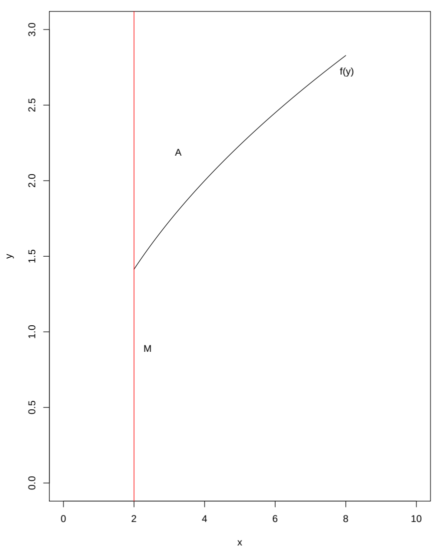

Figura 5.7: Região plana A de rotação, limitada pelo gráfico da função $f(y)$ e a reta vertical M.

5.4 Exercícios

1. Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[-a, a]$. Mostre que:

   a. Se $f(x)$ é par então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

   b. Se $f(x)$ é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2. Calcular as integrais

   a. $\int_{-2}^{2} x^3 dx$ b. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen} x dx$ c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ d. $\int_{-1}^{+1} (x^4 + x^2)dx$

3. Calcular as integrais definidas

   a. $\int_{-1}^{5} (x^3 - 3x + 4)dx$ f. $\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx$ k. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{4x+5}$

   b. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$ g. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^2}$ l. $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

   c. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$ h. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos x \text{sen} x dx$ m. $\int_{0}^{\pi/6} \text{sen}(3x)dx$

   d. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}dx$ i. $\int_{0}^{4} \frac{4dx}{\sqrt{x^2+9}}$ n. $\int_{0}^{\pi/2} \text{sen}^2(x)dx$

   e. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ j. $\int_{3}^{7} xe^{-2x}dx$ o. $\int_{0}^{5} \frac{x^2-3}{(x+2)(x+1)^2}dx$

4. Desenhe a região do plano limitada pelas funções e calcule a área correspondente.

   a. $y = 3x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$ e $x = 1$.

   b. $y = \cos(x)$, $y = 0$, $x = -2\pi$ e $x = 2\pi$.

   c. $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$.

   d. $y = x^2 - 6x + 8$ e $y = x + 2$.

   e. $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

   f. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$.

   g. $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{4}x$.

   h. $y = x + 6$, $y = x^3$ e $y = -\frac{x}{2}$.

   i. $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

   j. $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ e $y = 4$.

   k. $y =| x - 2 |$ e $y = 2 - (x - 2)^2$

   l. $y =| \text{sen}(x) |$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

5. Calcule a área da figura limitada pela função $y = -x^2 - 2x + 3$, a reta tangente à parábola no ponto $P(2, -5)$ e a reta $x = 0$.

6. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas. (Cálculo A, pág. 359)

   a. $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$;

   b. $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$;

   c. $y = x^2$ e $y = x^3$;

   d. $y = \cos(x)$, $y = \text{sen}(x)$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$.

7. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas. (Cálculo A, pág. 359)

   a. $y = \ln(x)$, $y = -1$, $y = 2$ e $x = 0$;

   b. $y = x^2$ e $y = x^3$;

   c. $y = \frac{1}{x}$, $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$ e $y = 4$;

   d. $x = y^2 + 1$, $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$ e $y = 2$.

8. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação ao redor da reta $y = 2$, da região limita por $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$. (Cálculo A, pág. 359)

9. Encontrar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada por $y^2 = 16x$ e $y = 4x$. (Cálculo A, pág. 359)

10. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação ao redor da reta $y = 2$, da região limita por $y = 3 + x^2$, $x = 2$, $x = -2$ e $y = 2$. (Cálculo A, pág. 360)

5.5 Integrais impróprias

Já vimos os conceitos de limite e de integral definida. Vejamos agora as definições de integrais impróprias, as quais têm aplicações à Estatística. Sem perda de generalidade há duas "modalidades" de integrais impróprias.

5.5.1 Integrais com limites de integração infinitos

Definição 5.6 As integrais dos tipos:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \text{ou} \qquad I_2 = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{ou} \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

são chamadas de impróprias.

Se existe limite finito

$$I_1 = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

então ele será a integral imprópria da função $f(x)$ no intervalo $(-\infty, b]$. Neste caso, dizemos que a integral I_1 é convergente, caso contrário dizemos que ela é divergente. De modo análogo para a integral I_2. Para a solução da integral imprópria I_3 podemos usar a propriedade da aditividade finita das integrais, ou seja:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{c \to +\infty} \int_b^c f(x)dx, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.19 Avalie a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Exemplo 5.20 Avalie a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$

Exemplo 5.21 Mostre que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \beta \exp(-\beta x) dx = 1, \beta > 0$

5.5.2 Integrais com integrandos infinitos

Definição 5.7 Suponha que $y = f(x)$ esteja definida no intervalo $(a, b]$ mas seja integrável somente em $[a + c, b]$. Então o limite:

$$\lim_{c \to 0^+} \int_{a+c}^{b} f(x)dx$$

é uma integral imprópria da função $y = f(x)$ em $(a, b]$.

Exemplo 5.22 Avalie a integral $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x-2}$

Exemplo 5.23 Avalie a integral $\displaystyle\int_0^2 (1 + \ln x)dx$

Exemplo 5.24 Avalie a integral $\displaystyle\int_{-2}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

5.5.3 Funções eulerianas: *Gama* e *Beta*

As funções Gama e Beta são dois tipos de integrais impróprias, também conhecidas como funções eulerianas, com inúmeras aplicações à Estatística.

Definição 5.8 Função Gama. Seja $\alpha > 0$, a integral imprópria convergente:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

é denominada função gama de parâmetro α.

Propriedades da função Gama:

P1. $\Gamma(1) = 1$

P2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

P3. $\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$

P2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Demonstração das propriedades da função gama como exercício.

Exemplo 5.25 Calcular a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5e^{-x}dx$

Exemplo 5.26 Calcular a integral $\int_1^{+\infty} (\ln x)^{3/2} x^{-2} dx$

Exemplo 5.27 Calcular a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

Definição 5.9 Função Beta. A integral de parâmetros $m > 0$ e $n > 0$ definida por:

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx, \tag{5.4}$$

se $m \geq 1$ e $n \geq 1$ esta integral é própria, porém se $0 < m < 1$ ou $0 < n < 1$, esta integral é imprópria convergente.

Se fizermos a seguinte reparametrização $x = \operatorname{sen}^2 t$, obtém-se:

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{2m-1}(\cos t)^{2n-1}dt \tag{5.5}$$

Propriedade fundamental da função beta (relacionada à função gama)

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Exemplo 5.28 Mostrar a relação 5.5.

Exemplo 5.29 Provar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Exemplo 5.30 Calcular a integral $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)^3}dx$.

Exemplo 5.31 Calcular a integral $\int_0^{\pi/6} \text{sen}(3x)dx$.

5.6 Exercícios

1. Calcular as seguintes integrais, classificando-as em convergente ou divergente.

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{10x} dx$

c. $\displaystyle\int_0^{5} \frac{x dx}{\sqrt{25-x^2}}$

d. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx$

e. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{x(1-x)^3} dx$

f. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

g. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$

h. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{1-x} dx$

i. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9+x^2}$

j. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

k. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$

l. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x dx$

m. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

n. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$

o. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3(2x)\cos^5(2x) dx$

p. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec x dx$

q. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-x} dx$

r. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

s. $\displaystyle\int_0^{1} x(1-x)^{3/2} dx$

t. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 dx$

Respostas:

a. ∞ b. $1/10$ c. 5 d. $-\frac{1}{2}$ e. $\pi/16$ f. 2 g. 120 h. $2/3$ i. $\pi/3$ j. $\pi/4$

k. $\pi^2/8$ l. ∞ m. ∞ n. 2 o. $1/48$ p. ∞ q. $3\sqrt{\pi}/4$ r. 1 s. $4/35$ t. ∞

Capítulo 6

Funções a duas ou mais variáveis independentes

Definição 6.1 Uma função a n variáveis independentes é uma lei que associa a cada ponto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de uma região $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um único número real $y \in C \subseteq \mathbb{R}$. Assim, o domínio desta função pertence ao $\mathbb{R}^n$ e o conjunto imagem está contido em $\mathbb{R}$. Notação:

$$f : \begin{cases} D \to C \\ \boldsymbol{x} \mapsto y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Em particular, se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, temos uma função a duas variáveis independentes. Neste caso, podemos visualizar o gráfico da função no espaço tridimensional.

Definição 6.2 Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes. O gráfico desta função é definido por $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.

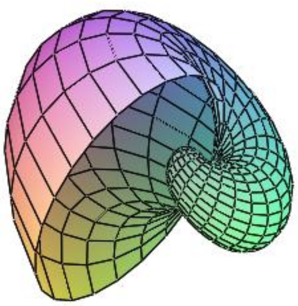

Figura 6.1: Visão geométrica da função $z = (1,3)^x \mathrm{sen}(y)$.

Exemplo 6.1 Sejam x_1, x_2, x_3 as quantidades de produção de três insumos agrícolas, em toneladas/ha, o custo de produção é definido por:

$$C(x_1, x_2, x_3) = 1200 + 5x_1 + 9x_2 + 10x_3$$

Encontre o custo para as produções: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5$. Qual é o custo fixo? Interprete-o.

Exemplo 6.2 Dada a função $z = 2^{x+y}$, encontre o(s) ponto(s) (x, y) tal (is) que $f(x, y) = 1$. Represente esta solução graficamente.

Exemplo 6.3 Encontre o domínio das funções a seguir e represente graficamente.

a. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b. $f(x, y) = \dfrac{x}{y - 2}$

c. $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{z-3}$

d. $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$

Exemplo 6.4 Esboce, no primeiro octante, o gráfico das seguintes funções:

a. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

b. $f(x, y) = 1 - x^2$

Observação Devido à dificuldade de visualização da função no espaço tridimensional, costuma-se representar as curvas de nível da função, que são os pontos do domínio para os quais $f(x,y) = c$, com $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6.5 Dada a função $f(x,y) = x^2 + y^2$, represente as suas curvas de nível para $c = 1$, $c = 4$, $c = 9$ e $c = 16$.

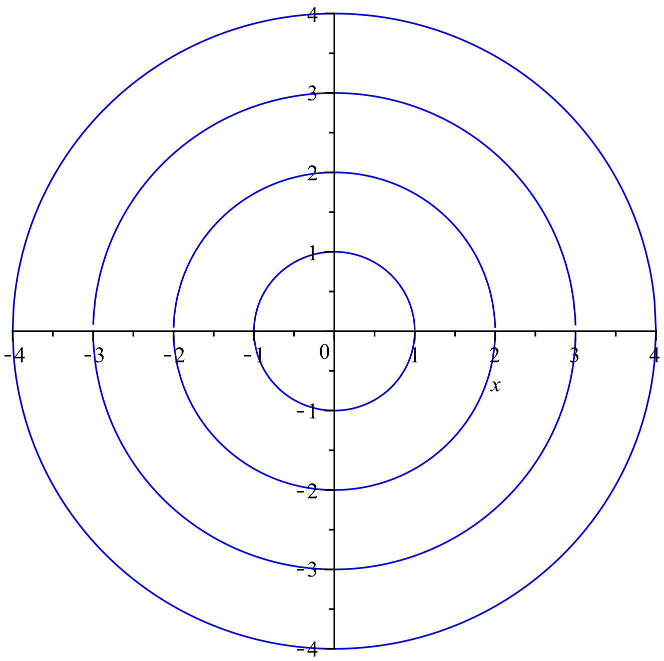

Figura 6.2: Curvas de nível função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

6.1 Limite e Continuidade

Os conceitos de limite e continuidade se estendem naturalmente para os casos de funções a duas ou mais variáveis independentes.

Definição 6.3 Limite. Seja $z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função a n variáveis independentes. O limite de $y = f(\boldsymbol{x})$ quando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, é denotado por:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L \tag{6.1}$$

subentendendo-se que à medida que o vetor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se aproxima do vetor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ por todas as direções do $\mathbb{R}^n$, a função tende ao número real L. Em particular, para o caso bidimensional temos:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$$

Exemplo 6.6 Dada a função $z = f(x,y) = e^{x-y}$, calcule $\lim\limits_{(x,y) \to (0,-2)} f(x,y)$.

Definição 6.4 Continuidade. Seja $z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função a n variáveis independentes, com domínio D e contradomínio C, ou seja:

$$f : \begin{cases} D \to C \\ \boldsymbol{x} \mapsto y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

dizemos que f é contínua no ponto $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, se e somente se:

i. $\exists \quad f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

ii. $\exists \quad \lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$;

iii. $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Exemplo 6.7 Seja a função:

$$f : \begin{cases} x + y + 2 & \text{se } (x, y) \neq (1, 1), \\ 6 & \text{se } (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

Verifique se esta função é contínua no ponto $(1, 1)$.

6.2 Exercícios

1. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Dada a função $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{y}$. Calcule:

   a. $f(1,1)$

   b. $f(0,3) + f(5,5)$

   c. $f(3+\Delta x, 4) - f(3,4)$

   d. $f(3, 4+\Delta y) - f(3,4)$

   Resp. a. 3 b. 4 c. $\frac{\Delta x}{2}$ d. $\frac{-3\Delta y}{2(4+\Delta y)}$

2. Nas funções a seguir, encontre o domínio e represente-o no plano cartesiano.

   a. $f(x,y) = \dfrac{3x+1}{2x+y}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (x,-2x)\}$

   b. $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \cos(y)$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,y)\}$

   c.$f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{2x-y}}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2x\}$

   d. $f(x,y) = \ln(y - x^3)$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^3\}$

   e. $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{y-2}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \text{ e } y \geq 2\}$

   e. $f(x,y) = e^{x-y}$ $D = \mathbb{R}^2$

3. Uma empresa possui dois equipamentos A e B. O equipamento A pode produzir diariamente 200 unidades de uma mercadoria do tipo I e 100 unidades da mercadoria do tipo 2, enquanto que a produção diária de B pode ser 100 unidades da mercadoria I e 600 unidades da mercadoria II. Determinar e representar graficamente o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ tal que, se o equipamento A trabalhar durante x dias e o equipamento B trabalhar durante y dias, a produção será de pelo menos 4.000 unidades da mercadoria I e de pelo menos 6000 unidades da mercadoria II.

4. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Uma empresa produz um produto em duas fábricas, I e II. As funções custo em cada fábrica são $C_1(x) = 500 + 10x$ em I e $C_2(x) = 600 + 8y$ em II, em que x e y são as quantidade produzidas em cada fábrica. Obtenha a função Lucro, sabendo-se que o preço de venda do produto é $\$12,00$

   Resp. $L = 2x + 4y - 1100$

5. Sabe-se que o conjunto $\{D = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$ representa o domínio de uma função a três variáveis independentes. Represente graficamente e marque no domínio da função a região que corresponde aos pontos $(x, 0, z)$

6. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Seja $P(x,y) = mx^{0,2}y^{0,8}$ uma função de produção. Calcule m sabendo-se que quando são usadas as quantidades $x = 32$ e $y = 256$ dos insunos, são produzidas 100 unidades do produto. $(m = 100.2^{-7,4})$

7. Considere a função $z = f(x, y) = 2x - y + 6$. Represente-a graficamente. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-1)} f(x, y)$.

   Resp $\lim_{(x,y)\to(4,-1)} f(x, y) = 15$

8. Considere a função $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Encontre seu domínio. Esboce o gráfico dessa função no 1^o octante. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} f(x, y)$.

   Resp. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ e $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x, y) = 4$

9. Esboce o gráfico das seguintes funções:

   a. $f(x, y) = x + 2y$ b. $f(x, y) = y - x^2$

10. Determinar e representar graficamente as curvas de nível das funções a seguir, nos níveis indicados:

    a. $z = y - x$, $c = 0$, $c = 2$ $c = 4$;

    b. $z = y - x^2$, $c = 1$, $c = 2$ $c = 3$;

    c. $z = x.y$, $x > 0$, $y > 0$, $c = 1$, $c = 2$ $c = 4$;

    d. $z = y - \ln x$, $c = 0$, $c = 2$;

    e. $z = y - x^3$ $c = 0$, $c = 2$;

11. Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

    verifque se ela é contínua no ponto $P(0, 0)$.

12. Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

    verifque se ela é contínua no ponto $P(0, 0)$.

13. Determinar entre as funções a seguir quais são homogêneas e os respectivos graus de homogeneidade:

    a. $z = 10x^2 + 5y^2 + xy$

    b. $z = x^2y + xy^3$

    c. $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

    d. $z = x^3 + y^3 - 5$

    e. $z = kx^\alpha y^\beta$, com $k > 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

14. Sabendo-se que uma função é homogênea de grau 4 e que $f(1, 2) = 2$, calcular $f(3, 6)$.

6.3 Derivadas Parciais e Diferencial Total

Definição 6.5 Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes, as derivadas parciais de primeira ordem da função num ponto $P(x, y)$ do seu domínio são dadas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

se os limites existirem.

Exemplo 6.8 Dada a função $z = x^2 + y$ encontrar as deviradas parcias de primeira ordem, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, pela definição.

Observação: Do ponto de vista prático, no processo de derivação parcial em relação a uma das variáveis independentes a outra variável é "tratada" como constante. Permanecem válidas todas as regras de derivação já estudadas para os casos de funções a uma variável independente.

Exemplo 6.9 Obter as derivadas parcias de primeira ordem das funções a seguir.

a. $z = x \ln y + \sqrt{x} - 4$

b. $z = x \cos x + \text{arctg}(y) - y^3$

c. $z = 2^{x+y}$

6.3.1 Interpretação geométrica das derivadas parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes. Considere uma secção do gráfico desta função por um plano paralelo ao plano xOz ou yOz conforme a variável fixada. A título de ilustração, vamos considerar que a variável x é fixada, assim o coeficente angular da reta tangente a essa secção paralela ao plano yOz no ponto P tem coeficiente angular:

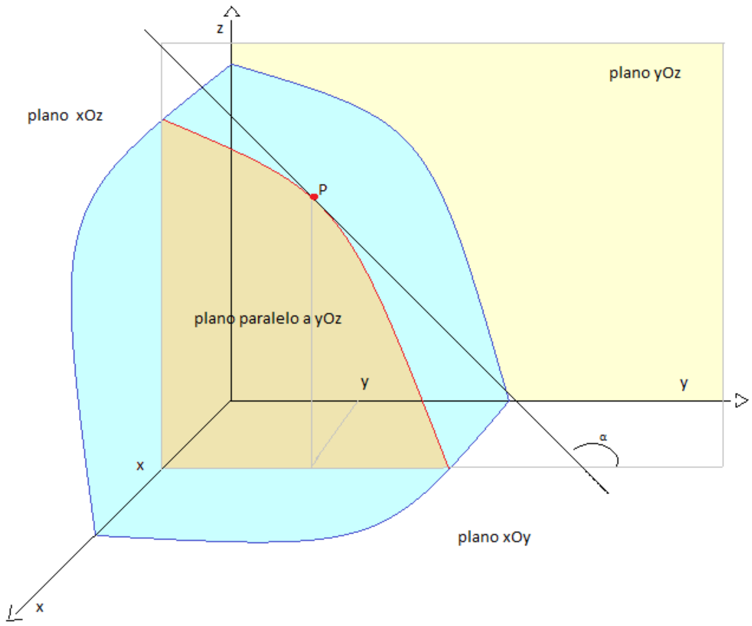

Figura 6.3: Interpretação geométrica da derivada parcial.

$$\text{tg}(\alpha) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

analogamente para a reta tangente a secção transversal paralela ao plano xOz no ponto P.

Observação: Do ponto de vista prático, as derivadas parciais de primeira ordem num dado ponto $P(x, y)$ correspondem a uma variação na função para uma "pequena" variação em uma das variáveis independentes, mantendo a outra fixa.

Exemplo 6.10 [Morettin, Hazzzan e Bussab (2010), pág.252] Suponha que a quantidade de batata demandada por semana (em kg) em um mercado seja função do seu preço unitário x (por kg) e do preço unitário y (por kg) de arroz, $q = 1000 - 2x^2 + 15y$. Calcule $\frac{\partial q}{\partial x}(3, 4)$ e $\frac{\partial q}{\partial y}(3, 4)$ e interprete.

Definição 6.6 Regra da cadeia para derivadas parciais. Seja $z = f(g(x, y))$, se considerarmos $u = g(x, y)$ então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Exemplo 6.11 Encontrar as derivadas parciais de primeira ordem das funções a seguir.

a. $z = \cos(x^2 + y^2)$

b. $z = \ln\sqrt{3x^2 - y}$

c. $z = f(x, y, w, t) = (x + yw + t)^4$

Definição 6.7 Derivadas parciais de ordem superior. Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes, as derivadas parciais de primeira ordem, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, em geral, contiuam sendo funções de x e y e, sendo, assim, podem ser derivadas sucessivamente. Em particular, as derivadas parciais de segunda ordem são denotadas por:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xx}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yy}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{xy}(x, y)$$

Estas derivadas parciais podem ser "alocadas" em uma matriz, chamada Hessiana:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Se $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, a matriz Hessiana terá dimensão k:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_1} \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_2} \\ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_k^2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.12 Obter as derivadas parciais de segunda ordem das funções a seguir.

a. $z = x \ln y^2 + x^3 y$

b. $z = 2x^2 + \operatorname{sen} y - xe^y$

Definição 6.8 Diferencial total de primeira ordem. Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes, a diferencial total de primeira ordem desta função é dada por:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{6.2}$$

Interpretação:

Como vimos, do ponto de vista prático as derivadas parciais de primeira ordem correspondem a uma variação em z para uma pequena variação em uma das variáveis independentes, mantendo-se a outra fixa. Já a diferencial total (6.2) corresponde a uma aproximação linear para a verdadeira variação na variável dependente, Δz, devido a pequenas variações simultâneas em x e y.

Exemplo 6.13 Dada a função $z = 3x^2 + 4y^2$ calcule dz no ponto $P(1, 1)$ para $\Delta x = \Delta y = 0,01$.

Exemplo 6.14 Retome o exemplo 6.10, calcule e interprete a diferencial de demanda no ponto $P(3, 4)$ para $\Delta x = \Delta y = 0,10$.

Observação: o resultado se estende naturalmente para os casos de funções com mais de duas variáveis independentes. Se $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_k}dx_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial z}{\partial x_i}dx_i$$

Exemplo 6.15 Seja $w = \ln(x^2 + 2y) + \text{tag}(z)$. Calcular dw.

Exemplo 6.16 Seja $w = f(x, y, z)$, em que w corresponde a produção de milho, x é a variável de trabalho (mão de obra empregada em horas trabalhadas), y é o fertilizante químico usado, z é o adubo orgânico utilizado. Qual a interpretação da diferencial dw?

Definição 6.9 Diferencial total de ordem superior. Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes, a diferencial total de k-ésima ordem desta função é dada por:

$$d^k z = \Big(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\Big)^k$$

Em particular para $k = 2$ temos:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

6.4 Máximos e Mínimos de funções a duas variáveis

Definição 6.10 Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes com domínio $D(f)$. Dizemos que a função z tem um mínimo local em $P(a, b)$, $(a, b) \in D(f)$ se existir uma bola aberta de centro em $P(a, b)$ e raio r, $\mathbb{B}(r)$, tal que:

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \forall \ (x, y) \ \in \ \mathbb{B}(r)$$

Deve-se observar que se $\forall \ (x, y) \ \in \ D(f)$, verifica-se que $f(x, y) \geq f(a, b)$, então o ponto $P(a, b)$ é um mínimo absoluto da função.

De modelo similar, dizemos que a função z tem um máximo local em $P(a, b)$, $(a, b) \in D(f)$ se existir uma bola aberta de centro em $P(a, b)$ e raio r, $\mathbb{B}(r)$, tal que:

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall \ (x, y) \ \in \ \mathbb{B}(r)$$

Também se deve observar que se $\forall \ (x, y) \ \in \ D(f)$, verifica-se que $f(x, y) \leq f(a, b)$, então o ponto $P(a, b)$ é um máximo absoluto da função.

O Teorema a seguir nos "ensina" um critério para identificação de máximos e mínimos.

Teorema 6.1 Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes com domínio $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ e o ponto $P(a, b) \in D(f)$. Se a função $f(x, y)$ admite derivadas parciais até de segunda ordem contínuas, então uma condição necessária para f tenha um extremo local em $P(a, b)$ é:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = 0$$

ou seja, $P(a, b)$ é um ponto crítico desta função. As condições suficientes para que $P(a, b)$ seja um extremo relativo são:

i. $\mid \boldsymbol{H} \mid > 0$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(a, b) < 0$ ou $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(a, b) < 0$ então $f(x, y)$ tem máximo local em $P(a, b)$;

ii. $\mid \boldsymbol{H} \mid > 0$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(a, b) > 0$ ou $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(a, b) > 0$ então $f(x, y)$ tem mínimo local em $P(a, b)$;

iii. Se $| \boldsymbol{H} | < 0$ então $f(x, y)$ tem ponto de sela em $P(a, b)$.

Prova: ver Apostol (1983).

Exemplo 6.17 Dada a função $z = x^2 + y^2 - 2x$. Verifique se ela possui extremos relativos.

Exemplo 6.18 Quando uma empresa usa x unidades de trabalho e y unidades de capital, sua produção mensal é dada por:

$$P = 32x + 20y + 3xy - 2x^2 - 2,5y^2$$

Obtenha os valores de x e y que maximizam a produção mensal.

Exemplo 6.19 Suponha que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ satisfaçam:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

em que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são constantes fixas, α e β são parâmetros desconhecidos e de interesse prático e os ϵ_i constituem-se em variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância constante σ^2. O método dos mínimos quadrados é um procedimento matemático que permite estimar os parâmetros α e β, minimizando a soma de quadrados dos erros. Aplique este procedimento para obter os estimadores de α e β.

Teorema 6.2 Extensão para o caso a n variáveis independentes. Seja $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função a n variáveis independentes com domínio $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ e o ponto $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D(f)$. Se a função $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ admite derivadas parciais até de segunda ordem contínuas, então uma condição necessária para f tenha um extremo local em $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \ \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nestas condições iniciais, seja $\Delta =\mid \boldsymbol{H} \mid_P$ o determinante da matriz hessiana avaliada no ponto P. As condições suficientes para que $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ seja um mínimo relativo da função são:

1. $\Delta_0 =\mid 1 \mid > 0$;
2. $\Delta_1 =\mid f_{x_1x_1} \mid_P > 0$;
3. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}_P > 0$;

$\vdots$

n+1. $\Delta_{n+1} =\mid \boldsymbol{H} \mid_P > 0$.

Se os determinantes $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n+1}$ forem alternadamente positivos e negativos então o ponto P será um ponto de máximo.

6.5 Integrais múltiplas

A integral $\int f(x)dx$ é simples pois refere-se a uma função a uma variável independente. Se considerarmos funções com duas ou mais variáveis independentes, pode-se estender este conceito para as chamadas integrais múltiplas. Assim $\int \int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n$ denota uma integral múltipla. Para solucionar uma integral múltipla, procedemos de modo análogo ao processo de derivação parcial, ou seja, ao integrar em relação a uma variável independente x_i, as outras são tratadas como constantes, permanecendo válidas todas as regras de integração já vistas.

Exemplo 6.20 Calcular a integral $\displaystyle\int \int \int 2xyzdxdydz$

6.5.1 Integrais duplas definidas

Definição 6.11 Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes contínua na região $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que se deseje calcular o volume V do sólido que é limitado acima pelo gráfico da função, abaixo pela região D e lateralmente pelo cilindro sobre o limite de D, cujas geratrizes são paralelas ao eixo Oz. Neste caso, procedemos de modo análogo ao que foi feito para funções a uma variável independente. Vamos dividir a região D em retângulos de áreas Δ_i, tomando-se em cada área um ponto arbitrário $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, formamos a soma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$$

Façamos agora $n \to \infty$. Se quando $n \to \infty$ tem-se $S_n \to I$, então dizemos que a soma S_n é Riemann integrável e o limite I é a integral dupla da função $f(x, y)$ na região D. Resumindo:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = \int\int_D f(x, y) dx dy$$

Geometricamente o número I mede o volume V do sólido definido pela função.

6.5.2 Integrais duplas iteradas

Vamos considerar dois casos típicos de integração para a região D.

i. A região D é retangular

Considere que a região D é formada por todos os pontos (x, y) do plano tais que $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$. Sem perda de generalidade, neste caso temos:

$$\int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x, y) dx}_{Ay} dy = \int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x, y) dy}_{Ax} dx$$

ii. A região D não é retangular

Considere que a região D é formada por todos os pontos (x, y) do plano limitado pelas funções contínuas $g(x)$ e $h(x)$, no intervalo real $[a, b]$ com $g(x) \geq h(x)$. Nesse caso, então temos como uma solução:

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \Big[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy\Big] dx$$

Exemplo 6.21 Calcular a integral $\int_0^2 \int_0^1 y^3 \sqrt{x(1-x)^3} dxdy$

Exemplo 6.22 Calcular a integral dupla da função $f(x, y) = 8xy$ no domínio de integração $0 < x \leq y < 1$.

6.6 Exercícios

1. Usando a definição formal de derivadas parciais, encontre as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:
   a. $f(x,y) = -2x^3 + 4y$
   b. $f(x,y,z) = x^2 - y + 2z$

2. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a função $f(x,y) = 4xy^2$. Usando a definição de derivada parcial, calcule $f_x(-1,2)$ e $f_y(-1,2)$

3. Encontrar as derivadas parciais de primeira ordem das funções a seguir.

   a. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$
   b. $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
   c. $z = \sqrt{x^2+y^2}$
   d. $z = e^{\frac{x}{y}}$
   e. $z = \text{sen}\dfrac{x}{y}$
   f. $z = \sqrt{\dfrac{x+y}{x^2+y^2}}$
   g. $z = e^{x^2-y^2}$
   h. $z = 5^{xy} + x - y$
   i. $z = x^3e^x + 5y$
   j. $z = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$
   k. $z = \cos(3x^2 + e^{2y^3})$
   l. $z = 12x^2y^3 + \cos x - \ln y + 2^x$

4. Encontrar as derivadas parciais de segunda ordem das funções a seguir.

   a. $z = x^4y^3 - 2xy^2 + y - 5$
   b. $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$
   c. $z = \ln(x^2+y^2)$
   d. $z = e^{\frac{x}{y}}$
   e. $z = \text{sen}(xy)$
   f. $z = \dfrac{1}{x+y}$

5. Dada a função $f(x,y) = 2x^5y + \ln(y)$, construa a matriz hessiana para o ponto $P(1,3)$ e calcule seu determinante.

6. Se $z = xy + 2^x$, obter dz.

7. Dada a função $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, obter dz.

8. Mostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}y = 2$ se $z = \ln(x^2+xy+y^2)$.

9. Mostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}y = xy + z$ se $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$.

10. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a função $P(k,L) = 3k^{0,5}L^{0,5}$. Mostre que $k\dfrac{\partial P}{\partial k} + L\dfrac{\partial P}{\partial L} = P(k,L)$

11. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Seja $q = 30 - 4x - 2y$ a equação da demanda de um produto A, x seu preço unitário e y o preço unitário de um bem B.

    a. Calcule as demanadas marginais parciais, $\frac{\partial q}{\partial x}$ e $\frac{\partial q}{\partial y}$, explicando seu significado.

    b. O que aumenta mais a demanda de A: diminuir em uma unidade seu preço unitário (mantendo o de B) ou diminuir em uma unidade o preço unitário de B (mantendo o de A)?

12. Mostre que a função $z = 2xy^3$ é diferenciável no ponto $P(2, 3)$ e calcule a diferencial da função neste ponto para $dx = dy = 0,002$.

13. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Dada a função custo para a produção de dois bens de quantidades x e y, $C(x, y) = 100 + x^2 + 2y^2 + xy$, determine:

    a. o custo marginal em relação a x;

    b. o custo marginal em relação a y;

    c. $\frac{\partial C}{\partial x}(10, 20)$ e $\frac{\partial C}{\partial y}(10, 20)$, explicando seus significados.

14. Encontre a diferencial total de primeira ordem das seguintes funções:

    a. $z = \ln(2x^3 + \cos y)$ b. $z = 10yx^3$

    c. $z = \dfrac{x}{x + y^2}$ d. $z = e^{2x+y^3}$

15. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a seguinte função custo de dois bens de quantidades x e y:

$$C(x, y) = 15 + 2x^2 + 5y^2 + xy$$

    a. Calcule a diferencial do custo no ponto $x = 10$ e $y = 15$ para $\Delta x = \Delta y = 0, 1$.

    b. Calcule a diferencial num ponto genérico para $\Delta x = \Delta y = 0, 05$.

16. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a seguinte relação macroeconômica:

$$Y = \frac{C_0 + I + G - bT}{1 - b}$$

em que Y é a renda nacional, C_0 e b são constantes, I representa o gasto com investimentos, G representa o gasto governamental, T representa o total de impostos. Usando a diferencial da função, verifique o que ocorre com a renda nacional, se o gasto governamental e os impostos aumentarem em 2 unidades monetárias e o gasto com investimentos permanecer constante.

17. Determinar a diferencial total de segunda ordem da função $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$.

    Resp.: $d^2z = \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx^2 - \frac{2y}{(1+y^2)^2}dy^2$

18. Ache os pontos críticos de cada uma das funções a seguir e classifique-os.

    a. $z = x^2 + y^2 - xy - 3x - 4y$

    b. $z = e^{x^2+y^2}$

    c. $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 3x + 5y + 40$

    d. $z = \ln\left(2x^2 - 4x - 3y^2 + 27y - 10\right)$

e. $w = -x^2 - y^2 - z^2 + 4x + 2y + 6z - 10$

f. $w = x^2 + y^2 + z^2 + y - z + xy + 6$

Resp.: a. $(\frac{10}{3}, \frac{11}{3})$ b. $(0, 0)$ c. $(1, 1)$ d. $(1, 3)$ e. $(2, 1, 3)$ f. $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$

19. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) O lucro que uma empresa obtém, vendendo dois produtos A e B é dado por

$$L = 600 - 2x^2 - 4y^2 - 3xy + 18x + 18y$$

em que x e y são as quantidade vendidas. Obtenha os valores de x e y que maximizam o lucro. (**Resp.:** $(\frac{90}{23}, \frac{18}{23})$)

20. Num ensaio de espaçamento de eucaliptos, as produções obtidas para diversos espaçamentos foram as seguintes

Espaçamento (m $\times$ m)	Área (X) (m^2)	Produção (Y)(m^3/ha)
$1,0 \times 1,0$	1,00	268
$1,0 \times 1,5$	1,50	262
$1,0 \times 2,0$	2,00	266
$1,5 \times 2,0$	3,00	253
$1,0 \times 3,0$	3,00	229
$2,0 \times 2,0$	4,00	247
$2,0 \times 3,0$	6,00	206

Ajuste uma equação de regressão linear simples. Faça uma previsão da produção para uma área de 5,00 m^2. (**Resp.:** $\hat{Y} = -11,99X + 282,40$)

21. Os dados a seguir, referem-se ao número de dias após o plantio do milho (X) e o teor de Mg (Y), em mg/planta.

X	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Y	140	160	180	230	360	410	490	500	650	800

Ajustar um modelo de regressão linear simples para descrever o teor de Mg (Y) em função do número de dias após o plantio (X). Interpretar o coeficiente de regressão estimado $\hat{\beta}$. Faça uma previsão do teor de magnésio para X=75.

22. Calcular as integrais

a. $\int\int 3x^2y^3 dx\, dy$ b. $\int\int\int 4xy^2 z dx\, dy\, dz$ c. $\int\int x dx\, dy$

d. $\int\int x\cos(y) dx dy$ e. $\int\int (2x + y) dx\, dy$ f. $\int\int (y - 1) dx\, dy$

23. Inverter a ordem de integração nas integrais duplas a seguir:

a. $\displaystyle\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx$

b. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)dydx$

Resp.: a. $\int_0^{48} \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)dxdy$ b. $\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)dxdy + \int_2^3 \int_{y/3}^{1} f(x,y)dxdy$

24. Calcular as integrais definidas

a. $\displaystyle\int_0^2 \int_1^3 (x^2y + 2xy^2)dx\, dy$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi} [\text{sen}(x) + \cos(y)]dx\, dy$

Resp. a. $\frac{116}{3}$ b. $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$

25. Calcular $\displaystyle\int_D\int xydx\, dy$, em que D é a região do plano limitada pelas retas $x = 2$, $y = 2$ e $y = 2 - x$. (**Resp.:** $\frac{10}{3}$)

26. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x,y) = x + y$ e acima do domínio dado pela inequações $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 4$. (**Resp.:** 64)

27. Calcular $\int\int_D (2x - y)dxdy$, em que D é limitado pelas retas $x = 2$, $y = x$ e pela parábola $y = x^2$. (**Resp.:** $\frac{9}{10}$)

28. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x,y) = 5$ e acima do domínio dado pela inequações $0 \leq x \leq 4$ e $x \leq y \leq 2x$. (**Resp.:** 40)

29. Calcular $\int\int_D (x + y)dxdy$, em que D é limitado pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ e $y = 2 - x$. (**Resp.:** $\frac{11}{6}$)

30. Ao calcular o volume V do sólido situado abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima de uma região S do plano xoy, obteve-se a seguinte soma de integrais:

$$V = \int_0^1 \Big[\int_0^y z\ \ dx\Big]dy + \int_1^2 \Big[\int_0^{2-y} z\ \ dx\Big]dy$$

Desenhe a região S e expresse o volume V por uma soma de integrais, para as quais a ordem de integração esteja invertida. Calcule o volume V. ($V = \frac{4}{3}$)

Referências Bibliográficas

APOSTOL, T. M. **Cálculo**. Vol. 1. Editora Reverté, 1983. 771 p.

CHIANG, A. C., KEVIN, W. **Matemática para economistas**. Rio de Janeiro: Campus, 2006. 666 p.

EDWARDS Jr., C. H.; PENNEY, D. E. **Cálculo com Geometria Analítica.** 4a. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1997. 486 p.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração**. 6a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 464 p.

GOMES, F. P.; NOGUEIRA, I. R. **Análise Matemática**. 2a. ed. Piracicaba: Augegraf: produções gráficas, 1980. 371 p.

LEITHOLD, L. **O cálculo com Geometria Analítica**. 3a. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Vol.1.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. **Cálculo: funções de uma e várias variáveis.** 2a. ed. São Paulo: Saraiva, 2011, 408 p.

SIMMONS, G.F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2010. Vol. 1.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica.** 2a. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. Vol. 1